Comment déterminer la forme canonique d'un trinôme du second degré ?

Trois méthodes sont disponibles pour déterminer l'unique forme canonique d'un trinôme du second degré.

Méthode 1
La première méthode proposée sera la plus simple, la plus élégante et la plus naturelle. Elle requiert cependant une certaine aisance avec les identités remarquables.

Méthode 2
La deuxième méthode exigera davantage d'écritures, procédant par identification de coefficients, et vous fera découvrir un type de raisonnement fondamental.

Méthode 3
La troisième méthode relèvera de l'application directe du cours de mathématiques de seconde ; son utilisation exigera une parfaite structuration du discours mathématique déployé.

Méthode 1 (simple, élégante et naturelle)

Considérons, par exemple, le trinôme du second degré $x^2 - 6x + 1$ et tentons d'écrire sa forme canonique.

Tout d'abord, comme dans la méthode d'Al-Khwarizmi abordée en classe, nous pouvons remarquer que l'expression $x^2 - 6x$ est égale à $x^2 - 2(x)(3)$, laquelle est le début de l'identité remarquable $(x - 3)^2$.

En effet : $(x - 3)^2 = x^2 - 2(x)(3) + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

Donc : $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$.

D'où : $x^2 - 6x + 1 = [x^2 - 6x] + 1 = [(x - 3)^2 - 9] + 1$

En résultat : $x^2 - 6x + 1 = (x - 3)^2 - 8$ $\leftarrow$ Cette écriture est appelée forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$
Ici, $a = 1$, $\alpha = 3$ et $\beta = -8$.

Cette méthode de détermination de la forme canonique est la plus naturelle des trois méthodes mais elle requiert un minimum de maîtrise des identités remarquables et des écritures algébriques.

Méthode 2 (par identification)

Considérons à nouveau le trinôme du second degré $x^2 - 6x + 1$.
Sa forme canonique est l'expression $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Développons $a(x - \alpha)^2 + \beta$.

$$a(x - \alpha)^2 + \beta = a[x^2 - 2(x)(\alpha) + \alpha^2] + \beta = a[x^2 - 2\alpha\, x + \alpha^2] + \beta = ax^2 - 2a\alpha\, x + a\alpha^2 + \beta$$

Examinons l'expression obtenue.
$ax^2 - 2a\alpha\, x + a\alpha^2 + \beta$ est un trinôme du second degré de coefficients $(a, -2a\alpha, a\alpha^2 + \beta)$.
Ce trinôme est identique au trinôme $x^2 - 6x + 1$ de coefficients $(1, -6, 1)$.

Deux trinômes étant égaux quand leurs coefficients sont égaux, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a\alpha = -6 \\ a\alpha^2 + \beta = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2\alpha = 6 \\ \alpha^2 + \beta = 1 \end{cases}$$

D'où : a = 1, $\alpha = 3$ et $9 + \beta = 1$, c'est-à-dire $\beta = -8$.

Conclusion : la forme canonique de $x^2 - 6x + 1$ est $(x - 3)^2 - 8$.

Méthode 3 (réinvestissement des savoirs)

Considérons le trinôme du second degré $x^2 - 6x + 1$.

Sa forme canonique est l'expression $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ où a = 1, b = -6 et c = 1.

Déterminons α

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3.$

La forme canonique est donc : $(x - 3)^2 + \beta$

Déterminons β

Posons $A = x^2 - 6x + 1$ et $B = (x - 3)^2 + \beta$.
Pour x = 3, on a : $A = (3)^2 - 6(3) + 1 = 9 - 18 + 1 = -8$
$B = (3 - 3)^2 + \beta = \beta$

Or A = B pour tout réel x, donc : $\beta = -8$.

Conclusion : la forme canonique de $x^2 - 6x + 1$ est $(x - 3)^2 - 8$.