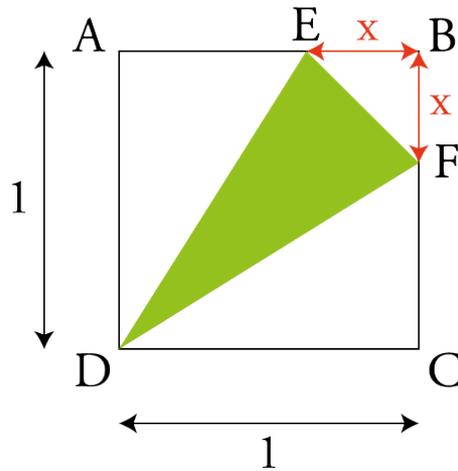


## exercice 2

On considère la figure sur laquelle  $EB = BF = x$  avec  $E \in [AB]$  et  $F \in [BC]$ .



1. La variable  $x$  représente une longueur, donc  $x \geq 0$ .

De plus, on a :  $EB \leq AB$ , donc  $x \leq 1$ . D'où :  $0 \leq x \leq 1$ .

On dit que  $x$  appartient à l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On écrit :  $x \in [0 ; 1]$ .

2. Déterminons les aires des triangles  $EBF$ ,  $FCD$  et  $AED$ .

$$\text{On a : } A_{EBF} = \frac{EB \times BF}{2} = \frac{x \times x}{2} = \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{De plus : } A_{FCD} = \frac{CD \times CF}{2} = \frac{1 \times (1-x)}{2} = \frac{1-x}{2}$$

$$\text{Enfin : } A_{AED} = \frac{AE \times AD}{2} = \frac{1 \times (1-x)}{2} = \frac{1-x}{2}$$

Soit  $A$  l'aire de la région non colorée en vert à l'intérieur du carré  $ABCD$ .

$$\text{On a : } A = A_{EBF} + A_{FCD} + A_{AED} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-x}{2} + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2}x^2 + 1 - x.$$

3. Déterminons l'aire  $A_{EFD}$  du triangle  $EFD$ .

$$A_{EFD} = A_{ABCD} - A = 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - x\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 + x = -\frac{1}{2}x^2 + x.$$

Autrement dit :  $A_{EFD} = f(x)$  avec  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$  où  $f$  est une fonction

polynomiale de degré 2 car  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = 1$  et  $c = 0$ .

4. Montrons que  $f(x) = -\frac{1}{2}(x - \alpha)^2 + \beta$  où l'on précisera les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

On sait que  $f(0) = 0$ . Donc :  $-\frac{1}{2}(0 - \alpha)^2 + \beta = 0$

C'est-à-dire :  $-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta = 0$

De plus, on sait que  $f(2) = 0$ . Donc :  $-\frac{1}{2}(2 - \alpha)^2 + \beta = 0$

Donc :  $-\frac{1}{2}(4 - 4\alpha + \alpha^2) + \beta = 0$

D'où :  $-2 + 2\alpha \underbrace{-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta}_0 = 0$ . Ainsi :  $-2 + 2\alpha = 0$ . Par conséquent :  $2 = 2\alpha$ .

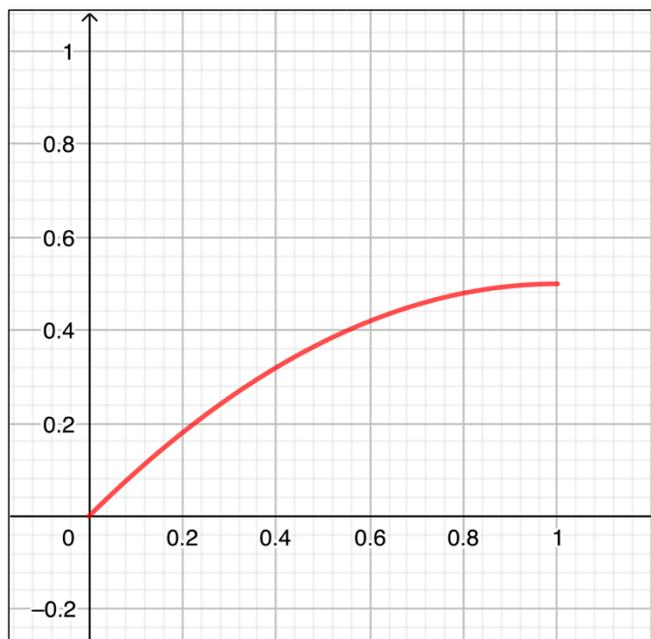
En résultat :  $\alpha = 1$

Or :  $-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta = 0$ , donc :  $-\frac{1}{2}(1)^2 + \beta = 0$ , d'où  $-\frac{1}{2} + \beta = 0$ .

En résultat :  $\beta = \frac{1}{2}$

Conclusion :  $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$ . Cette expression est la forme canonique qui définit  $f$ . Les coordonnées du sommet  $S$  de la parabole qui représente la fonction  $f$  polynomiale de degré 2 sont  $(\alpha; \beta)$ , c'est-à-dire  $(1; \frac{1}{2})$ .

Représentation graphique de la fonction  $f$



5. L'aire du triangle EFD est maximale pour  $x = 1$ . Elle est égale à 0,5.