Exercice 1

1. Déterminons les racines éventuelles du trinôme $x^2 - x - 1$.
   Déterminons le discriminant Δdu trinôme.

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$.

   On a : $\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines distinctes :

   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

   $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2(1)}$

   $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. Déterminons les racines du trinôme $2x^2 + 3x - 9$ et factorisons ce trinôme.
   Déterminons le discriminant Δ.

   $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-9) = 9 + 8(9) \ = \ 9^2 > 0$.

   On a : $\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines distinctes :

   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

   $x_1 = \frac{-3-9}{2(2)}$

   $x_1 = \frac{-12}{4}$ et $x_2 = \frac{-3+9}{4}$

   $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{3}{2}$

   D'où : $2x^2 + 3x - 9 = 2(x+3)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ ← Forme factorisée.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions définies sur l'ensemble des réels par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ et par $g(x) = x^2 - 5$.
Ces fonctions sont représentées ci-dessous.

1. La courbe (C_2) représente la fonction f car son coefficient a est égal à -1, donc les branches de la parabole représentative de f sont dirigées vers le bas. (C_1) représente la fonction g.

2. Ces deux courbes sont des paraboles.

3. L'équation de la courbe (C_1) est $y = x^2 - 5$ et l'équation de la courbe (C_2) est $y = -x^2 + 4x + 1$.

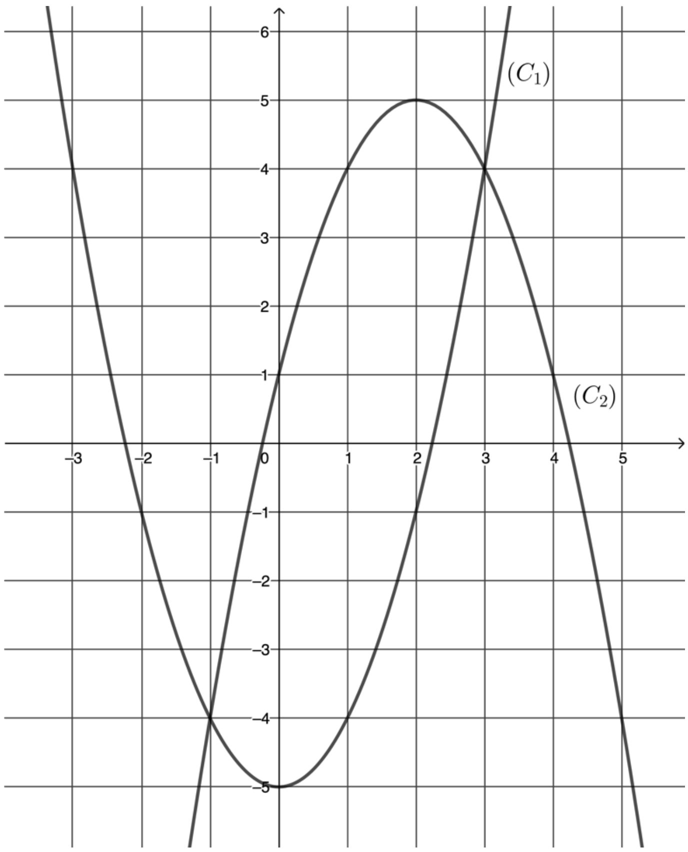
4. D'après le graphique, les solutions de l'équation f(x) = g(x) sont respectivement -1 et 3, abscisses des points d'intersection des deux paraboles.

5. Résolvons mathématiquement l'équation f(x) = g(x).

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 1 = x^2 - 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$

Ici, les deux racines étaient évidentes à trouver. Sinon, il fallait utiliser la méthode du discriminant.



Exercice 3

Un particulier produit et vend des bouteilles d'huile d'olive artisanale. Le coût de fabrication de x bouteilles (en €) est donné par l'expression : $C(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}6x + 8{,}16$. Chaque bouteille étant vendue 8 €, la recette est donnée par $R(x) = 8x$.

1. Le bénéfice $B(x)$ réalisé pour la vente de x bouteilles est : $B(x) = R(x) - C(x)$.

D'où : $B(x) = 8x - (0{,}5x^2 + 0{,}6x + 8{,}16) = -0{,}5x^2 + 7{,}4x - 8{,}16$

2. Calculons le discriminant du trinôme $B(x)$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (7{,}4)^2 - 4(-0{,}5)(-8{,}16) = 54{,}76 - 16{,}32 = 38{,}44 = 6{,}2^2 > 0$

3. Déterminons les 2 racines distinctes du trinôme.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-7{,}4-6{,}2}{2(-0{,}5)} \quad\quad x_2 = \frac{-7{,}4+6{,}2}{2(-0{,}5)}$$

$$x_1 = 13{,}6 \quad \text{et} \quad x_2 = 1{,}2$$

4. Factorisons le trinôme.

$B(x) = -0{,}5x^2 + 7{,}4x - 8{,}16 = -0{,}5(x - 1{,}2)(x - 13{,}6)$

5. Quand le particulier peut-il espérer un bénéfice avec la vente de ses bouteilles ?

Le signe du trinôme est de -a entre les racines, donc B(x) ≥ 0 pour $x \in [1{,}2; 13{,}6]$.

Le particulier peut espérer un bénéfice s'il produit entre 2 et 13 bouteilles d'huiles d'olive.