Correction de l'exercice 77, page 300

77 Un sac contient trois billes numérotées 0, deux billes 1, une bille 2 et une bille 5.

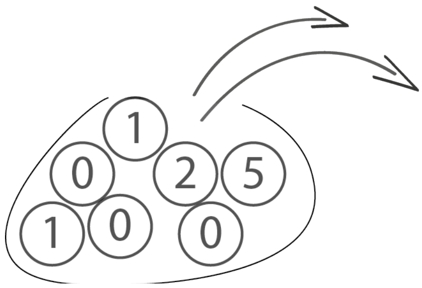
Un joueur tire au hasard successivement, et avec remise, deux billes de ce sac.

On note les numéros des billes tirées. Parmi les deux jeux ci-dessous, indiquer celui qui est le plus intéressant pour le joueur. Justifier.

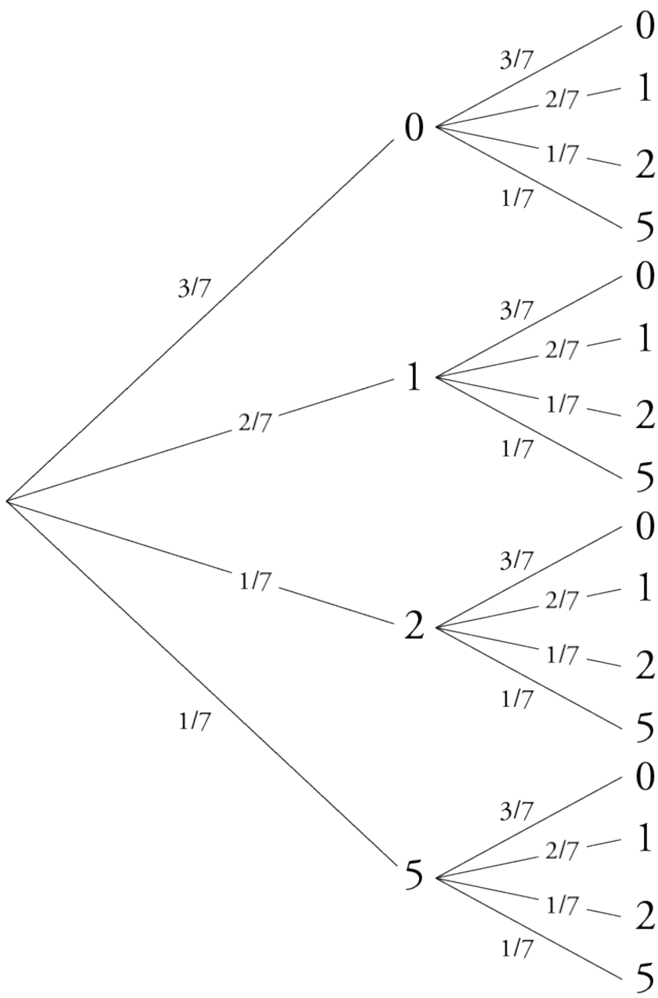
Jeu 1 : On gagne la somme des numéros tirés.

Jeu 2 : On gagne le produit des numéros tirés.

Traduisons la situation par un schéma.



Arbre de probabilités modélisant la situation.



L'arbre de probabilités ci-dessus permet de déterminer les probabilités de tous les événements de la forme "Le premier numéro tiré est le i et le second numéro tiré est le j" où i et j sont deux entiers prenant les valeurs 0, 1, 2 et 5.

Dans le tableau ci-dessus, on assimile k à l'événement : "le nombre tiré est k".

Dans les tableaux ci-dessous, on notera 51, par exemple, l'événement " Le premier numéro tiré est le 5 et le second numéro tiré est le 1"

Loi de probabilité détaillée avec la notation adoptée.

Événement	00	01	02	05
Probabilité	$3/7 \times 3/7 = 9/49$	$3/7 \times 2/7 = 6/49$	$3/7 \times 1/7 = 3/49$	$3/7 \times 1/7 = 3/49$

Événement	00	01	02	05
Probabilité	$2/7 \times 3/7 = 6/49$	$2/7 \times 2/7 = 4/49$	$2/7 \times 1/7 = 2/49$	$2/7 \times 1/7 = 2/49$

Événement	00	01	02	05
Probabilité	$1/7 \times 3/7 = 3/49$	$1/7 \times 2/7 = 2/49$	$1/7 \times 1/7 = 1/49$	$1/7 \times 1/7 = 1/49$

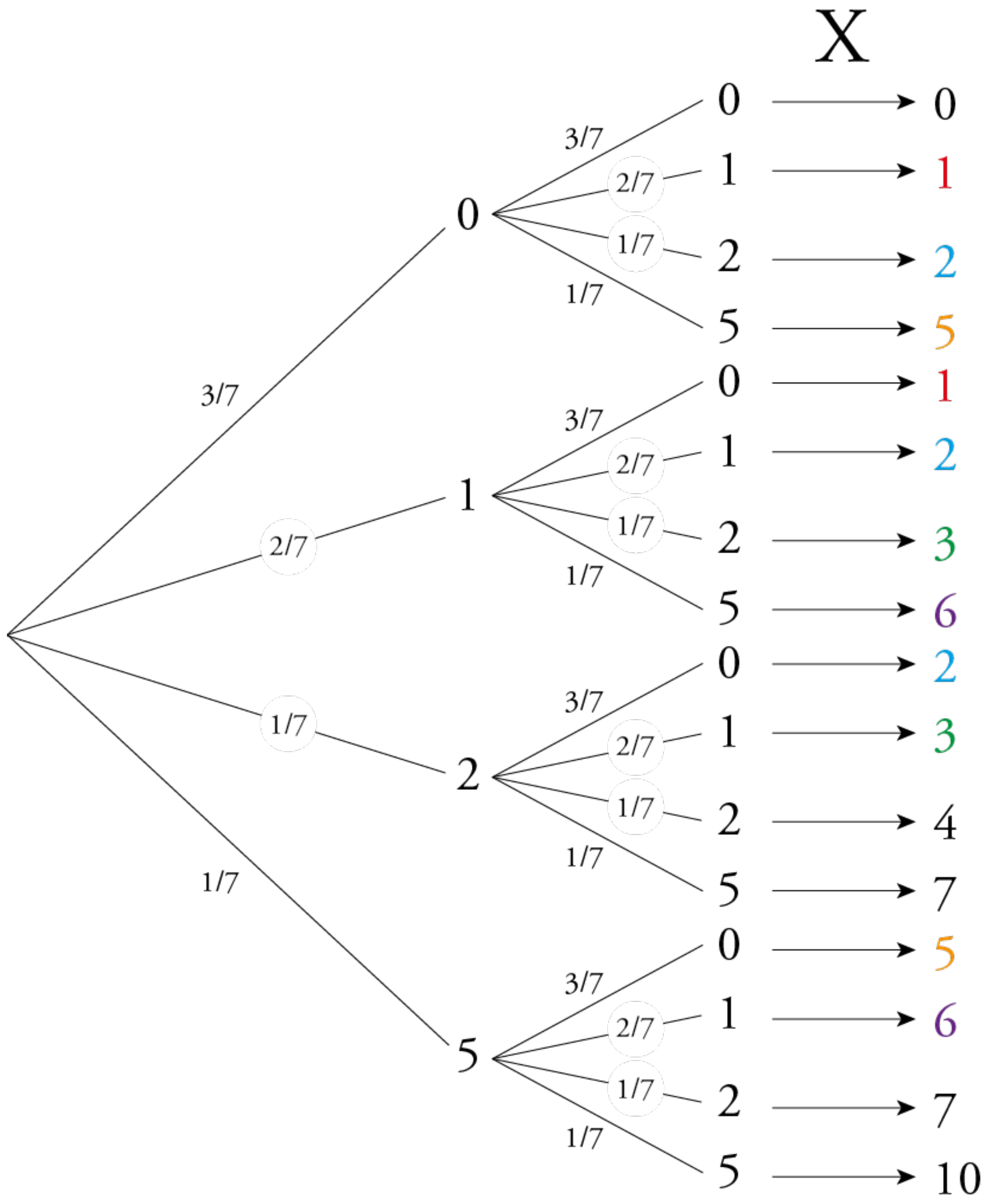
Événement	00	01	02	05
Probabilité	$1/7 \times 3/7 = 3/49$	$1/7 \times 2/7 = 2/49$	$1/7 \times 1/7 = 1/49$	$1/7 \times 1/7 = 1/49$

Considérons à présent le jeu 1 dans lequel on gagne la somme des numéros tirés et appelons X la variable aléatoire qui donne la somme.

Considérons ensuite le jeu 2 dans lequel on gagne le produit des numéros tirés et appelons Y la variable aléatoire qui donne le produit.

Représentons chacune des deux variables aléatoires X et Y.

Jeu 1



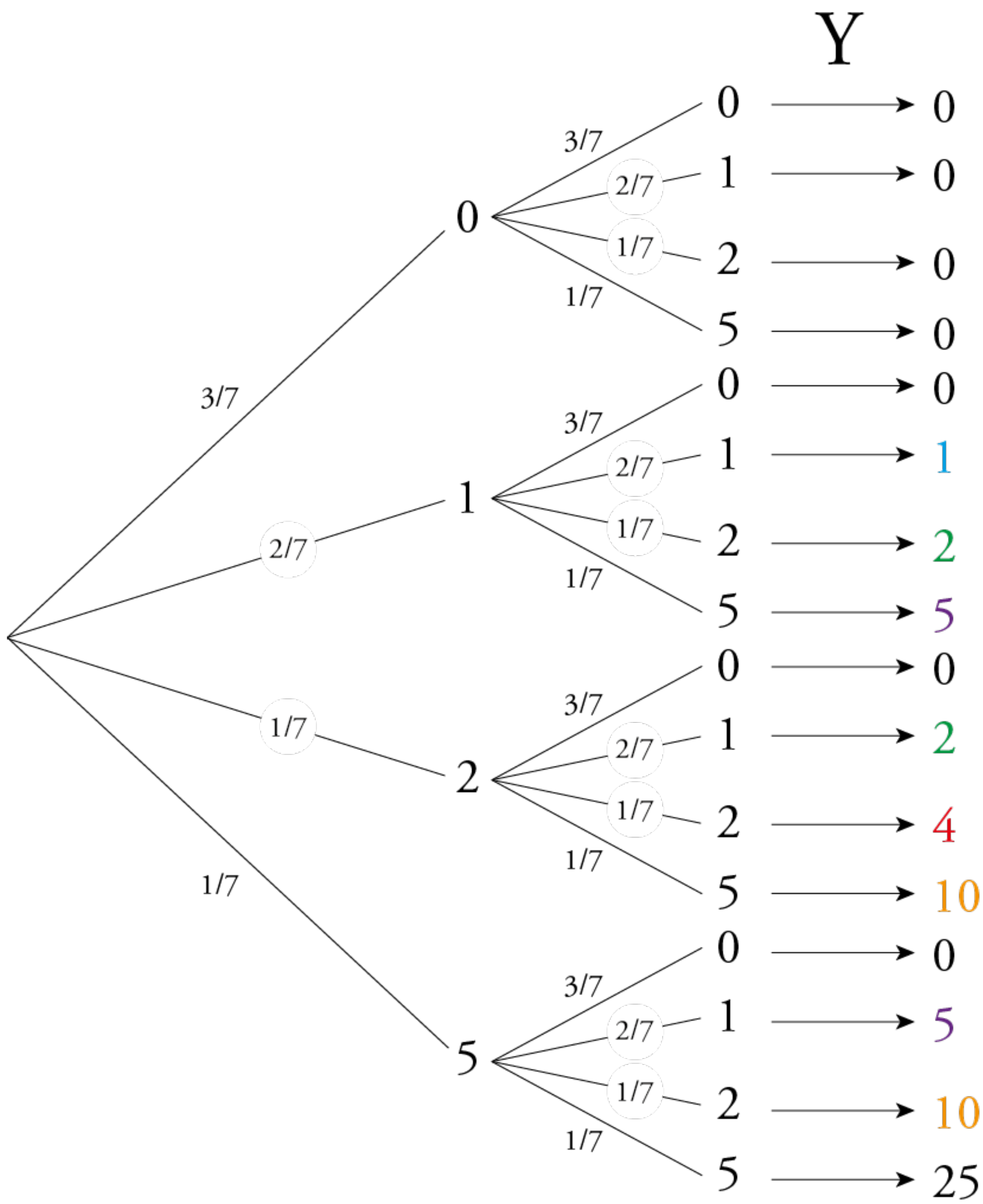
La variable aléatoire X peut prendre 9 valeurs : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 10.

Loi de probabilité de la variable aléatoire X

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	10
$P(X = x_i)$	9/49	12/49	10/49	4/49	1/49	6/49	4/49	2/49	1/49

Toutes ces probabilités se calculent trivialement à partir de l'arbre ci-dessus.

Jeu 2



La variable aléatoire Y peut prendre 7 valeurs : 0, 1, 2, 4, 5, 10 et 25.

Loi de probabilité de la variable aléatoire Y

y_i	0	1	2	4	5	10	25
$P(Y = x_i)$	33/49	4/49	4/49	1/49	4/49	2/49	1/49

Pour déterminer lequel des deux jeux est le plus favorable au joueur, il convient de déterminer les espérances E(X) et E(Y).
Le jeu le plus intéressant est celui où l'espérance est la plus grande.

Pour la loi de probabilités de X,

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	10
$P(X = x_i)$	9/49	12/49	10/49	4/49	1/49	6/49	4/49	2/49	1/49

nous avons :

E(X) = 9/49(0) + 12/49(1) + 10/49(2) +4/49(3)+ 1/49(4) + 6/49(5) + 4/49(6)+2/49(7) + 1/49(10) = 1/49[12+20+12+4+30+24+14+10) = 126/49

Pour la loi de probabilités de Y,

y_i	0	1	2	4	5	10	25
$P(Y = x_i)$	33/49	4/49	4/49	1/49	4/49	2/49	1/49

nous avons :

E(Y) = 33/49(0) + 4/49(1) + 4/49(2) + 1/49(4) + 4/49(5) + 2/49(10) + 1/49(25) = 1/49[4 + 8 + 4 + 20 + 20 + 25) = 81/49

Conclusion : Le jeu 1 est le jeu le plus intéressant pour le joueur.