Correction de l'exercice 79, page 300 du livre Hyperbole 1re

79 Voici les tarifs d'un théâtre.

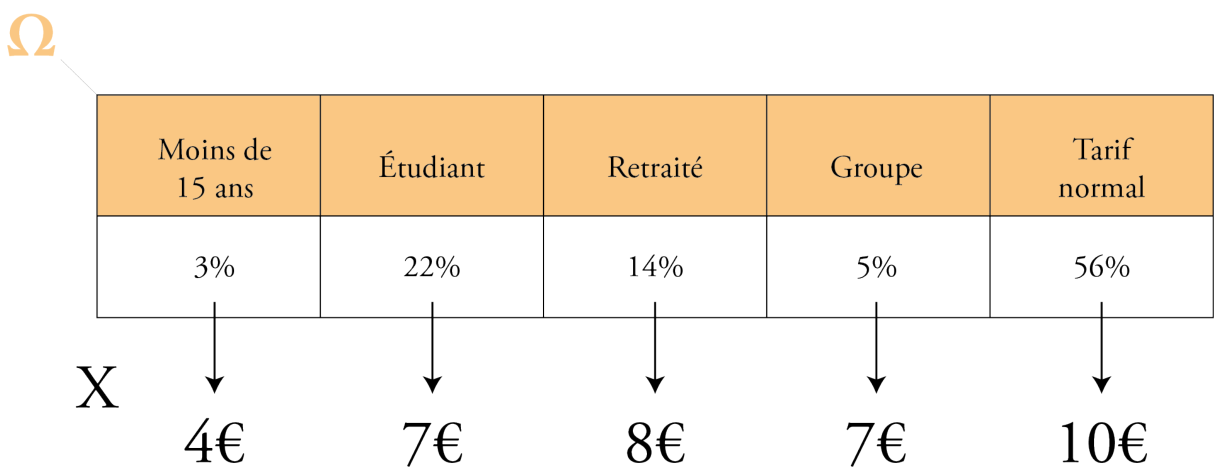
Catégories	Tarifs
Moins de 15 ans	4 €
Étudiant	7 €
Retraité	8 €
Groupe	7 €
Tarif normal	10 €

Une étude statistique a montré que les spectateurs se répartissent de la façon suivante.

Moins de 15 ans	Étudiant	Retraité	Groupe	Tarif normal
3 %	22 %	14 %	5 %	56 %

On choisit au hasard un spectateur de ce théâtre et on note sa catégorie.
On assimile la probabilité de chaque issue au pourcentage correspondant dans le tableau.
X est la variable aléatoire qui donne le tarif, en euro, payé par ce spectateur.

La variable aléatoire X est la fonction qui, à tout résultat de l'univers de l'expérience aléatoire qui consiste à choisir au hasard un spectateur du théâtre, associe le tarif payé en euro par ce spectateur.
L'univers de l'expérience, qui est dans le cas étudié l'ensemble de tous les spectateurs du théâtre, et la variable aléatoire X sont représentés ci-dessous :



La variable aléatoire X peut prendre 4 valeurs : 4, 7, 8 et 10 (euros).

La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 4, notée $P(X = 4)$, est égale à la probabilité que le spectateur choisi au hasard ait moins de 15 ans.
Donc : $P(X = 4) = 0{,}03$.

La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 7, notée $P(X = 7)$, est égale à la probabilité que le spectateur choisi au hasard soit un étudiant ou bénéficie du tarif Groupe.
Cependant, comme les événements "le spectateur choisi au hasard est un étudiant" et " le spectateur choisi au hasard bénéficie du tarif Groupe" sont des événements disjoints, la probabilité de leur union est la somme de leurs probabilités.
Donc : $P(X = 7) = 0{,}22 + 0{,}05 = 0{,}27$.

La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 8, notée $P(X = 8)$, est égale à la probabilité que le spectateur choisi au hasard soit retraité.
Donc : $P(X = 8) = 0{,}14$.

Enfin, la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 10, notée $P(X = 10)$, est égale à la probabilité que le spectateur choisi au hasard paie le tarif normal.
Donc : $P(X = 10) = 0{,}56$.

Attendu les résultats ci-dessus, la loi de probabilité de la variable aléatoire X est la loi présentée ci-dessous :

x_i	4	7	8	10
$p(X = x_i)$	0,03	0,27	0,14	0,56

L'espérance E(X) de cette loi est donnée par la relation :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} P(X = x_i) \times x_i$$

Donc : $E(X) = 0{,}03(4) + 0{,}27(7) + 0{,}14(8) + 0{,}56(10) = 0{,}12 + 1{,}89 + 1{,}12 + 5{,}6$
D'où : $E(X) = 8{,}73$

Comme la municipalité qui gère le théâtre a compté 3 000 spectateurs et que l'espérance est de 8,73 (gain moyen attendu par spectateur), la recette escomptée est de $3000 \times 8{,}73 = 26\ 190$ euros.
Ce montant étant supérieur aux 20 000 euros dépensés pour le fonctionnement du théâtre, ce dernier peut être considéré comme rentable.