De la forme à la représentation...

La représentation graphique d'une fonction polynomiale f de degré 2 est une parabole d'équation y = f(x). Pour la tracer, un tableau de valeurs suffisamment renseigné peut parfaitement convenir. Toutefois, il peut s'avérer beaucoup plus fructueux et rapide de regarder les formes développée, canonique et factorisée (si cette dernière existe) de l'expression définissant la fonction. En effet, ces formes comportent des informations qui sont très précieuses.

1. Forme développée

La forme développée d'une fonction polynomiale de degré 2 s'écrit :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

les nombres a, b et c étant des nombres réels et a étant supposé non nul (dans le cas contraire, la fonction f serait une simple fonction affine).

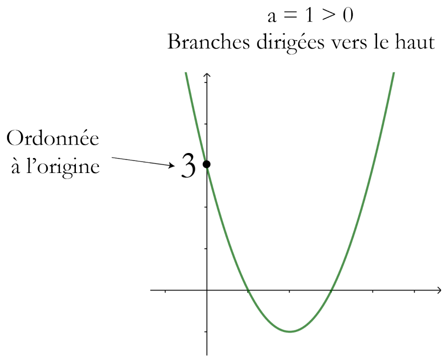
1.1. Point particulier

La forme dite développée de f(x) fournit immédiatement f(0) = c. Ceci signifie que le point de coordonnées (0 ; c) est un point de la parabole représentative de la fonction f. Il s'agit du point d'intersection de la parabole avec l'axe des ordonnées (Oy). On dit parfois que le nombre c est l'ordonnée à l'origine.

1.2. Courbure

Si $a > 0$, alors les deux branches de la parabole sont dirigées vers le haut. On dit que la parabole est convexe.
Si $a < 0$, alors les deux branches de la parabole sont dirigées vers le bas. On dit que la parabole est concave.

Exemple : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.



Le point de coordonnées (0 ; 3) est un point de la parabole.

De plus, a = 1 > 0, donc les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

En résumé, la forme développée $ax^2 + bx + c$ nous fournit deux informations :
– les coordonnées (0 ; c) d'un point particulier de la parabole, et
– l'orientation des branches de la parabole (suivant le signe du coefficient a).

2. Forme canonique

La forme canonique d'une fonction polynomiale de degré 2 s'écrit :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

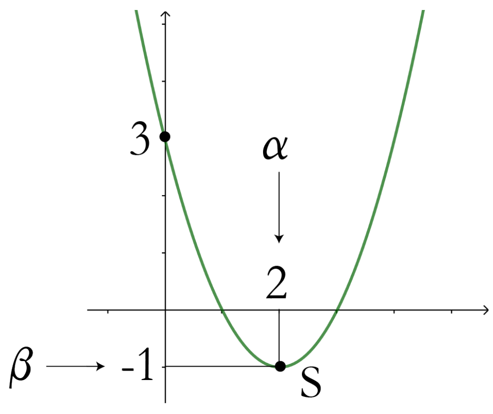
2.1. Coordonnées du sommet de la parabole

Cette forme canonique fait apparaître un couple de valeurs (α ; β), qui sont les coordonnées cartésiennes du sommet S de la parabole. Ces deux valeurs sont par conséquent très importantes pour le tracé de la parabole et de son axe de symétrie vertical, lequel passe par son sommet.

2.2. Extremum de la fonction

On dit que l'extremum de la fonction est β (il peut s'agir d'un minimum ou d'un maximum).
Cette valeur β est atteinte pour $x = \alpha$. On a : $f(\alpha) = \beta$.

Exemple : $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 – 1$.



Le sommet de la parabole a pour coordonnées (2 ; -1).

Lorsque $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 – 1$, le minimum de la fonction est -1. Ce minimum est atteint lorsque x = 2.

En résumé, la forme canonique nous fournit une information supplémentaire importante : les coordonnées (α ; β) du sommet de la parabole.

L’existence d’une forme factorisée et la nature de la factorisation sont suspendues au signe du discriminant Δ du trinôme.

3. Forme factorisée

3.1. Existence de 2 points d'intersection de la parabole et de l'axe (Ox)

Lorsque $\Delta > 0$, une fonction polynomiale de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, peut être factorisée sous la forme

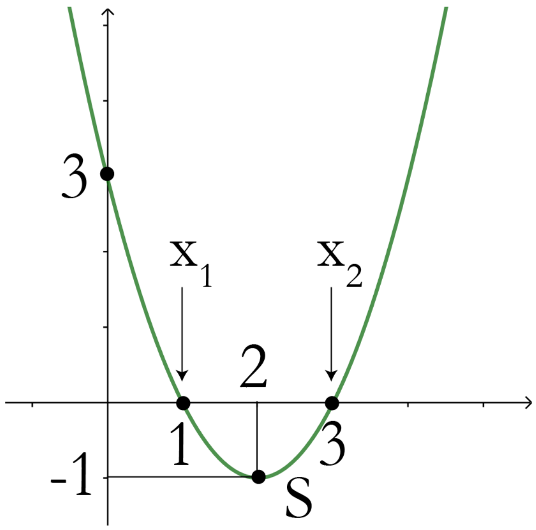
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes du trinôme.

Comme $f(x_1) = f(x_2) = 0$, les points de coordonnées $(x_1 ; 0)$ et $(x_2 ; 0)$ sont deux points de la parabole d’équation $y = f(x)$. Ces points sont en particulier les deux points d’intersection de la parabole avec l’axe des abscisses (Ox).

Exemple : $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Les nombres 1 et 3, qui sont les deux racines du trinôme $x^2 - 4x + 3$, sont les abscisses des deux points d'intersection de la parabole avec l'axe (Ox).



En résumé, la forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$ nous fournit deux nouvelles informations importantes : les coordonnées $(x_1 ; 0)$ et $(x_2 ; 0)$ des deux points d’intersection de la parabole avec l’axe des abscisses (Ox).

3.2. Existence d'un seul point d'intersection de la parabole et de l'axe (Ox)

Lorsque $\Delta = 0$, une fonction polynomiale de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, peut être factorisée sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

où x_0 est la racine double du trinôme.

La forme dite factorisée de f(x) nous fournit immédiatement les coordonnées $(x_0 ; 0)$ du seul point d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses (Ox), point qui est en particulier dans ce cas le sommet de la parabole.

En résumé, la forme factorisée $a(x - x_0)^2$ nous fournit une information importante : les coordonnées $(x_0 ; 0)$ de l'unique point d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses (Ox), point qui est le sommet S de la parabole.

4. Forme non factorisable

Lorsque le discriminant Δ du trinôme $ax^2 + bx + c$ est strictement négatif, l'expression définissant f(x) n'est pas factorisable.

La parabole ne coupe jamais l'axe des abscisses (Ox).

Si $a > 0$, alors la parabole est située entièrement au-dessus de l'axe des abscisses (Ox).

Si $a < 0$, alors la parabole est située entièrement au-dessous de l'axe des abscisses (Ox).

En résumé, l'absence de forme factorisée nous indique que la parabole se situe soit au-dessus de l'axe des abscisse (Ox), soit au-dessous, et ne coupe pas cet axe.