exercices techniques sur les trinômes

Exercice 10

On note $A(x)$ le trinôme du second degré qui vérifie les trois relations : $A(0) = 6$

$A(1) = 2$

$A(2) = 0$

1. Déterminons l'expression développée du trinôme $A(x)$.

   Posons $A(x) = ax^2 + bx + c$.

   On a : $A(0) = 6$, donc : $a(0)^2 + b(0) + c = 6$, d'où : $c = 6$

   De plus : $A(1) = 2$, donc : $a(1)^2 + b(1) + 6 = 2$, d'où : $a + b = -4$.

   Enfin : $A(2) = 0$, donc : $a(2)^2 + b(2) + 6 = 0$, d'où : $4a + 2b = -6$.

   En divisant par 2 les membres de gauche et de droite de l'égalité $4a + 2b = -6$, on obtient : $2a + b = -3$

   Pour déterminer a et b, il suffit par conséquent de résoudre le système de 2 équations linéaires à 2 inconnues :

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 2a + b = -3 \end{cases}$$

   Or :

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ a = -3 - (-4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 - a = -4 - 1 = -5 \\ a = 1 \end{cases}$$

   Conclusion

   On a : $A(x) = x^2 - 5x + 6$

2. Déterminons l'expression factorisée de $A(x)$.

   Calculons le discriminant Δ de A(x).

   $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0$

   Le trinôme admet deux racines :

   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$ et $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+1}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$.

3. Déterminons l'expression canonique de $A(x)$.

   $A(x) = x^2 - 5x + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$