12 Variables aléatoires

Découvrir

1 Définir une variable aléatoire

1 **a)**

1re pièce	2e pièce	Issues	Valeurs de X
P	P	PP	2
	F	PF	1
F	P	FP	1
	F	FF	0

b) X prend les valeurs 0, 1 et 2.

2

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2 Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

1 **a)** G peut prendre les valeurs 1 000, 1 250 et 1 500.

b)

a	1 000	1 250	1 500
$P(G = a)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

2 **a)** $E(G) = \frac{3}{5} \times 1\,000 + \frac{1}{5} \times 1\,250 + \frac{1}{5} \times 1\,500$

c'est-à-dire $E(G) = 1\,150$.

b) $E(G)$ est exprimée en euros.

c) Un candidat ne peut pas gagner la somme $E(G)$, car les seuls gains possibles sont 1 000 €, 1 250 € et 1 500 €.

d) La candidate peut espérer gagner en moyenne 1 150 € par jour, soit un total de 115 000 € en 100 jours.

Acquérir des automatismes

3 Le dé est équilibré donc on modélise cette expérience aléatoire par une loi équirépartie.

Les valeurs prises par X sont 0, 2, 10 et 20.

Voici la loi de probabilité de X :

a	0	2	10	20
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

4 Les valeurs prises par X sont 2, 5, 10 et 50.

Voici la loi de probabilité de X :

a	2	5	10	50
$P(X = a)$	$\frac{25}{41}$	$\frac{10}{41}$	$\frac{5}{41}$	$\frac{1}{41}$

5 On utilise la loi de probabilité de X, qui a été déterminée à l'exercice **3**.

a) $P(X < 10) = P(X = 0) + P(X = 2)$

donc $P(X < 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

b) $P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 10) + P(X = 20)$

donc $P(X \geqslant 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

c) $P(X > 5) = P(X = 10) + P(X = 20)$

donc $P(X > 5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

d) $P(X \leqslant 10) = P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 10)$

donc $P(X \leqslant 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

6 On utilise la loi de probabilité de X, qui a été déterminée à l'exercice 4.

a) $P(X < 10) = P(X = 2) + P(X = 5)$

donc $P(X < 10) = \frac{25}{41} + \frac{10}{41} = \frac{35}{41}$.

b) $P(X \leqslant 5) = P(X = 2) + P(X = 5)$

donc $P(X \leqslant 5) = \frac{25}{41} + \frac{10}{41} = \frac{35}{41}$.

c) $P(X \leqslant 6) = P(X = 2) + P(X = 5)$

donc $P(X \leqslant 6) = \frac{35}{41}$.

d) $P(X > 2) = P(X = 10) + P(X = 50)$

donc $P(X > 2) = \frac{5}{41} + \frac{1}{41} = \frac{6}{41}$.

9 On peut représenter la situation par un arbre :

1er jeton	2e jeton	Valeurs de X
1	5	6
	10	11
2	5	7
	10	12

On peut alors établir la loi de probabilité de X :

a	6	7	11	12
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = \frac{1}{4} \times 6 + \frac{1}{4} \times 7 + \frac{1}{4} \times 11 + \frac{1}{4} \times 12 = \frac{36}{4} = 9.$$

10 **a)** L'espérance de X est :

$E(X) = 0{,}2 \times 10 + 0{,}3 \times 20 + 0{,}4 \times 40 + 0{,}1 \times 50 = 29.$

b) Pour calculer la variance de X, on complète le tableau ci-dessous.

a	10	20	40	50
$a - 29$	-19	-9	11	21
$(a - 29)^2$	361	81	121	441
$P(X = a)$	0,2	0,2	0,4	0,1

La variance de X est donc :

$V(X) = 0{,}2 \times 361 + 0{,}3 \times 81 + 0{,}4 \times 121 + 0{,}1 \times 441 = 189.$

L'écart-type de X est donc $\sigma(X) = \sqrt{189}$,

soit $\sigma(X) \simeq 13{,}7$.

c) On vérifie ces résultats à l'aide de la calculatrice.

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	10
Maximum	50
Etendue	40
Moyenne	29
Ecart type	13.74773
Variance	189
Premier quartile	20

11 X peut prendre les valeurs : 0,5 ; 2 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3. L'affirmation d'Alicia est donc fausse.

12 On peut représenter la situation par un arbre :

1er jeton	2e jeton	Valeurs de X
1	1	2
	2	3
2	1	3
	2	4

Olmo a donc tort, X peut prendre les valeurs 2, 3 et 4.

13 $\{X = 2\}$

14 L'événement $\{X = 2\}$ signifie que le chiffre des dizaines de la date du jour est 2. Il est réalisé pour tous les jours du 20 au 29. La réponse d'Alyah est donc fausse.

15 **a)** $\{X = 1\}$ **b)** $\{X \geqslant 2\}$

16 **a)** $\{X = 1\}$ **b)** $\{X \leqslant 1{,}50\}$

17 **a)** « On obtient le numéro 6 deux fois. »
b) « On obtient le numéro 6 cinq fois. »
c) « On obtient le numéro 6 une fois ou moins. »
d) « On obtient le numéro 6 strictement plus de trois fois. »

18 **a)** « Exactement un billet sort de l'appareil. »
b) « Exactement trois billets sortent de l'appareil. »
c) « Strictement moins de trois billets sortent de l'appareil. »
d) « Deux billets ou plus sortent de l'appareil. »

19 Voici la loi de probabilité de X :

a	-2	10
$P(X = a)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

20 **a)** Les valeurs prises par G sont : 98, 48, 8 et -2.

b) Il y a 111 billets gagnants, donc 889 billets perdants. Par conséquent, $P(G = -12) = \frac{889}{1\,000} = 0{,}889$.

c) Voici la loi de probabilité de G :

a	-2	8	48	98
$P(X = a)$	0,889	0,1	0,01	0,001

21 **a)**

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4	5	6	8
$P(X = a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

a	9	10	12	15	16	18	20
$P(X = a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$

a	24	25	30	36
$P(X = a)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

22 **a)** On peut représenter la situation par un arbre :

1er jeton — **2^{e} jeton** — **Valeurs de X**

0 — 2 — 0
0 — 1 — -1
1 — 0 — 1
1 — 1 — 0

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	-1	0	1
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

23 **a)** X prend les valeurs 0, 1 et 4.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	4
$P(X = a)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

24 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	1	5	10
$P(X = a)$	$\frac{19}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{1}{32}$

b) $P(X \leqslant 5) = P(X = 1) + P(X = 5) = \frac{19}{32} + \frac{12}{32} = \frac{31}{32}$

La probabilité de gagner 5 points ou moins est égale à $\frac{31}{32}$.

25 **a)** On peut utiliser un arbre pour déterminer les 4 chemins possibles.

1 — 1 — 2 — 1……… X = 5
1……… X = 4
1 — 1 — 1 — 1……… X = 5
1 — 3 — 1……… X = 5

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	4	5
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

26 **1re case** — **2^{e} case** — **3^{e} case**

R — V — B……… X = 3
R — B — V……… X = 1
V — R — B……… X = 1
V — B — R……… X = 0
B — R — V……… X = 0
B — V — R……… X = 1

a) Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 3.

b) La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau.

a	0	1	3
$P(X = a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c) $P(X \geqslant 2) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$

27 **a)** $(X \leqslant 2)$: « Le standard a reçu moins de 2 appels durant une minute ».

$P(X \leqslant 2) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}25 = 0{,}5.$

$(1 \leqslant X \leqslant 4)$: « Le standard a reçu entre 1 et 4 appels durant une minute ».

$P(1 \leqslant X \leqslant 4) = 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}85.$

b) $P(X \geqslant 3) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}5$

28 **a)** La somme des probabilités est égale à 1 donc la valeur manquante est $P(X = 3) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$.

b) $P(X \geqslant 10) = P(X = 2) + P(X = 3)$
$= 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$

29 **a)** $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

donc $p_1 + p_1 + p_1 + 3p_1 = 1$, ce qui donne $6p_1 = 1$ puis $p_1 = \frac{1}{6}$.

On en déduit la loi de probabilité de X :

a	5	10	15	20
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

b) $P(X \geqslant 10) = P(X = 10) + P(X = 15) + P(X = 20)$

$P(X \geqslant 10) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

30 **a)** $p_1 = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4}$

donc $p_2 = 2p_1$, $p_3 = 3p_1$ et $p_4 = 4p_1$.

Or $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

donc $p_1 + 2p_1 + 3p_1 + 4p_1 = 1$

ce qui donne $10p_1 = 1$ et donc $p_1 = 0{,}1$.

Par conséquent, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}3$ et $p_4 = 0{,}4$.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4
$P(X = a)$	0,1	0,2	0,3	0,4

c) $P(X \leqslant 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}6.$

31 **a)** Voici les différentes façons de rendre les clés et les valeurs de X correspondantes.

Locataire 1	Locataire 2	Locataire 3	Valeur de X
Clé 1	Clé 2	Clé 3	3
Clé 1	Clé 3	Clé 2	1
Clé 2	Clé 1	Clé 3	1
Clé 2	Clé 3	Clé 1	0
Clé 3	Clé 1	Clé 2	0
Clé 3	Clé 2	Clé 1	1

On en déduit la loi de probabilité de X :

a	0	1	3
P(X = *a*)	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) $P(X \geqslant 1) = P(X = 1) + P(X = 3)$

$$P(X \geqslant 1) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

32 Les points indiqués sur les lettres sont toujours positifs, donc l'espérance de X est un nombre positif. L'affirmation d'Eddy est donc fausse.

33 $E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

34 $E(X) = 0 \times 0,3 + 2 \times 0,4 + 3 \times 0,1 + 5 \times 0,2 = 2,1$
L'affirmation de Marinella est vraie.

35 Voici la loi de probabilité de X :

a	1	5	10	20
P(X = *a*)	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$E(X) = \frac{3}{9} \times 1 + \frac{4}{9} \times 5 + \frac{1}{9} \times 10 + \frac{1}{9} \times 20$$

$E(X) = \frac{53}{9}$, soit $E(X) \approx 5,89$.

36 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	2	5	10	20	50
P(X = *a*)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

b) $E(X) = \frac{1}{4} \times 2 + \ldots + \frac{1}{20} \times 50 = 9,75$
Sur un grand nombre de bons choisis au hasard, la réduction est, en moyenne, de 9,757 € par bon.

37 Voici la loi de probabilité de X :

a	1	5	20	100
P(X = *a*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{6} \times 100 \approx 27,66.$
Sur un grand nombre de parties, un joueur gagnera, en moyenne, environ 27,66 \$ par partie.

38 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	0	5	10
P(X = *a*)	0,8	0,15	0,05

b) L'espérance de X est :
$E(X) = 0,8 \times 0 + 0,15 \times 5 + 0,05 \times 10$
soit $E(X) = 1,25$.

39 **a) Dé 1**
Voici la loi de probabilité de X :

a	0,5	1	2	3
P(X₁ = *a*)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Dé 2
Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3
$P(X_2 = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Dé 3
Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	4
$P(X_3 = a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b) $E(X_1) = \frac{5}{3} \approx 1,66$

$E(X_2) = \frac{5}{3} \approx 1,66$

$E(X_3) = \frac{5}{3} \approx 1,66$

c) Peu importe puisque ces trois dés correspondent à la même espérance.

40 On calcule l'espérance de chacun de ces jeux grâce à la calculatrice.
Jeu 1 : $E(X) = 0$ donc ce jeu est équitable.
Jeu 2 : $E(X) = -0,125 \neq 0$ donc ce jeu n'est pas équitable.
Olivier s'est donc trompé.

41 X est la variable aléatoire qui donne le gain d'un joueur. L'espérance de X est :

$$E(X) = 0,97 \times 0 + 0,01 \times 100 + 0,01 \times 200 + 0,005 \times 300 + 0,005 \times 400$$

ce qui donne $E(X) = 6,5$.
Pour que le jeu soit équitable, l'opérateur doit donc fixer la mise à 6,5 €.

42 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	− 4	− 3	− 2	1	*m*	4
P(X = *a*)	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

b) $E(X) = \frac{2}{9} \times (-4) + \frac{1}{3} \times (-3) + \frac{1}{9} \times (-2) + \frac{1}{9} \times 1 + \frac{1}{9} \times m + \frac{1}{9} \times 4$

$E(X) = -\frac{14}{9} + \frac{1}{9}m$

c) Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$,

c'est-à-dire $-\frac{14}{9} + \frac{1}{9}m = 0$, d'où $m = 14$.

43 a) On note X la variable aléatoire qui donne le gain de ce jeu.

Voici la loi de probabilité de X :

a	-1	4	9
$P(X = a)$	$\frac{n-4}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$

$E(X) = \frac{n-4}{n} \times (-1) + \frac{3}{n} \times 4 + \frac{3}{n} \times 9$

$E(X) = \frac{25-n}{n}$

Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$, c'est-à-dire pour $n = 25$.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	$0-m$	$5-m$	$10-m$
$P(X = a)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

$E(X) = \frac{4}{5} \times (-m) + \frac{3}{20} \times (5-m) + \frac{1}{20} \times (10-m)$

$= \frac{25-20m}{20}$

Le jeu est équitable lorsque $E(X) = 0$, c'est-à-dire lorsque $25 - 20m = 0$, donc $m = 1{,}25$.

La mise doit donc être de 1,25 €.

44 On note m le nombre de billes portant le numéro 2 ajoutée(s) dans le sac.

X est la variable aléatoire qui indique le numéro de la bille prélevée.

Voici la loi de probabilité de X :

a	-2	1	2	4
$P(X_1 = a)$	$\frac{5}{m+8}$	$\frac{2}{m+8}$	$\frac{m}{m+8}$	$\frac{1}{m+8}$

$E(X) = \frac{5}{m+8} \times (-2) + \frac{2}{m+8} \times 1 + \frac{m}{m+8} \times 2 + \frac{1}{m+8} \times 4$

$E(X) = \frac{-4+2m}{m+8}$

Le jeu est équitable à condition que $E(X) = 0$, donc il faut que $-4 + 2m = 0$, c'est-à-dire $m = 2$. Il faut donc ajouter deux billes portant le numéro 2.

45 Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	80
Maximum	150
Etendue	70
Moyenne	102.5
Ecart type	17.85357
Variance	318.75
Premier quartile	90

46 **a)** X prend les valeurs -2, 0, 3, 8 et 48.

Voici la loi de probabilité de X.

x_i	-2	0	3	8	48
$P(X = a)$	$\frac{14}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

b) Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	-2
Maximum	48
Etendue	50
Moyenne	1.55
Ecart type	10.92005
Variance	119.2475
Premier quartile	-2

47 Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	500
Minimum	480
Maximum	5510
Etendue	5030
Moyenne	1520.42
Ecart type	2019.736
Variance	4079332
Premier quartile	490

48 **a)** Le tableau ci-dessous indique la valeur de X pour chaque tirage possible.

Dé 2 \ Dé1	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	-1	0	1	2	3	4
3	-2	-1	0	1	2	3
4	-3	-2	-1	0	1	2
5	-4	-3	-2	-1	0	1
6	-5	-4	-3	-2	-1	0

On en déduit la loi de probabilité de X :

a	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X = a)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

b) Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	-5
Maximum	5
Etendue	10
Moyenne	-1.665335E-16
Ecart type	2.415229
Variance	5.833333
Premier quartile	-2

c) Voici la loi de probabilité de Y :

a	0	1	4	9	16	25
P(Y = *a*)	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

d) Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	0
Maximum	25
Etendue	25
Moyenne	5.833333
Ecart type	6.817054
Variance	46.47222
Premier quartile	1

49 Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4	5	6			
P(X = *a*)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

On obtient alors les paramètres ci-dessous à la calculatrice.

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	1
Maximum	10
Etendue	9
Moyenne	5.5
Ecart type	2.872281
Variance	8.25
Premier quartile	3

Voici la loi de probabilité de Y :

a	1	3	5	6	8	10
P(X = *a*)	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

On obtient alors les paramètres ci-dessous à la calculatrice.

	V1/N1
Effectif total	0.9
Minimum	1
Maximum	10
Etendue	9
Moyenne	6
Ecart type	2.828427
Variance	8
Premier quartile	5

L'affirmation de Jean-Baptiste est donc fausse. X et Y ont des espérances différentes et des écarts-types différents.

50 **1.** B. **2.** C. **3.** C. **4.** A. **5.** B

51 **1.** C, D. **2.** C. **3.** B, D. **4.** A, B.

52 **1. Faux.** En effet, les secteurs ne sont pas superposables, donc les probabilités des événements $\{X = 10\}$, $\{X = 20\}$ et $\{X = 30\}$ ne sont pas égales.

2. Vrai. En effet, voici la loi de probabilité de X :

a	10	20	30
P(X = *a*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Ainsi,

$$P(X = 10) + P(X = 20) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = P(X = 30).$$

3. Faux. En effet,

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 10 + \frac{1}{3} \times 20 + \frac{1}{2} \times 30 = \frac{70}{3}.$$

4. Vrai. En effet, on vérifie à la calculatrice que

$$V(X) = \frac{500}{9} \simeq 55{,}56.$$

5. Vrai. En effet, $V(X) = \frac{500}{9}$ et donc

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{500}{9}} = \frac{\sqrt{500}}{\sqrt{9}} = \frac{10}{3}\sqrt{5}.$$

53 **a)** L'issue qui réalise l'événement $\{X = 1\}$ est PP.

b) Les issues qui réalisent l'événement $\{X = 0\}$ sont PF et FP.

c) Les issues qui réalisent l'événement $\{X \geqslant 0\}$ sont PP, PF et FP.

54 **a)** $\{X = 20\}$ **b)** $\{X \geqslant 10\}$

55 **a)** X prend les valeurs $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ et $10^3 = 1\,000$.

b) L'événement $\{X = 10\}$ est réalisé quand on tire une boule numérotée 1. Or, il y a trois boules numérotées 1 sur les dix boules de l'urne. Par conséquent, $P(X = 10) = \frac{3}{10} = 0{,}3$.

c) Voici la loi de probabilité de X :

a	10	100	1 000
P(X = *a*)	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{5}{10}$

56 **a)** $E(X) = 0{,}71 \times 0 + 0{,}2 \times 5 + 0{,}05 \times 20 + 0{,}03 \times 100 + 0{,}01 \times 1\,000$

ce qui donne $E(X) = 15$. Cela signifie qu'en jouant un grand nombre de parties, le joueur peut espérer gagner 15 euros par partie.

b) Voici les résultats obtenus à la calculatrice :

	V1/N1
Effectif total	1
Minimum	0
Maximum	1000
Etendue	1000
Moyenne	15
Ecart type	100.4988
Variance	10100
Premier quartile	0

S'entraîner

58 **a)** La première partie de l'algorithme permet de calculer l'espérance : $E(X) = 15{,}5$. Voici le suivi des valeurs lors de l'exécution de l'algorithme à partir de l'instruction $V \leftarrow 0$. On a arrondi les valeurs décimales au centième.

n	4	4	4	4	4
i		0	1	2	3
$A[i]$		5	10	25	50
$A[i] - E$		$-10{,}5$	$-5{,}5$	9,5	34,5
$(A[i] - E)^2$		110,25	30,25	90,25	1190,25
$P[i]$		0,3	0,4	0,2	0,1
$((A[i] - E)^2 \times P[i]$		33,08	12,10	18,05	119,03
V	0	33,08	45,18	63,23	182,25

La valeur obtenue à la fin de l'algorithme est 182,25.
b) La valeur V obtenir à la fin de l'algorithme est la variance de la variable aléatoire X.
c) On ajoute à la fin de l'algorithme l'instruction $s \leftarrow \sqrt{V}$.

59 **a)** On obtient 15,5, qui est bien l'espérance de la variable aléatoire X.
b) La commande len(A) donne la longueur de la liste A, c'est-à-dire son nombre de termes.
c) Voici le programme complet

```
import math

def Esperance(A,P):
    n=len(A)
    E=0
    for i in range(0,n):
        E=E+A[i]*P[i]
    return(E)

def VarianceEcarttype(A,P):
    n=len(A)
    E=Esperance(A,P)
    V=0
    for i in range(0,n):
        V=V+(A[i]-E)**2*P[i]
    s=math.sqrt(V)
    print(V)
    print(s)
```

61 Voici la feuille de calcul adaptée :

	A	B	C	D	E	F
1	a	P(X=a)	a*P(X=a)	a-E(X)	(a-E(X))^2	(a-E(X))^2*P(X=a)
2	0	0.817991	0	-0.82614	0.682504	0.5582821254
3	1	0.068766	0.068766	0.17386	0.030228	0.0020786583
4	2	0.073351	0.146702	1.17386	1.377952	0.1010741568
5	3	0.02445	0.07335	2.17386	4.725676	0.1155427781
6	10	0.011003	0.11003	9.17386	84.159744	0.9260096632
7	30	0.003668	0.11004	29.1739	851.11422	3.1218869736
8	50	0.000572	0.0286	49.1739	2418.0687	1.3831352987
9	150	0.000191	0.02865	149.174	22252.841	4.2502926509
10	1000	0.00006	0.06	999.174	998348.41	59.9009043902
11	10000	0.00002	0.2	9999.17	99983478	1999.6695584501
12						
13	E(X)	0.826138				
14	V(X)	2070.0288				
15	σ(X)	45.497569				

62 Voici la feuille de calcul adaptée :

	A	B	C	D	E	F
1	a	P(X=a)	a*P(X=a)	a-E(X)	(a-E(X))^2	(a-E(X))^2*P(X=a)
2	1	0.05	0.05	0.02475	0.0006126	3.0628125E-05
3	2	0.25	0.5	1.02475	1.0501126	0.2625281406
4	3	0.123	0.369	2.02475	4.0996126	0.5042523452
5	4	0.00625	0.025	3.02475	9.1491126	0.0571819535
6	5	0.00625	0.03125	4.02475	16.198613	0.1012413285
7						
8	E(X)	0.97525				
9	V(X)	0.9252344				
10	σ(X)	0.9618911				

63 **1. a)**

$$\sum_{(i=1)}^{5} 10i = 10 \times 1 + 10 \times 2 + 10 \times 3 + 10 \times 4 + 10 \times 5$$

donc $\displaystyle\sum_{(i=1)}^{5} 10i = 150$.

b) $\displaystyle\sum_{(i=1)}^{5} ki = k \times 1 + k \times 2 + k \times 3 + k \times 4 + k \times 5$

donc $\displaystyle\sum_{(i=1)}^{5} ki = 15k$.

2. a) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \times a_1 + k \times a_2 + ... + k \times a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \times (a_1 + a_2 + ... + a_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \times \sum_{i=1}^{n} a_i$$

b) $\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k + k + ... + k}_{n \text{ fois}} = n \times k$

c) $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k \times a_1 + k \times a_2 + ... + k \times a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + ... + a_n + b_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

64 **a)** Par définition de l'espérance et d'après les propriétés de la notation Σ démontrée dans l'exercice **63**, $\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$

et $\mathrm{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (a_i - \mathrm{E(X)})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - \mathrm{E(X)})^2$

b) $(a_i - \mathrm{E(X)})^2 = a_i^2 - 2a_i\mathrm{E(X)} + \mathrm{E(X)}^2$

c) $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 - 2a_i\mathrm{E(X)} + \mathrm{E(X)}^2)$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2a_i\mathrm{E(X)} + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E(X)}^2\right)$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\mathrm{E(X)}\sum_{i=1}^{n} a_i + n\mathrm{E(X)}^2\right)$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2\mathrm{E(X)}}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \mathrm{E(X)}^2$$

d) $\frac{2\mathrm{E(X)}}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = 2\mathrm{E(X)} \times \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ or on sait que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \mathrm{E(X)}$ donc $\frac{2\mathrm{E(X)}}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = 2\mathrm{E(X)}^2$.

Par conséquent, $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\mathrm{E(X)}^2 + \mathrm{E(X)}^2$

et donc $\mathrm{V(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \mathrm{E(X)}^2$.

e) Avec la formule du cours, on doit effectuer *n* soustractions, alors qu'avec la formule de König-Huygens, on n'en effectue qu'une.

65 X peut prendre les valeurs : $85 + 235 = 320$; $170 + 1\,340 = 1\,510$; $845 + 5\,475 = 6\,320$.

a	320	1 510	6 320
P(X = *a*)	0,34	0,48	0,18

66 **a)** Le tableau ci-dessous indique la valeur de X pour chaque tirage possible.

Dé 2 \ Dé1	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	1	1	2	2
3	3	3	3	3	1	1
4	4	4	2	2	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	3	3	2	2

Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4	5	6
P(X = *a*)	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$

67 **a)** Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

$\mathrm{P(X = 0)} = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{6}{20} = 0{,}3$

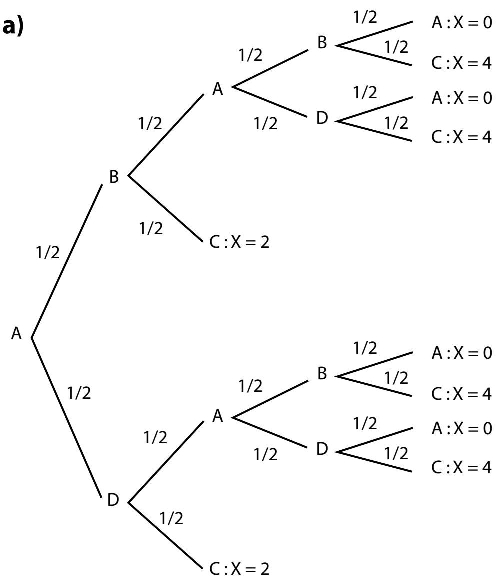
b) La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau.

a	0	1	2
P(X = *a*)	0,3	0,6	0,1

$\mathrm{P(X = 1)} = \frac{3 \times 2 + 2 \times 3}{20} = 0{,}6$

$\mathrm{P(X = 2)} = \frac{2}{20} = 0{,}1$

68 **a)**



La loi de probabilité de X est donc :

$\mathrm{P(X = 0)} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

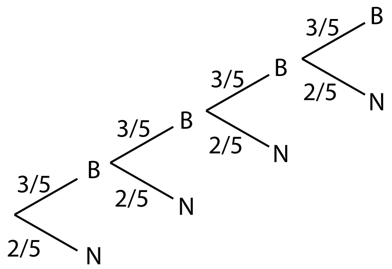
$\mathrm{P(X = 2)} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$P(X=4)=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$

b) La probabilité que la fourmi ait traversé le carré pendant le temps imparti est :

$P(X=2)+P(X=4)=\frac{3}{4}$.

69 **a)**



b) La loi de probabilité de X est :

$P(X=1)=\frac{2}{5}=0{,}4$.

$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}=0{,}24$

$P(X=3)=\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{18}{125}=0{,}144$

$P(X=4)=\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}=\frac{54}{625}=0{,}086\,4$

$P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}=0{,}129\,6$

c) On obtient $E(X)=1{,}657\,6$.

70 On numérote les cases de l'échiquier

1	2	3
4	5	6
7	8	9

On peut représenter une issue de la façon suivante : (2 ; 5 ; 7) signifie que le jeton rouge est sur la case 2, le vert sur la case 5 et le bleu sur la case 7.

Il y a $9\times 8\times 7=504$ triplets différents, donc 504 placements distincts de trois jetons sur l'échiquier.

X donne le nombre de jetons sur la diagonale en pointillés.

$(X=3)$ est réalisé par les triplets (1 ; 5 ; 9), (1 ; 9 ; 5), (5 ; 1, 9), (5 ; 9 ; 1), (9 ; 1 ; 5) et (9 ; 5 ; 1)

donc $P(X=3)=\frac{6}{504}$.

On obtient par dénombrement des issues :

$P(X=2)=\frac{108}{504}$

$P(X=1)=\frac{270}{504}$

$P(X=0)=\frac{120}{504}$

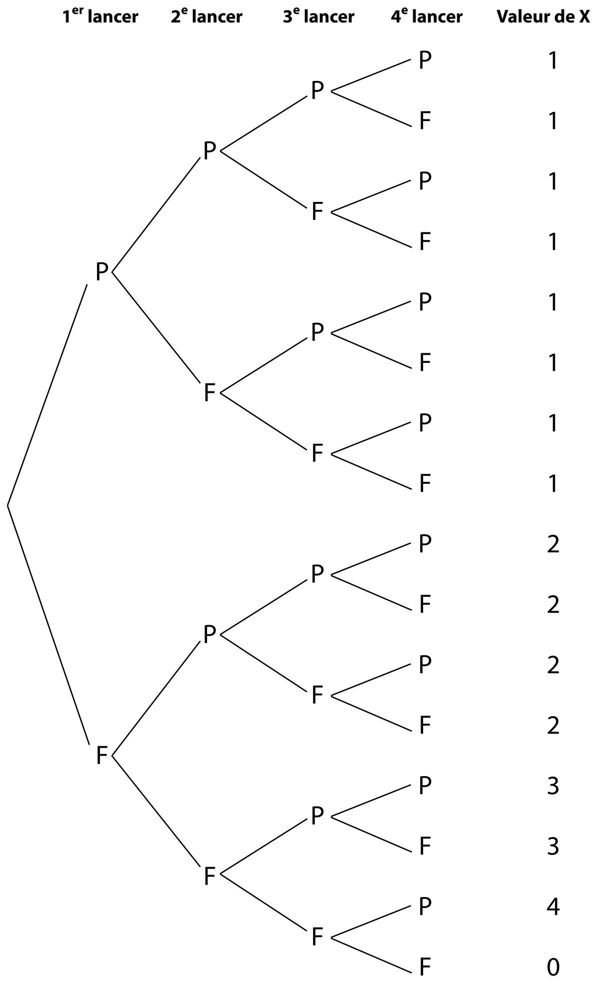
71 **a)** On sait que $p_1+p_2+p_3+p_4=1$ donc $4p_4+4p_4+p_4+p_4=1$ c'est-à-dire $10p_4=1$ et donc $p_4=0{,}1$.

b) La variable aléatoire X donne le nombre de points obtenus lors d'un lancer, donc elle prend les valeurs 1, 3, 4, 6. Voici la loi de probabilité de X :

a	1	3	4	6
P(X = *a*)	0,1	0,4	0,4	0,1

c) $P(X\geqslant 4)=P(X=4)+P(X=6)=0{,}4+0{,}1=0{,}5$

72 **a)**

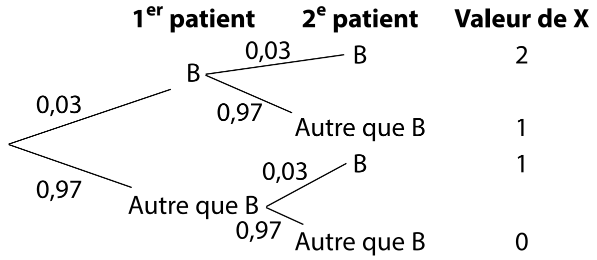


b) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2	3	4
P(X = *a*)	$\frac{1}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

73 **1.** On note b le pourcentage de donneurs du groupe B et c le pourcentage de donneurs du groupe AB. Alors, d'après l'énoncé, $43+45+b+c=100$ et $b=3c$. Par conséquent, $88+4c=100$, c'est-à-dire $4c=12$ et donc $c=3$. Il y a donc 3 % de donneurs du type AB et 9 % de donneurs du type B.

2. On peut représenter la situation par un arbre.



On calcule, par exemple :
$P(X = 2) = 0{,}03 \times 0{,}03 = 0{,}0009$.
On obtient ainsi la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
P(X = *a*)	0,000 9	0,058 2	0,940 9

74 **a)** La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau.

a	-3	-2	1	5	9
P(X = *a*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) $E(X) = \frac{1}{6} \times (-3) + \frac{1}{3} \times (-2) + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 9$

$E(X) = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$

Sur un grand nombre de parties, un joueur gagnera, en moyenne, environ 1,33 € par partie.

75 X est la variable aléatoire qui donne la somme gagnée par le joueur, en euros, sans tenir compte du prix d'une partie. Voici la loi de probabilité de X :

a	0	10	20	50
P(X = *a*)	$\frac{40}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{3}{48}$	$\frac{1}{48}$

L'espérance de X est :

$E(X) = \frac{40}{48} \times 0 + \frac{4}{48} \times 10 + \frac{3}{48} \times 20 + \frac{1}{48} \times 50$

ce qui donne $E(X) = \frac{150}{48}$ c'est-à-dire $E(X) = 3{,}125$.

L'espérance du gain est inférieure à la mise, donc le jeu n'est pas équitable.

76 **a)** $E(G) = 0{,}5 \times (-5) + 0{,}2 \times 0 + 0{,}2 \times 10 + 0{,}05 \times 20 + 0{,}05 \times 50$

ce qui donne $E(G) = 3$.

b) Pour que le jeu soit équitable, il faut soustraire 3 à chaque valeur possible du gain. On obtient alors une espérance égale à 0.

77 On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le gain, en euros, au jeu 1 (resp. au jeu 2).

Jeu 1

a	0	1	2	3	4	5	6	7	10
P(X = *a*)	$\frac{9}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{49}$

$E(X) = \frac{9}{49} \times 0 + \ldots + \frac{1}{49} \times 10 = \frac{156}{49} \approx 2{,}57$

Jeu 2

a	0	1	2	4	5	10	25
P(Y = *a*)	$\frac{33}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{49}$

$E(X) = \frac{33}{49} \times 0 + \ldots + \frac{1}{49} \times 25 = \frac{81}{49} \approx 1{,}65$

$E(X) > E(Y)$ donc le jeu 1 est plus intéressant pour le joueur.

78 On note X la variable aléatoire qui donne le gain de Monsieur X.

Voici la loi de probabilité de X :

a	-8	2
P(X = *a*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$E(X) = \frac{1}{6} \times (-8) + \frac{5}{6} \times 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$

Ainsi, sur un grand nombre de parties, Monsieur X gagnera, en moyenne, environ 0,33 € par partie.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	$k - 10$	k
P(X = *a*)	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$E(X) = \frac{1}{6} \times (k - 10) + \frac{5}{6} \times k = k - \frac{5}{3}$

Ainsi, sur un grand nombre de parties, Monsieur X gagnera, en moyenne, $k - \frac{5}{3}$ € par partie pour une mise de k €.

79 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	4	7	8	10
P(X = *a*)	0,03	0,27	0,14	0,56

b) $E(X) = 8{,}73$

Sur un grand nombre de spectateurs choisi au hasard, le prix moyen pour un spectateur est 8,73 €.

c) $3\,000 \times 8{,}73 = 26\,190$

Or $26\,190 > 20\,000$, donc ce théâtre est rentable.

80 **a)** Voici la probabilité de X :

a	0	1	2
P(X = *a*)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b) En calculant à la main ou avec la calculatrice, on trouve $E(X) = 1$ et $V(X) = \frac{2}{3}$.

81 **a)** Voici la probabilité de X :

a	2	3	4
P(X = *a*)	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$

$E(X) = \frac{4}{12} \times 2 + \frac{4}{12} \times 3 + \frac{4}{12} \times 4 = 3$

Sur un grand nombre de déplacements, le temps moyen de déplacement est de 3 s.

82 **a)** Les valeurs prises par X sont les nombres entiers de 1 à 12, alors que les valeurs prises par Y sont les nombres entiers de 2 à 12. L'affirmation de Selma est donc fausse. À la calculatrice, on obtient que $E(X) = 6{,}5$ et $E(Y) = 7$. L'affirmation d'Ari est donc fausse.

b) C'est Y qui a la plus grande espérance.

c) $V(X) \simeq 11{,}92$ et $V(Y) \simeq 5{,}83$ donc c'est X qui a la plus grande variance.

83 **a)** L'espérance de X est :

$E(X) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 \times a_4$

En ajoutant 10 à chaque valeur, on définit une nouvelle variable aléatoire Y dont l'espérance est :

$$E(y) = p_1 \times (a_1 + 10) + p_2 \times (a_2 + 10) + p_3 \times (a_3 + 10) + p_4 \times (a_4 + 10)$$

$$E(Y) = p_1 \times a_1 + 10p_1 + p_2 \times a_2 + 10p_2 + p_3 \times a_3 + 10p_3 + p_4 \times a_4 + 10p_4$$

$$E(Y) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 \times a_4 + 10(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$$

$$E(Y) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 + 10 \times 1$$

$$E(Y) = E(Y) + 10$$

b) En ajoutant un nombre k à chaque valeur, on définit une nouvelle variable aléatoire Z dont l'espérance est :

$$E(y) = p_1 \times (a_1 + k) + p_2 \times (a_2 + k) + p_3 \times (a_3 + k) + p_4 \times (a_4 + k)$$

$$E(Z) = p_1 \times a_1 + kp_1 + p_2 \times a_2 + kp_2 + p_3 \times a_3 + kp_3 + p_4 \times a_4 + kp_4$$

$$E(Z) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 \times a_3 + p_4 \times a_4 + k(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$$

$$E(Z) = p_1 \times a_1 + p_2 \times a_2 + p_3 + a_3 + p_4 \times a_4 + k \times 1$$

$$E(Z) = E(X) + k$$

84 **1. a)** À la calculatrice, on obtient $E(X) = 1{,}4$ et $V(X) = 0{,}24$.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	4
$P(X^2 = a)$	0,6	0,4

c) $E(X^2) = 0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times 4 = 0{,}6 + 1{,}6 = 2{,}2$

d) $E(X^2) - (E(X))^2 = 2{,}2 - (1{,}4)^2 = 0{,}24$

On retrouve la valeur de $V(X)$.

2. a) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	5	10
$P(X = a)$	0,1	0,2	0,3	0,4

L'espérance de X est :

$E(X) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}2 \times 2 + 0{,}3 \times 5 + 0{,}4 \times 10$

ce qui donne $E(X) = 6$.

b) Voici la loi de probabilité de X^2 :

a	1	4	25	100
$P(X^2 = a)$	0,1	0,2	0,3	0,4

L'espérance de X^2 est :

$E(X^2) = 0{,}1 \times 1 + 0{,}2 \times 4 + 0{,}3 \times 25 + 0{,}4 \times 100$

ce qui donne $E(X^2) = 48{,}4$.

En utilisant la formule de la question **1.d)**, on trouve $V(X) = E(X^2) - (E(X^2)) = 48{,}4 - (6)^2 = 12{,}4$.

85 **1. a) Faux.** En effet, $\{X \leqslant 0\})$ est réalisé lorsque $\{X = -1\}$ ou $\{X = 0\}$.

b) Vrai. En effet, $\{X > 2\}$ est réalisé par le seul événement $\{X = 3\}$.

2. a) Faux. En effet, si $\left\{X = \frac{1}{n}\right\}$ est réalisé, alors $\{X \leqslant 0\}$ est réalisé $\frac{1}{n}$.

b) Vrai. En effet, si $\{X = 3\}$ est réalisée, alors $\{X > 2\}$ est réalisé.

86 **1. a)** $\{X < 1\}$ **b)** $\{X > 3\}$

c) $\{X \geqslant 1\}$ **d)** $\{X < 3\}$

2. $\bar{A}$: « Il pleuvra au moins un jour le mois prochain. »

$\bar{B}$: « Au moins un des élèves ne réussira pas l'examen du code de la route avant d'avoir 18 ans. »

Organiser son raisonnement

87 **a)** Voici la loi de probabilité de $X - x$:

Valeur	$a_1 - x$	$a_2 - x$	…	$a_n - x$
Probabilité	p_1	p_2	…	p_n

b) Voici la loi de probabilité de $(X - x)^2$:

Valeur	$(a_1 - x)^2$	$(a_2 - x)^2$	…	$(a_n - x)^3$
Probabilité	p_1	p_2	…	p_n

2. a) Pour tout nombre entier i compris entre 1 et n, $(a_i - x)^2 = a_i^2 - 2\,a_i x + x^2$.

Par conséquent,

$$f(x) = p_1 \times (a_1 - x)^2 + p_2 \times (a_2 - x)^2 + \ldots + p_n \times (a_n - x)^2$$

$$f(x) = p_1 \times (a_1^2 - 2a_1 x + x^2) + \ldots + p_n \times (a_n^2 - 2a_n x + x^2)$$

$$f(x) = p_1 \times (a_1^2 - 2a_1 x + x^2) + p_2 \times (a_2^2 - 2a_2 x + x^2) + \ldots + p_n \times (a_n^2 - 2a_n x + x^2)$$

$f(x) = (p_1 + \ldots + p_n)x^2 - 2x(p_1a_1 + \ldots + p_na_n)$
$+ (p_1a_1^2 + \ldots + p_na_n^2)$

$f(x) = (p_1 + \ldots + p_n)x^2 - 2x(p_1a_1 + \ldots + p_na_n^2)$

b) $f'(x) = 2x - 2\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 2(x - \mathrm{E}(\mathrm{X}))$

c) La fonction dérivée f' s'annule pour $x = \mathrm{E}(\mathrm{X})$. Elle est négative pour $x < \mathrm{E}(\mathrm{X})$ et positive pour $x > \mathrm{E}(\mathrm{X})$. La fonction f admet donc un minimum atteint pour $x = \mathrm{E}(\mathrm{X})$.

88 **a)** • $\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(3\,;0) + \mathrm{P}(4\,;0) + \mathrm{P}(5\,;0)$

$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{3}$

• $\mathrm{P(B)} = \mathrm{P}(5\,;1) + \mathrm{P}(3\,;2) + \mathrm{P}(4;2) + \mathrm{P}(5\,;2)$

$\mathrm{P(B)} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$

$\mathrm{P(B)} = \frac{4}{9}$

Or $\frac{4}{9} \neq \frac{1}{3}$ donc A et B ne sont pas équiprobables.

b) On note X la variable aléatoire qui donne le gain, en £, du jeu.

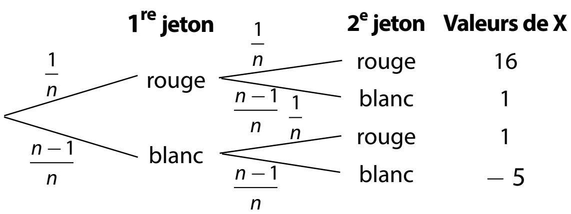
Voici la loi de probabilité de X :

a	– 1	2	3	4	5	7	9
P(X = *a*)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{3}\times(-1) + \ldots + \frac{1}{9}\times 9 = 3$

Ce jeu n'est pas équitable, il est favorable au joueur car $\mathrm{E(X)} > 0$.

89 On note X la valeur du gain algébrique du joueur. On représente la situation par un arbre.



On en déduit la loi de probabilité de X :

a	16	1	– 5
P(X = *a*)	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{2(n-1)}{n^2}$	$\frac{(n-1)^2}{n^2}$

L'espérance de X est donc, en fonction de n,

$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{n^2}\times 16 + \frac{2(n-1)}{n^2}\times 1 + \frac{(n-1)^2}{n^2}\times(-5)$

$\mathrm{E(X)} = \frac{16 + 2n - 2 - 5n^2 + 10n - 5}{n^2}$

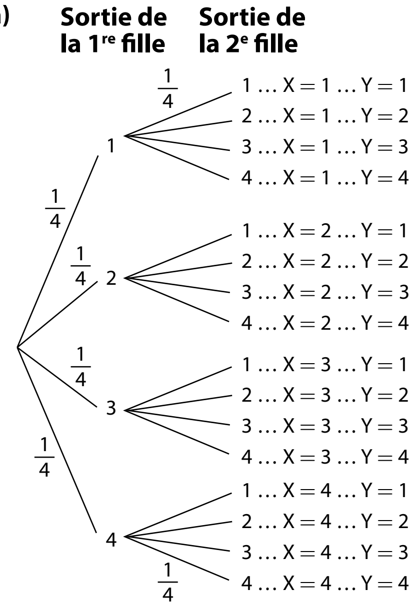
$\mathrm{E(X)} = \frac{-5n^2 + 12n + 9}{n^2}$

Le discriminant du polynôme du second degré $-5n^2 + 12n + 9$ est $\Delta = 12^2 - 4\times(-5)\times 9 = 324$.

Il y a donc deux valeurs qui annulent E(X), $n_1 = 3$ et $n_2 = -0{,}6$ qui est impossible dans ce contexte.

Le jeu est donc équitable pour $n = 3$.

90 **1. a)**



b) • $\mathrm{P(X = 1)} = \frac{1}{4}$

La probabilité que la première fille sorte au 1er étage est $\frac{1}{4}$.

• $\mathrm{P(Y = 1)} = \frac{1}{4}$

La probabilité que la seconde fille sorte au 1er étage est $\frac{1}{4}$.

• $\mathrm{E(X)} = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4 = 2{,}5$

Sur un grand nombre de répétitions, la première fille sera montée avec l'ascenseur de, en moyenne, 2,5 étages par trajet.

• $\mathrm{E(Y)} = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{4}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4 = 2{,}5$

Sur un grand nombre de répétitions, la deuxième fille sera montée avec l'ascenseur de, en moyenne, 2,5 étages par trajet.

2. a) $p = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2)\times p(\mathrm{X} \geqslant 2)$

$p = \mathrm{P(X = 2)}\times\mathrm{P(Y = 2)} + \mathrm{P(X = 2)}\times\mathrm{P(Y = 3)}$
$+ \mathrm{P(X = 2)}\times\mathrm{P(Y = 4)} + \mathrm{P(X = 3)}\times\mathrm{P(Y = 2)}$
$+ \mathrm{P(X = 3)}\times\mathrm{P(Y = 3)} + \mathrm{P(X = 3)}\times\mathrm{P(Y = 4)}$
$+ \mathrm{P(X = 4)}\times\mathrm{P(Y = 2)} + \mathrm{P(X = 4)}\times\mathrm{P(Y = 3)}$
$+ \mathrm{P(X = 4)}\times\mathrm{P(Y = 4)}$

$p = 9 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$

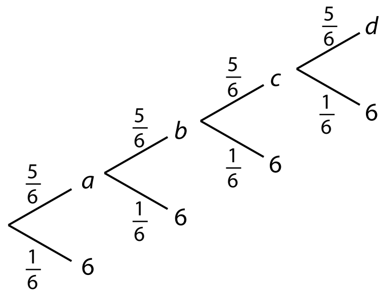
b) $p' = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y} \geqslant 2) + \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1)$

$$\begin{aligned} p' = \ & \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=2) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=3) \\ & + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=4) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) \\ & + \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=4) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) \end{aligned}$$

$p' = 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

c) $p'' = \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}=1) = \frac{1}{16}$

91 On schématise la situation à l'aide d'un arbre.



a, *b*, *c*, *d* sont des nombres entiers naturels distincts de 6.

La probabilité que la tortue gagne est :

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}48.$$

On peut calculer de deux façons la probabilité que le lièvre gagne :

Soit : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}52.$

Soit : $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} \approx 0{,}52.$

La situation la plus enviable est celle du lièvre.

92 Si on lance 1 fois la pièce, la loi de probabilité de X est :

a	0	1
P(X = *a*)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Donc l'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}$.

Si on lance 2 fois la pièce, la loi de probabilité de X est :

a	0	1	2
P(X = *a*)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Donc l'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1$.

Si on lance 3 fois la pièce, la loi de probabilité de X est :

a	0	1	2	3
P(X = *a*)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Donc l'espérance de X est $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{3}{2}$.

On peut alors conjecturer que si on lance *n* fois la pièce, l'espérance de X est $\frac{n}{2}$.

93 On note X la variable aléatoire qui donne le gain d'un joueur sur une partie (mise comprise). Voici la loi de probabilité de X :

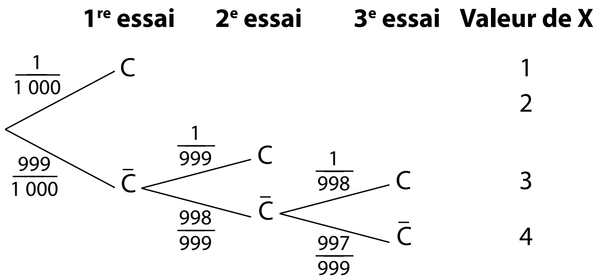
a	− 5	− 3	5	45	95	245	995
P(X = *a*)	0,703	0,243	0,027	0,012	0,008	0,006	0,001

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = -0{,}344$

Sur 5 années, $5 \times 250 \times 300 = 375\,000$ parties sont jouées, soit un gain pour le casino de $375\,000 \times 0{,}344 = 129\,000$ €. Ainsi, la rentabilité de la machine sera de :

$$129\,000 - 5 \times 2\,000 - 40\,000 = 79\,000 \text{ €}.$$

94 On peut représenter la situation par un arbre. C représente le fait de saisir le bon code.



On en déduit la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4
P(X = *a*)	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{997}{1\,000}$

L'espérance de X est donc :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{1\,000} \times 1 + \frac{1}{1\,000} \times 2 + \frac{1}{1\,000} \times 3 + \frac{997}{1\,000} \times 4$$

ce qui donne

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{1\,000} \times 1 + \frac{1}{1\,000} \times 2 + \frac{1}{1\,000} \times 3 + \frac{997}{1\,000} \times 4$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{3\,994}{1000} = 3{,}994$$

Ainsi, le voleur peut espérer ne pas trouver le bon code au cours des trois essais.

95 Yasmine effectue *n* tirs.

X donne le nombre de tirs où elle touche la cible.

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - (0{,}5)^n$.

$1 - (0{,}5)^n \geqslant 0{,}99$ équivaut à $(0{,}5)^n \leqslant 0{,}01$.

Avec la calculatrice, on obtient $n \geqslant 7$.

Yasmine doit tirer au moins sept fois.

96 X donne la somme des trois nombres obtenus.

$(\mathrm{X} = 9)$ est réalisé par les issues:

(1, 2, 6) (1, 6, 2) (2, 1, 6) (2, 6, 1) (6, 1, 2) (6, 2, 1)

(1, 3, 5) (1, 5, 3) (3, 1, 5) (3, 5, 1) (5, 1, 3) (5, 3, 1)
(2, 3, 4) (2, 4, 3) (3, 2, 4) (3, 4, 2) (4, 2, 3) (4, 3, 2)
(2, 3, 4) (2, 4, 3) (3, 2, 4)
(2, 3, 4) (2, 4, 3) (3, 2, 4)
(2, 3, 4)

$P(X = 9) = \dfrac{25}{6^3}$

$(X = 10)$ est réalisé par les issues:

(1, 3, 6) (1, 6, 3) (3, 1, 6) (3, 6, 1) (6, 1, 3) (6, 3, 1)
(1, 4, 5) (1, 5, 4) (4, 1, 5) (4, 5, 1) (5, 1, 4) (5, 4, 1)
(2, 3, 5) (2, 5, 3) (3, 2, 5) (3, 5, 2) (5, 2, 3) (5, 3, 2)
(2, 2, 6) (2, 6, 2) (6, 2, 2)
(4, 4, 2) (4, 2, 4) (2, 4, 4)
(3, 3, 4) (3, 4, 3) (4, 3, 3)

$P(X = 10) = \dfrac{27}{6^3}$

Donc $P(X = 10) \geqslant P(X = 9)$.

97 On note x le prix de vente d'un billet de tombola et X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

X prend les valeurs $-x$, $2 - x$, $10 - x$ et $50 - x$.

Voici la loi de probabilité de X :

a	$-x$	$2-x$	$10-x$	$50-x$
P(X = *a*)	0,5	0,2	0,2	0,1

L'espérance de X est donc :

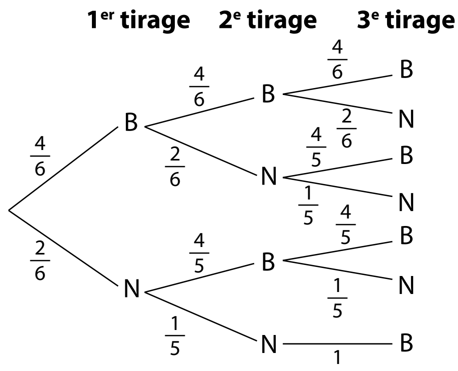
$E(X) = 0{,}5(-x) + 0{,}2(2 - x) + 0{,}2(10 - x) + 0{,}1\,(50 - x)$

$E(X) = -0{,}5x + 0{,}4 - 0{,}2x + 2 - 0{,}2x + 5 - 0{,}1x$

$E(X) = -x + 7{,}4$

Pour que l'espérance soit comprise entre 4 et 6, il faut que $-x + 7{,}4 \geqslant 4$ et $-x + 7{,}4 \leqslant 6$, ce qui donne $x \leqslant 3{,}4$ et $x \geqslant 1{,}4$. Il faut donc que le prix du billet soit compris entre 1,4 et 3,4 euros.

98 **1.** Voici l'arbre pondéré :



2. a) X prend les valeurs 0, 1 et 2.

b) $P(X = 0) = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{4}{6} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{4^3}{6^3} = \dfrac{8}{27}$

c) La probabilité demandée est égale à :

$\dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{32}{180} = \dfrac{8}{45}$.

d) La probabilité que la seule boule noire soit tirée au premier tirage est : $\dfrac{2}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{75}$

On a vu que la probabilité qu'elle soit tirée au deuxième tirage est $\dfrac{8}{45}$.

Enfin, la probabilité que la seule boule noire soit tirée au troisième tirage est $\dfrac{4}{6} \times \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{6} = \dfrac{32}{216} = \dfrac{4}{27}$.

On en déduit que $P(X = 2) = \dfrac{16}{75} + \dfrac{8}{45} + \dfrac{4}{27} = \dfrac{89}{135}$.

e) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
P(X = *a*)	$\frac{8}{27}$	$\frac{364}{675}$	$\frac{37}{225}$

f) $E(X) = \dfrac{8}{27} \times 0 + \dfrac{364}{675} \times 1 + \dfrac{37}{225} \times 2 = \dfrac{586}{675}$

c'est-à-dire $E(X) \simeq 0{,}868$.

Cela signifie que si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience, on peut espérer tirer en moyenne 0,868 boules noires par expérience.

Exploiter ses compétences

99 Dans chaque cas, on note X le gain algébrique du joueur.

Cas 1 : Si le joueur mise sur un unique secteur, il paye 1,5 € et il peut gagner un lot ou ne rien gagner. Voici alors la loi de probabilité de X.

a	− 1,5	0,5	3,5	8,5
P(X = *a*)	$\frac{9}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On obtient alors $E(X) = -\dfrac{1}{12}$.

Cas 2 : Si le joueur mise sur deux secteurs consécutifs, il paye 3 € et il peut gagner un lot ou ne rien gagner. Voici alors la loi de probabilité de X.

a	− 3	− 1	2	7
P(X = *a*)	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On obtient alors $E(X) = -\dfrac{1}{6} = -\dfrac{2}{12}$.

Cas 3 : Si le joueur mise sur trois secteurs consécutifs, il paye 4,5 € et il peut gagner un lot ou ne rien gagner. Voici alors la loi de probabilité de X.

a	$-4{,}5$	$-2{,}5$	$0{,}5$	$5{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{1}{4} = -\frac{3}{12}$.

Cas 4 : Si le joueur mise sur quatre secteurs consécutifs, il paye 6 € et il gagne forcément l'un des lots. Voici alors la loi de probabilité de X.

a	-4	-1	4
$P(X=a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{1}{3} = -\frac{4}{12}$.

Cas 5 : Si le joueur mise sur cinq secteurs consécutifs, il paye 7,5 € et il peut gagner un ou deux lots.
Les valeurs possibles pour X sont donc :
$2-7{,}5=-5{,}5$; $5-7{,}5=-2{,}5$;
$10-7{,}5=2{,}5$; $2+5-7{,}5=-0{,}5$;
$2+10-7{,}5=4{,}5$ et $5+10-7{,}5$.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	$-5{,}5$	$-2{,}5$	$-0{,}5$	$2{,}5$	$4{,}5$	$7{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{5}{12}$.

Cas 6 : Si le joueur mise sur six secteurs consécutifs, il paye 9 € et il peut gagner un ou deux lots. Les valeurs possibles pour X sont donc :
$2-9=-7$; $5-9=-4$; $10-9=1$;
$2+5-9=-2$; $2+10-9=3$ et $5+10-9=6$.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	-7	-4	-2	1	3	$7{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{1}{2} = -\frac{8}{12}$.

Cas 7 : Si le joueur mise sur sept secteurs consécutifs, il paye 10,5 € et il peut gagner un ou deux lots.
Les valeurs possibles pour X sont donc :

$2-10{,}5=-8{,}5$; $5-10{,}5=-5{,}5$;
$10-10{,}5=-0{,}5$; $2+5-10{,}5=-3{,}5$;
$2+10-10{,}5=1{,}5$ et $5+10-10{,}5=4{,}5$.
Voici alors la loi de probabilité de X :

a	$-8{,}5$	$-5{,}5$	$-3{,}5$	$-0{,}5$	$1{,}5$	$4{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{7}{12}$.

Cas 8 : Si le joueur mise sur huit secteurs consécutifs, il paye 12 € et il gagne forcément deux des lots.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	-5	0	3
$P(X=a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{2}{3} = -\frac{8}{12}$.

Cas 9 : Si le joueur mise sur neuf secteurs consécutifs, il paye 13,5 € et il peut gagner deux ou trois lots.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	$-6{,}5$	$-1{,}5$	$1{,}5$	$3{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{3}{4} = -\frac{9}{12}$.

Cas 10 : Si le joueur mise sur dix secteurs consécutifs, il paye 15 € et il peut gagner deux ou trois lots.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	-8	-3	0	2
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{5}{6} = -\frac{10}{12}$.

Cas 11 : Si le joueur mise sur onze secteurs consécutifs, il paye 16,5 € et il peut gagner deux ou trois lots.
Voici alors la loi de probabilité de X.

a	$-9{,}5$	$-4{,}5$	$-1{,}5$	$0{,}5$
$P(X=a)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{9}{12}$

On obtient alors $E(X) = -\frac{11}{12}$.

Cas 12 : Si le joueur mise sur les douze secteurs, il paye 18 € et gagne les trois lots, c'est-à-dire un total de 17 €, soit une perte de 1 €.

Conclusion : la stratégie qui permet d'espérer la perte moyenne la moins élevée est de miser sur un seul secteur.

100 On note X le montant des frais de réparation pour une location prise au hasard, en choisissant le forfait 1.
Voici la loi de probabilité de X :

a	0	200	500	1 000	2 000	5 000
$P(X=a)$	0,8	0,1	0,04	0,03	0,02	0,01

L'espérance des frais de réparation est alors $E(X)=250$.
En ajoutant le prix du forfait, on obtient un total de 389 €, qui est l'espérance du coût réel de location, incluant le forfait et les frais de réparation.
On note Y le montant des frais de réparation pour une location prise au hasard, en choisissant le forfait 2.
Voici la loi de probabilité de Y :

a	0	200	500	1 000
P(Y = a)	0,8	0,1	0,04	0,06

L'espérance des frais de réparation est alors $E(Y) \approx 205{,}88$.

En ajoutant le prix du forfait, on obtient un total d'environ 384,88 €.

On note Z le montant des frais de réparation pour une location prise au hasard, en choisissant le forfait 3.

Voici la loi de probabilité de Z :

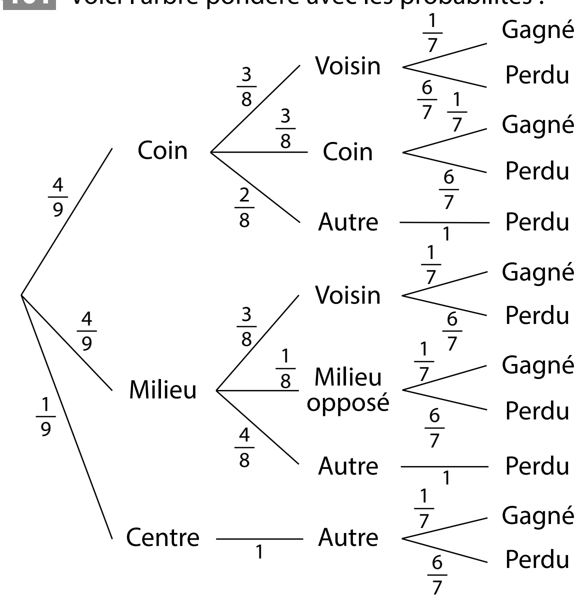
a	0	200	500
P(Z = a)	0,8	0,1	0,1

L'espérance des frais de réparation est alors $E(Y) \approx 183{,}82$.

En ajoutant le prix du forfait, on obtient un total d'environ 402,82 €.

Dans ces conditions, pour un grand nombre de locations, le forfait le plus intéressant est le forfait 3.

101 Voici l'arbre pondéré avec les probabilités :



On note X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur. X peut prendre les valeurs -1 et 9.

À l'aide de l'arbre, on calcule que $P(X = -1) = \dfrac{19}{21}$ et $P(X = 9) = \dfrac{2}{21}$.

L'espérance de X est donc :

$$E(X) = \frac{19}{21} \times (-1) + \frac{2}{21} \times 9 = -\frac{1}{21}.$$

Puisque l'espérance est négative, ce jeu n'est pas équitable.

102 Le tableau cl-dessous indique les bénéfices possibles et les probabilités correspondantes si la compagnie met en vente 152 billets.

Nombre de passagers	147	148	149	150	151	152
Recette	24 900	25 160	25 330	25 500	25 670	25 840
Remboursement					300	600
Bénéfice	24 990	25 160	25 330	25 500	25 370	25 240
Probabilité	0,07	0,15	0,25	0,35	0,12	0,06

Dans ce cas, l'espérance du bénéfice de la compagnie s'élève à 25 339,60 €.

Si la compagnie met en vente 151 billets, alors on doit exclure la possibilité que 152 personnes se présentent. On se limite alors à 94 % des cas, et on doit donc diviser chaque probabilité par 0,94. On obtient le tableau ci-dessous.

Nombre de réservations	147	148	149	150	151
Recette	24 990	25 160	25 330	25 500	25 670
Remboursement					300
Bénéfice	24 990	25 160	25 330	25 500	25 370
Probabilité	0,074	0,160	0,266	0,372	0,128

Dans ce cas, l'espérance du bénéfice de la compagnie s'élève à 25 346,96 €.

Si la compagnie met en vente 150 billets, alors on doit exclure les possibilités que 151 ou 152 personnes se présentent. On se limite alors à 82 % des cas, et on doit donc diviser chaque probabilité par 0,82. On obtient le tableau ci-dessous.

Nombre de réservations	147	148	149	150
Recette	24 990	25 160	25 330	25 500
Probabilité	0,085	0,183	0,305	0,427
Espérance gain	2 133,292 68	4 602,439 02	7 722,560 98	10 884,146 3

Dans ce cas, l'espérance du bénéfice de la compagnie s'élève à 25 342,44 €.

Pour espérer obtenir une recette maximale, la compagnie doit donc mettre en vente 151 billets.