Trinômes et racines évidentes

Lorsque nous sommes confrontés à la résolution d'une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ou à l'étude du signe d'un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$, nous pouvons être amenés à devoir déterminer les racines du trinôme. Néanmoins, avant de mettre en œuvre une méthode de détermination comme la méthode du discriminant, il peut s'avérer utile d'examiner le trinôme proposé afin de déterminer si ce dernier ne possèderait pas éventuellement des racines évidentes.

Quel que soit le trinôme considéré (a étant supposé non nul), nous avons :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x^2 - sx + p)$$

Ainsi, les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$ sont les mêmes que celles du trinôme $x^2 - sx + p$.

Soient x_1 et x_2 les racines de $x^2 - sx + p$, nous pouvons écrire :

$$x^2 - sx + p = (x - x_1)(x - x_2).$$

Par identification des formes développées de ces deux trinômes, on montre que :

$$s = x_1 + x_2 \quad \text{(s pour somme)}$$
$$p = x_1 x_2 \quad \text{(p pour produit)}$$

Autrement dit, en identifiant notre trinôme à un trinôme de la forme $x^2 - sx + p$, nous savons que la somme des racines recherchées est s et que leur produit est p. Cette particularité peut s'avérer utile dans la recherche des racines évidentes d'un trinôme de degré 2.

Exemple 1

Déterminons les racines du trinôme $x^2 - 3x + 2$.
Cette écriture est de la forme $x^2 - sx + p$ avec $s = 3$ et $p = 2$.
Quels sont les nombres évidents dont la somme est 3 et le produit 2 ?
Il est évident qu'il s'agit des nombres 1 et 2, d'où l'obtention immédiate des racines et la factorisation résultante :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Exemple 2

Déterminons les racines du trinôme $2x^2 - 2x - 12$.
On a : $2x^2 - 2x - 12 = 2(x^2 - x - 6)$.
L'écriture $x^2 - x - 6$ est de la forme $x^2 - sx + p$ avec $s = 1$ et $p = -6$.

Quels sont les nombres évidents dont la somme est 1 et le produit -6 ?

- -6 = -1 × 6 mais -1 + 6 = 5 ≠ 1,
- -6 = 1 × (-6) mais -1 + 6 = -5 ≠ 1,
- -6 = -2 × 3 et -2 + 3 = 1.

La somme des nombres -2 et 3 est égale à 1 et leur produit est égal à -6. Nous avons déterminé deux racines évidentes sans recourir à la méthode du discriminant.

D'où l'obtention immédiate de la factorisation intermédiaire :

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Puis le résultat final : $2x^2 - 2x - 12 = 2(x - 3)(x + 2)$.