Bilan sur les trinômes du second degré

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + 20x - 42$.

1.(a) Résolvons $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 20x - 42 = 0 \Leftrightarrow -2(x^2 - 10x + 21) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0$

Déterminons les racines du trinôme $x^2 - 10x + 21$.

Calculons Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(21) = 100 - 84 = 16 = 4^2 > 0$.

Le trinôme admet les deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-4}{2} = \frac{6}{2} = 3$ et $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10+4}{2} = \frac{14}{2} = 7$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 3 et 7.

1.(b) Factorisons $f(x)$.

On a trivialement $f(x) = -2(x-3)(x-7)$.

2.(a) Tableau de signe de f(x).

Cours : Le signe du trinôme est le signe de -a entre les racines, c'est-à-dire que le trinôme $-2x^2 + 20x - 42$ est positif entre 3 et 7.

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
Signe de f(x)		-	0	+	0	-	

2.(b) Résolvons $f(x) \leq 0$.

D'après le tableau de signe, l'ensemble des solutions de l'inéquation ci-dessus est :

$$]-\infty; 3] \cup [7; +\infty[$$

2.(c) Résolvons $f(x) > 0$.

D'après le tableau de signe, l'ensemble des solutions de l'inéquation ci-dessus est l'intervalle $]3; 7[$.

3.(a) Déterminons la forme canonique de f(x).

$f(x) = -2(x^2 - 10x + 21) = -2[(x-5)^2 - 25 + 21] = -2[(x-5)^2 - 4]$

Donc : $f(x) = -2(x-5)^2 + 8$.

3.(b) D'après la forme canonique ci-dessus, la valeur du maximum de la fonction est 8. Ce maximum est atteint pour x = 5.

En effet : $f(x) = -2(x-5)^2 + 8 \leq 8$ pour tout réel x car $-2(x-5)^2 \leq 0$.

Donc 8 est le maximum de f. Or $f(5) = 8$. le maximum est atteint pour x = 5.