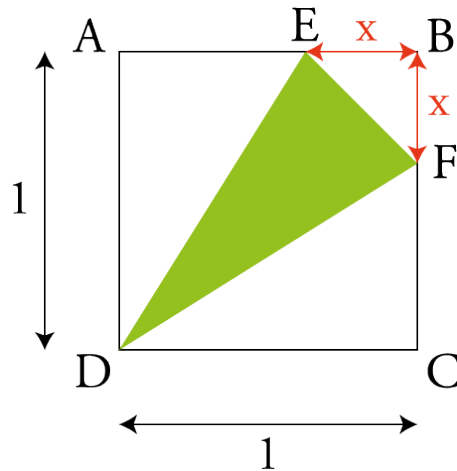


exercice 2

On considère la figure sur laquelle $EB = BF = x$ avec $E \in [AB]$ et $F \in [BC]$.



1. La variable x représente une longueur, donc $x \geq 0$.

De plus, on a : $EB \leq AB$, donc $x \leq 1$. D'où : $0 \leq x \leq 1$.

On dit que x appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$. On écrit : $x \in [0 ; 1]$.

2. Déterminons les aires des triangles EBF , FCD et AED .

$$\text{On a : } A_{EBF} = \frac{EB \times BF}{2} = \frac{x \times x}{2} = \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{De plus : } A_{FCD} = \frac{CD \times CF}{2} = \frac{1 \times (1-x)}{2} = \frac{1-x}{2}$$

$$\text{Enfin : } A_{AED} = \frac{AE \times AD}{2} = \frac{1 \times (1-x)}{2} = \frac{1-x}{2}$$

Soit A l'aire de la région non colorée en vert à l'intérieur du carré $ABCD$.

$$\text{On a : } A = A_{EBF} + A_{FCD} + A_{AED} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-x}{2} + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2}x^2 + 1 - x.$$

3. Déterminons l'aire A_{EFD} du triangle EFD .

$$A_{EFD} = A_{ABCD} - A = 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - x\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 + x = -\frac{1}{2}x^2 + x.$$

Autrement dit : $A_{EFD} = f(x)$ avec $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ où f est une fonction

polynomiale de degré 2 car $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = 0$.

4. Montrons que $f(x) = -\frac{1}{2}(x - \alpha)^2 + \beta$ où l'on précisera les valeurs de α et β .

On sait que $f(0) = 0$. Donc : $-\frac{1}{2}(0 - \alpha)^2 + \beta = 0$

C'est-à-dire : $-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta = 0$

De plus, on sait que $f(2) = 0$. Donc : $-\frac{1}{2}(2 - \alpha)^2 + \beta = 0$

Donc : $-\frac{1}{2}(4 - 4\alpha + \alpha^2) + \beta = 0$

D'où : $-2 + 2\alpha \underbrace{-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta}_0 = 0$. Ainsi : $-2 + 2\alpha = 0$. Par conséquent : $2 = 2\alpha$.

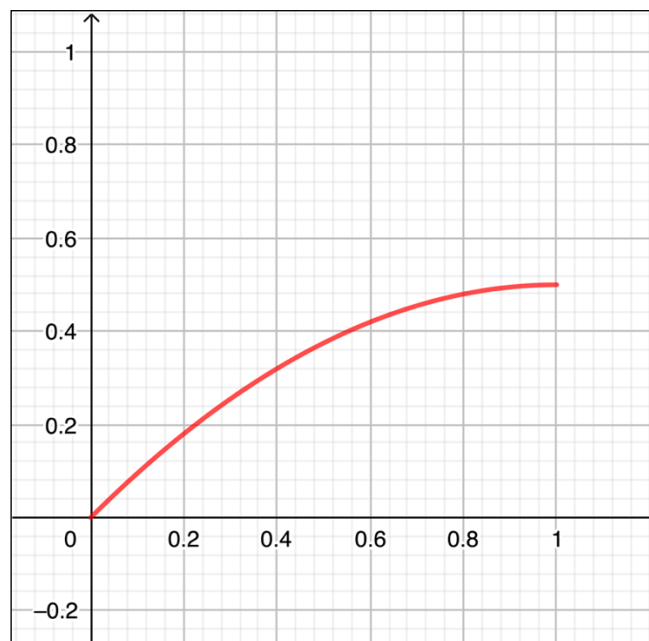
En résultat : $\alpha = 1$

Or : $-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta = 0$, donc : $-\frac{1}{2}(1)^2 + \beta = 0$, d'où $-\frac{1}{2} + \beta = 0$.

En résultat : $\beta = \frac{1}{2}$

Conclusion : $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}$. Cette expression est la forme canonique qui définit f . Les coordonnées du sommet S de la parabole qui représente la fonction f polynomiale de degré 2 sont $(\alpha; \beta)$, c'est-à-dire $(1; \frac{1}{2})$.

Représentation graphique de la fonction f



5. L'aire du triangle EFD est maximale pour $x = 1$. Elle est égale à 0,5.