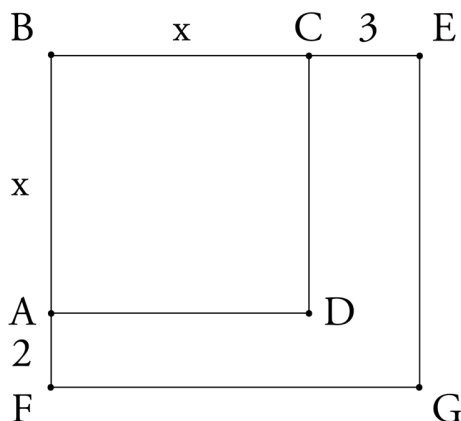


### Problème d'aires de carré et rectangle

On considère un carré ABCD tel que  $AB = x$ . On prolonge le côté [BC] de 3 unités et le côté [BA] de 2 unités, comme l'indique de dessin ci-dessous.

Il est demandé de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de  $x$  l'aire  $A_{BEGF}$  du rectangle BEGF est le double de l'aire  $A_{ABCD}$  du carré ABCD.



D'après la figure et l'énoncé, on a :  $A_{ABCD} = x^2$  et  $A_{BEGF} = (x + 2)(x + 3)$ .

Déterminons  $x$  pour que l'on ait :  $A_{BEGF} = 2 \times A_{ABCD}$ .

$$A_{BEGF} = 2 \times A_{ABCD} \Leftrightarrow (x + 2)(x + 3) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 2x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

Déterminons si le trinôme  $x^2 - 5x - 6$  possède des racines.

Calculons le discriminant  $\Delta$  du trinôme.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$$

Le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\text{D'où : } x_1 = \frac{5-7}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{5+7}{2} = 6$$

Comme  $x = AB$  où  $AB$  est une distance, la racine négative n'est pas solution du problème.

Autrement dit, lorsque  $AB = 6$ , l'aire  $A_{BEGF}$  du rectangle BEGF est le double de l'aire  $A_{ABCD}$  du carré ABCD.

$$\text{On a : } A_{ABCD} = 6^2 = 36 \text{ et } A_{BEGF} = (8)(9) = 72.$$

Étudions la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 5x - 6$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .

La parabole  $(P_f)$  représentative de la fonction  $f$  passe par le point de coordonnées  $(0 ; -6)$  car  $c = -6$  et a ses deux branches qui sont dirigées vers le haut car  $a = 1 > 0$ .

Déterminons la forme canonique de la fonction  $f$ .

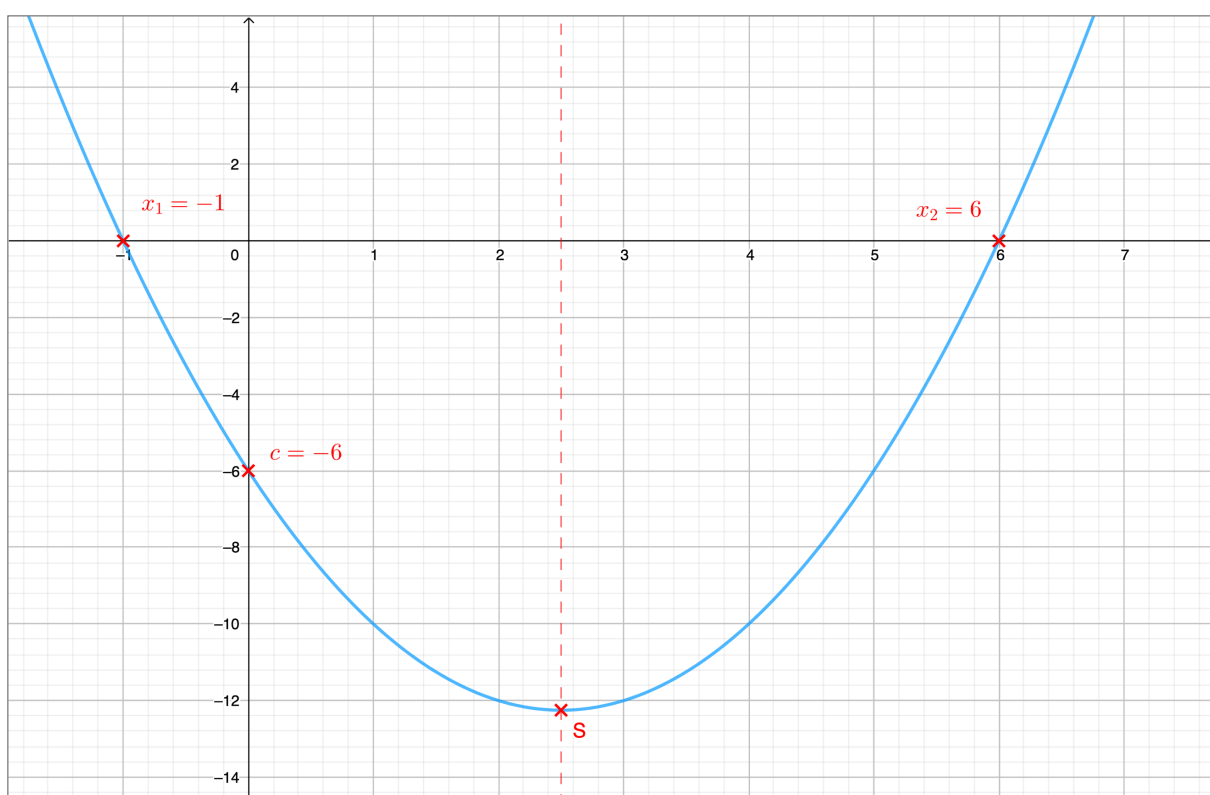
$$f(x) = x^2 - 5x - 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Donc le sommet  $S$  de la parabole ( $P_f$ ) a pour coordonnées  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{49}{4}\right)$ .

D'après ce qui précède, attendu les valeurs des racines du trinôme, la fonction  $f$  se factorise sous la forme :

$$f(x) = (x - (-1))(x - 6) = (x + 1)(x - 6).$$

Représentation de la parabole ( $P_f$ ).



Cette parabole est la courbe d'équation  $y = f(x)$ .

Tous les points de la parabole ont une ordonnée qui est l'image de leur abscisse par la fonction  $f$ .