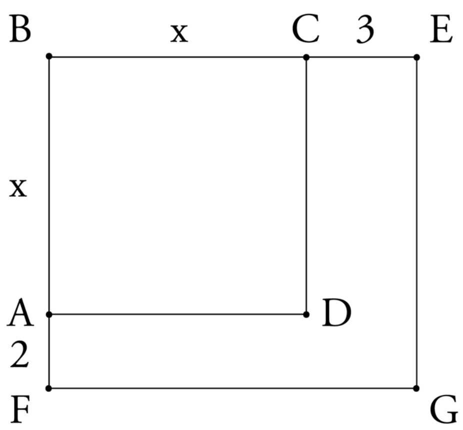
Problème d'aires de carré et rectangle

On considère un carré ABCD tel que AB = x. On prolonge le côté [BC] de 3 unités et le côté [BA] de 2 unités, comme l'indique de dessin ci-dessous.

Il est demandé de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire A_{BEGF} du rectangle BEGF est le double de l'aire A_{ABCD} du carré ABCD.



D'après la figure et l'énoncé, on a : $A_{ABCD} = x^2$ et $A_{BEGF} = (x+2)(x+3)$.

Déterminons x pour que l'on ait : $A_{BEGF} = 2 \times A_{ABCD}$.

$A_{BEGF} = 2 \times A_{ABCD} \Leftrightarrow (x+2)(x+3) = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$

Déterminons si le trinôme $x^2 - 5x - 6$ possède des racines.

Calculons le discriminant Δ du trinôme.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-6) = 25 + 24 = 49 = 7^2 > 0$

Le trinôme admet deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

D'où : $x_1 = \frac{5-7}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{5+7}{2} = 6$

Comme x = AB où AB est une distance, la racine négative n'est pas solution du problème.

Autrement dit, lorsque AB = 6, l'aire A_{BEGF} du rectangle BEGF est le double de l'aire A_{ABCD} du carré ABCD.

On a : $A_{ABCD} = 6^2 = 36$ et $A_{BEGF} = (8)(9) = 72$.

Étudions la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 5x - 6$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La parabole (P_f) représentative de la fonction f passe par le point de coordonnées (0 ; -6) car c = - 6 et a ses deux branches qui sont dirigées vers le haut car a = 1 > 0.

Déterminons la forme canonique de la fonction f.

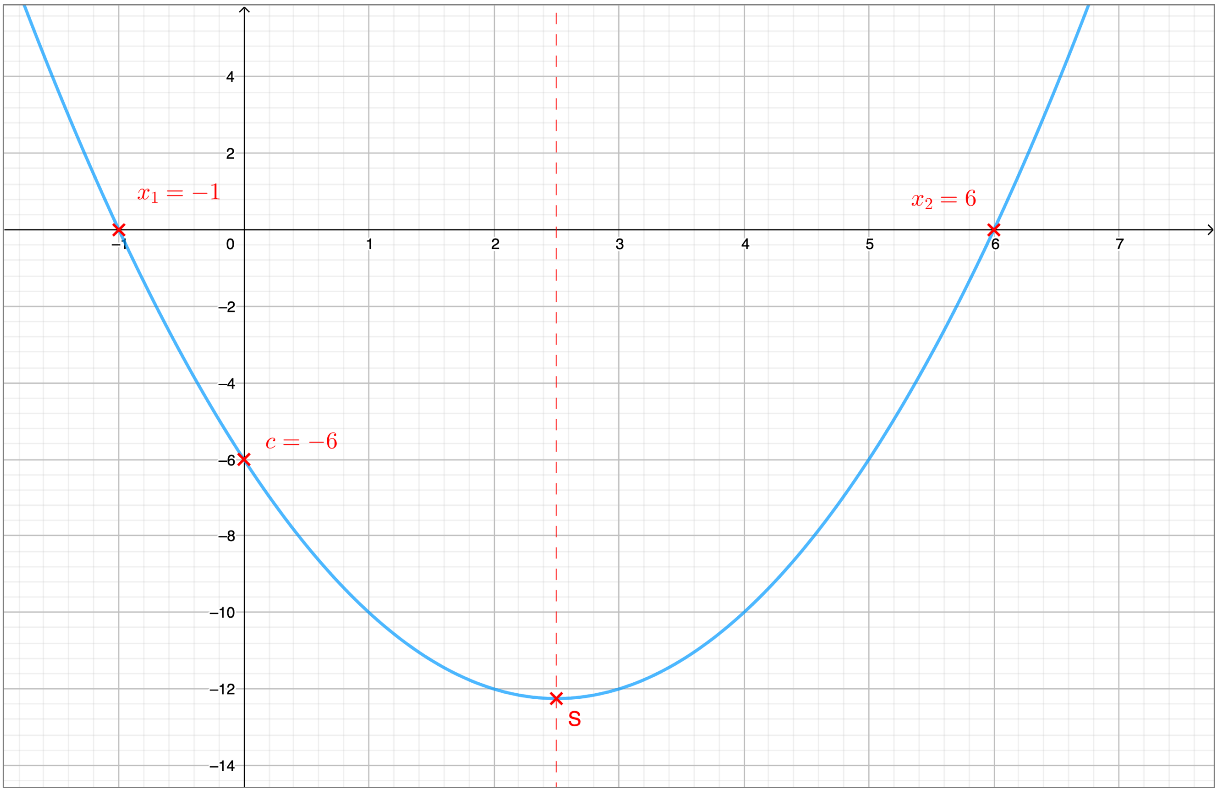
$$f(x) = x^2 - 5x - 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

Donc le sommet S de la parabole (P_f) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}; -\frac{49}{4}\right)$.

D'après ce qui précède, attendu les valeurs des racines du trinôme, la fonction f se factorise sous la forme :

$$f(x) = (x - (-1))(x - 6) = (x + 1)(x - 6).$$

Représentation de la parabole (P_f).



Cette parabole est la courbe d'équation y = f(x).

Tous les points de la parabole ont une ordonnée qui est l'image de leur abscisse par la fonction f.