Cours sur les trinômes de degré 2

1. Qu'est-ce qu'un trinôme de degré 2 ?

Un trinôme de degré 2 est une expression algébrique de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels, a étant supposé non nul, la variable x représentant un nombre réel.

2. Valeur et signe d'un trinôme de degré 2... que veut-on dire par là ?

La valeur que prend le trinôme dépend ("est fonction") de la valeur attribuée à x.

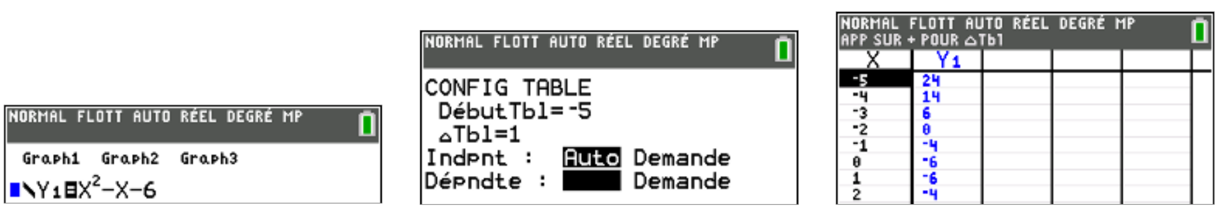
Soit le trinôme $P(x) = x^2 - x - 6$.
Pour x = -3, on a : $P(-3) = (-3)^2 - (-3) - 6 = 9 + 3 - 6 = 6$. Le nombre 6 est la valeur du trinôme pour x = -3.
Le signe du trinôme est alors positif car 6 > 0.

Pour x = -2, on a : $P(-2) = (-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$. Comme le trinôme P(x) s'annule lorsque x = -2, on dit que -2 est une racine du trinôme.

Pour x = 2, on a : $P(2) = (2)^2 - (2) - 6 = 4 - 2 - 6 = -4$. Le trinôme a pour valeur -4 et est négatif car -4 < 0.

On peut visualiser automatiquement les valeurs prises par un trinôme à l'aide de la calculatrice graphique. On entre le trinôme à l'aide de la touche f(x), puis on paramètre l'affichage du futur tableau de données à l'aide de la touche [déf table] et on affiche le tableau de données en sélectionnant [table].

Affichage des valeurs du trinôme pour x variant à partir de -5 avec un incrément de 1



Sur le tableau ci-dessus, on observe que lorsque les valeurs de la variable x augmentent, celles du trinôme diminuent de 24 à -6, puis augmentent à nouveau. On observe une variation des valeurs du trinôme et un changement de signe de ces valeurs : positives au début, puis négatives et, comme on peut le conjecturer, à nouveau positives.

3. Un trinôme peut-il s'écrire autrement que $ax^2 + bx + c$?

Un trinôme de degré 2 peut toujours s'écrire sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ appelée forme canonique où α et β sont deux réels tels que :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et}$$

$$\beta = a\alpha^2 + b\alpha + c \ \text{ ou encore } \ \beta = -\frac{\Delta}{4a} \ \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac \text{ où } \Delta \text{ est appelé discriminant du trinôme.}$$

Posons $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ et examinons le signe de $P(x) - \beta$.
On a trivialement : $P(x) - \beta = a(x - \alpha)^2$

• Si a > 0, alors $P(x) - \beta = a(x - \alpha)^2 > 0$, donc $P(x) > \beta$. Les valeurs du trinôme sont toujours plus grandes que β. On dit que le trinôme admet pour minimum la valeur β, valeur obtenue lorsque x = α.

• Si a < 0, alors $P(x) - \beta = a(x - \alpha)^2 < 0$, donc $P(x) < \beta$. Les valeurs du trinôme sont toujours plus petites que β. On dit que le trinôme admet pour maximum la valeur β, valeur obtenue lorsque x = α.

4. Existe-il une méthode pour déterminer les valeurs qui annulent un trinôme ?

OUI !

Cette méthode s'appelle la méthode du discriminant, le discriminant d'un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$, identifié par la lettre majuscule grecque delta, étant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

3 cas sont à distinguer !

• Si $\Delta > 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 avec :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Le trinôme s'annule lorsque $x = x_1$ et $x = x_2$.

• Si $\Delta = 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet une racine double x_0 avec : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Le trinôme s'annule lorsque $x = x_0$.

• Si $\Delta < 0$, alors : $ax^2 + bx + c$ n'admet aucune racine. Ce trinôme ne s'annule jamais et ne change donc jamais de signe.

5. Un trinôme est-il factorisable ?

Pas toujours !

Tout dépend du signe du discriminant Δ du trinôme !

• Si $\Delta > 0$, alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Le trinôme est factorisable !

• Si $\Delta = 0$, alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. Le trinôme est factorisable !

• Si $\Delta < 0$, alors : $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.

6. Comment déterminer le signe d'un trinôme selon les valeurs prises par x ?

• Si $\Delta > 0$, alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Le signe du trinôme est le signe de -a entre les racines.

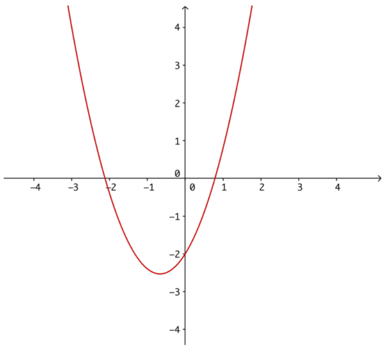
• Si $\Delta = 0$, alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. Le signe du trinôme ne change pas. Son signe est le signe de a !

• Si $\Delta < 0$, alors le signe du trinôme ne change pas. Son signe est le signe du coefficient a !

Des images mentales à construire

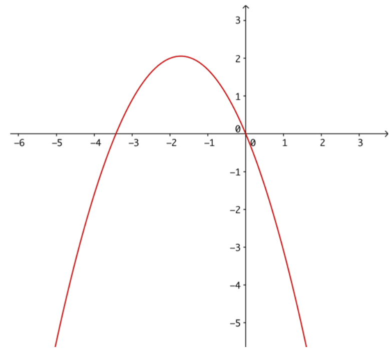
Cas où $\Delta > 0$
→ Le trinôme admet 2 racines, abscisses des 2 points d'intersection de l'axe (Ox) et de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

$a > 0$



Entre les racines, le signe du trinôme est -

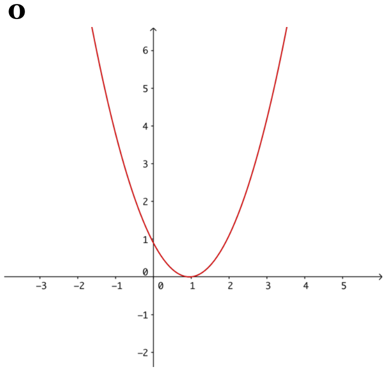
$a < 0$



Entre les racines, le signe du trinôme est +

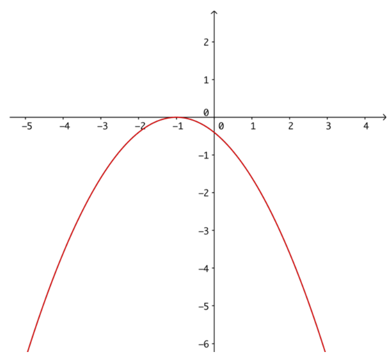
Cas où $\Delta = 0$
→ Le trinôme admet 1 racine double, abscisse du point d'intersection de l'axe (Ox) et de la parabole.

$a > 0$



On a : $ax^2 + bx + c \geq 0$

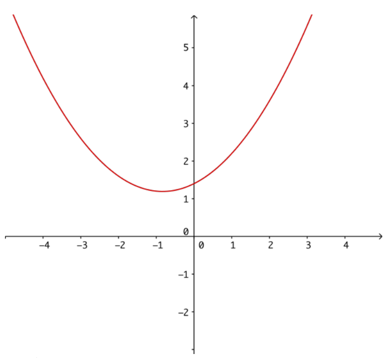
$a < 0$



On a : $ax^2 + bx + c \leq 0$

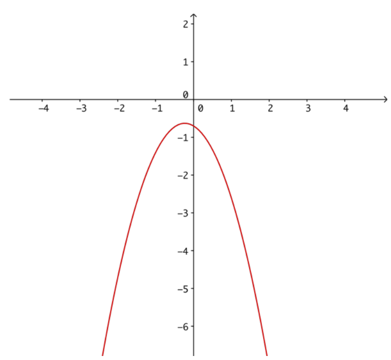
Cas où $\Delta < 0$

$a > 0$



On a : $ax^2 + bx + c > 0$

$a < 0$



On a : $ax^2 + bx + c \leq 0$