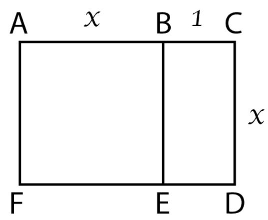
Correction : Trinôme et nombre d'or

On considère la figure :

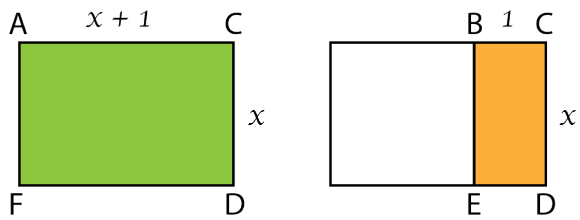


Les quadrilatères ACDF et BCDE sont des rectangles qui ont les mêmes proportions.

On pose : AB = CD = x et BC = 1.

1) Démontrons l'égalité : $x^2 - x - 1 = 0$.

D'après l'énoncé, ACDF et BCDE ont les mêmes proportions, donc : $\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{CD}$, par exemple.



D'où : $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{x}$.

Ainsi : $x \times x = 1 \times (x + 1)$

Donc : $x^2 = x + 1$.

En résultat : $x^2 - x - 1 = 0$.

2) On pose : $x^2 - x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$.

Montrons que : $x_1 + x_2 = 1$

$x_1x_2 = -1$

$x^2 - x - 1 = (x - x_1)(x - x_2)$ équivaut à $x^2 - x - 1 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2$

D'où : $x^2 - x - 1 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$

Deux trinômes sont égaux lorsque leurs coefficients respectifs sont égaux.

Donc : $-1 = -(x_1 + x_2)$ et $\underline{x_1 + x_2 = 1}$.

Et : $-1 = x_1x_2$, d'où $\underline{x_1x_2 = -1}$.

Les expressions a + b et ab sont ce que l'on appelle des invariants par permutations.
Posons s(a, b) = a + b et p(a, b) = ab. On observe que s(a, b) = s(b, a) et p(a, b) = p(b, a).
Quand on permute les nombres a et b, les expressions sont invariantes. Dans le cas étudié, nous voyons bien que la somme des racines du trinôme $x_1 + x_2$ est un invariant par permutation, ainsi que le produit des racines du trinôme x_1x_2. L'étude des invariants par permutation, en lien avec l'étude de la résolubilité des équations polynomiales, s'est avérée d'une étonnante fécondité et a conduit à l'émergence de la théorie moderne des groupes algébriques.

3) Développons $(x_1 + x_2)^2$ et démontrons que $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

$(x_1+x_2)^2 = {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_2$

Or : $x_1x_2 = -1$.

Donc : $(x_1+x_2)^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2(-1) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2$

Or : $x_1 + x_2 = 1$, donc : $(1)^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2$

En résultat : ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1 + 2 = 3$, cqfd.

4) Démontrons que $(x_1 - x_2)^2 = 5$.

$(x_1-x_2)^2 = {x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2$

Or : $x_1x_2 = -1$ et ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 3$

Donc : $(x_1-x_2)^2 = 3 - 2(-1) = 3 + 2$

En résultat : $(x_1-x_2)^2 = 5$, cqfd.

5) Démontrons que les nombres x_1 et x_2 sont solutions du système de deux équations linéaires à deux inconnues ci-dessous :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

D'après les questions précédentes, on a : $(x_1-x_2)^2 = 5$ et $x_1 + x_2 = 1$.

Donc : $x_1 - x_2 = \pm\sqrt{5}$ et $x_1 + x_2 = 1$.

Autrement dit, les racines x_1 et x_2 sont solutions des deux systèmes d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Comme les racines x_1 et x_2 sont permutables, ces deux systèmes conduisent aux mêmes solutions.

6) Montrons que AB = φ où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé nombre d'or.

Résolvons le système de deux équations linéaires à deux inconnues : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = 1 + \sqrt{5} \\ 2x_2 = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

La solution du problème étant une longueur nécessairement positive, la solution du problème est le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Donc : $AB = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$.