exercices techniques sur les trinômes

Exercice 1

Développons les expressions : $2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ et $-3(x-1)(x-2)$.

On a : $2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2\left[(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left[x^2-3x+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right] = 2\left[x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right]$

Donc : $2(x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2x^2-5x-3$

On a : $-3(x-1)(x-2) = -3[(x-1)(x-2)] = -3[x^2-x-2x+2]$

Donc : $-3(x-1)(x-2) = -3[x^2-3x+2] = -3x^2+9x-6$

Exercice 2

Factorisons à l'aide des identités remarquables les expressions : x^2-4x+4

$9x^2+6x+1$

$4x^2-9$

$x^2-4x+4 = x^2-2(x)(2)+2^2 = (x-2)^2$

$9x^2+6x+1 = (3x)^2+2(3x)(1)+1^2 = (3x+1)^2$

$4x^2-9 = (2x)^2-3^2 = (2x-3)(2x+3)$

Exercice 3

Déterminons dans chaque cas la forme canonique : $x^2-12x+1$

$x^2+x-\frac{3}{2}$

$3x^2+18x-1$

$2x^2-3x+5$

On a : $x^2-12x+1 = (x-6)^2-36+1 = (x-6)^2-35$

De plus : $x^2+x-\frac{3}{2} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{3}{2} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$

On a : $3x^2+18x-1=3\left(x^2+6x-\frac{1}{3}\right)=3\left((x+3)^2-9-\frac{1}{3}\right)=3\left((x+3)^2-\frac{28}{3}\right)$

Donc : $3x^2+18x-1=3(x+3)^2-28$

Enfin : $2x^2-3x+5=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right)$

Donc : $2x^2-3x+5=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}$

Exercice 4

Montrons que : $3x^2-12x+17=3(x-2)^2+5$

$-4x^2+4x+3=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4$

On a : $3(x-2)^2+5=3(x^2-4x+4)+5=3x^2-12x+12+5=3x^2-12x+17$

Et : $-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4=-4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+4=-4x^2+4x-1+4=-4x^2+4x+3$

Exercice 5

Déterminons si les trinômes ont des racines :

Trinôme	Discriminant $\Delta= b^2-4ac$	Racines
$2x^2-3x+4$	$(-3)^2-4(2)(4)=9-32=-23<0$	Aucune
$-2x^2+5x+1$	$(5)^2-4(-2)(1)=25+8=33>0$	2
$3x^2-5x-2$	$(-5)^2-4(3)(-2)=25+24=49>0$	2
$-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}$	$\left(-\frac{5}{6}\right)^2-4\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{25}{36}+\frac{4}{18}=\frac{33}{36}>0$	2
$\frac{2}{5}x^2-x+3$	$(-1)^2-4\left(\frac{2}{5}\right)(3)=1-\frac{24}{5}=-\frac{19}{5}<0$	Aucune
x^2-6x+9	$(-6)^2-4(1)(9)=36-36=0$	1

Exercice 6

On souhaite déterminer les racines du trinôme $2x^2 - 4x - 16$. On admet que celles-ci sont au nombre de deux.

Méthode 1

1. Déterminons la forme canonique du trinôme $2x^2 - 4x - 16$.

   $2x^2 - 4x - 16 = 2(x^2 - 2x - 8) = 2((x-1)^2 - 1 - 8) = 2((x-1)^2 - 9)$

   Donc : $2x^2 - 4x - 16 = 2(x-1)^2 - 18$

2. Factorisons la forme canonique.

   $2(x-1)^2 - 18 = 2[(x-1)^2 - 9] = 2[(x-1)^2 - (3)^2]$

   $= 2(x-1-3)(x-1+3) = 2(x-4)(x+2)$

3. Les deux racines x_1 et x_2 sont : 2 et 4.

Méthode 2

1. Calculons le discriminant Δ du trinôme $2x^2 - 4x - 16$.

   $\Delta = (-4)^2 - 4(2)(-16) = 16 + 8 \times 16 = 9 \times 16 = 3^2 \times 4^2 = 12^2 > 0$

2. Les deux racines x_1 et x_2 du trinôme sont :

   $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-12}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$ et $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+12}{2(2)} = \frac{16}{4} = 4$.

3. Factorisons le trinôme $2x^2 - 4x - 16$.

   $2x^2 - 4x - 16 = 2(x-2)(x-4)$

Exercice 7

On souhaite déterminer les racines du trinôme $-x^2 + 5x - 4$. On admet que celles-ci sont au nombre de deux.

Méthode 1

1. Déterminons la forme canonique du trinôme $-x^2 + 5x - 4$.

   $-x^2 + 5x - 4 = -(x^2 - 5x + 4) = -\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 4\right) = -\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right)$

   Donc : $-x^2 + 5x - 4 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$

2. Factorisons la forme canonique $-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

$-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}=-\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right)=-\left(\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=-\left(x-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)\quad=-\left(x-\frac{8}{2}\right)\left(x-\frac{2}{2}\right)=-(x-4)(x-1)$

3. Les deux racines x_1 et x_2 sont : 1 et 4.

Méthode 2

1. Calculons le discriminant Δ du trinôme $-x^2+5x-4$.

$\Delta=(5)^2-4(-1)(-4)=25-16=9=3^2>0$

2. Les deux racines x_1 et x_2 du trinôme sont :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-3}{2(-1)}=\frac{-8}{-2}=4$ et $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+3}{-2}=\frac{-2}{-2}=1.$

3. Factorisons le trinôme $-x^2+5x-4$.

$-x^2+5x-4=-(x-1)(x-4)$

Exercice 8

On souhaite étudier le trinôme $4x^2-12x+9$.

Méthode 1

1. Déterminons la forme canonique du trinôme.

$$4x^2-12x+9=4\left[x^2-3x+\frac{9}{4}\right]=4\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right]=4\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right]=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

2. La forme canonique est aussi une forme factorisée.

3. Le trinôme possède une racine double.

Méthode 2

1. Calculons le discriminant Δ du trinôme $4x^2-12x+9$.

$\Delta=(-12)^2-4(4)(9)=12^2-12^2=0.$

2. Le trinôme admet une racine double : $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

3. Le trinôme peut être factorisé. On a : $4x^2 - 12x + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

Exercice 9

On souhaite étudier le trinôme $-3x^2 - x - 4$.

Méthode 1

1. Déterminons la forme canonique du trinôme.

$-3x^2 - x - 4 = -3\left[x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right] = -3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{4}{3}\right] = 3\left[\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{47}{36}\right]$

$= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{47}{12}$

2. La forme canonique ne peut pas être factorisée.

3. Le trinôme ne peut être annulé car $3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{47}{12} > 0$.

Méthode 2

1. Calculer le discriminant Δ du trinôme.

$\Delta = (-1)^2 - 4(-3)(-4) = 1 - 48 = -47 < 0$.

2. Le trinôme n'admet aucune racine.

3. Le trinôme ne peut pas être factorisé.
