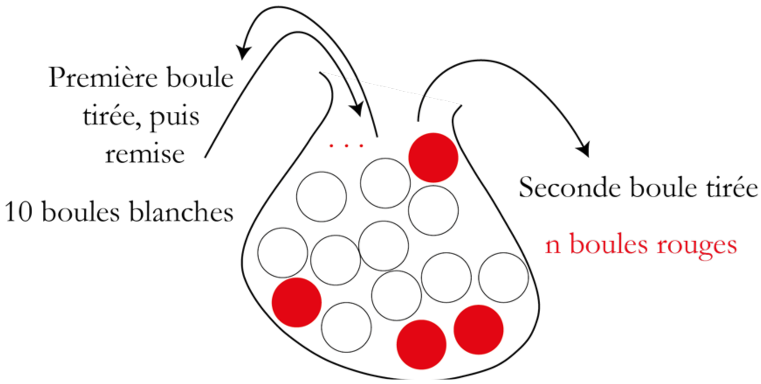
Évaluation sur les variables aléatoires

correction

Une urne contient dix boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur deux boules de l'urne, successivement et avec remise. A chaque tirage, aucune boule n'est favorisée. On note B l'événement : "Le joueur tire une boule blanche" et R l'événement : "Le joueur tire une boule rouge". Pour chaque boule blanche tirée, le joueur gagne 2 € et pour chaque boule rouge, il perd 3 €.

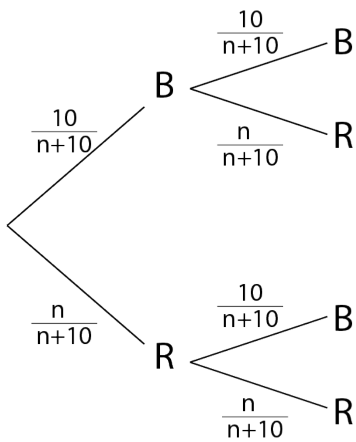


1) Déterminons la probabilité que le joueur tire une boule blanche lors du premier tirage.

   Comme il y a 10 boules blanches et n boules rouges pour un total de (n + 1) boules et comme la situation est une situation d'équiprobabilité (aucune boule n'est favorisée), on a trivialement : $P(B) = \frac{10}{n+10}$.

2) On a donc par ailleurs : $P(R) = \frac{n}{n+10}$.

3) Arbre pondéré.



4) Calculons les probabilités des événements B ∩ B, B ∩ R, R ∩ B et R ∩ R.

   On a : $P(B \cap B) = \frac{10}{n+10} \times \frac{10}{n+10} = \frac{100}{(n+10)^2}$

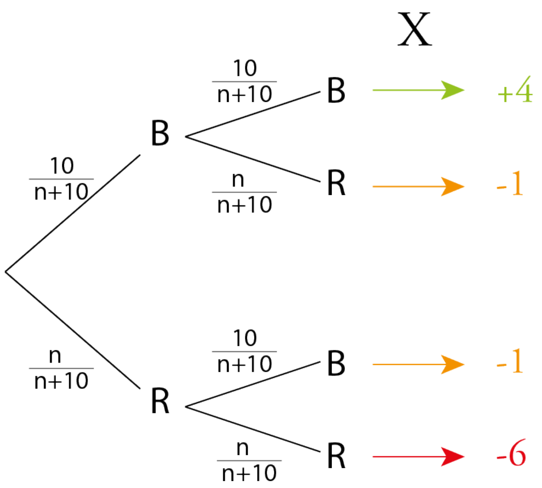
   De plus : $P(B \cap R) = P(R \cap B) = \frac{10}{n+10} \times \frac{n}{n+10} = \frac{10n}{(n+10)^2}$

Enfin : $P(R \cap R) = \frac{n}{n+10} \times \frac{n}{n+10} = \frac{n^2}{(n+10)^2}$

5) Loi de probabilités associée à l'expérience aléatoire.

Événement	B ∩ B	B ∩ R	R ∩ B	R ∩ R
Probabilité	$\frac{100}{(n+10)^2}$	$\frac{10n}{(n+10)^2}$	$\frac{10n}{(n+10)^2}$	$\frac{n^2}{(n+10)^2}$

On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique obtenu par le joueur.



6) La variable aléatoire X peut prendre 3 valeurs : -6, -1 et 4.

7) Démontrons que : $P(X = -1) = \frac{20n}{(10+n)^2}$.

On a : $P(X = -1) = P(B \cap R) + P(R \cap B) = \frac{10n}{(10+n)^2} + \frac{10n}{(10+n)^2} = \frac{20n}{(10+n)^2}$

8) Loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	-6	-1	+4
$P(X = x_i)$	$\frac{n^2}{(n+10)^2}$	$\frac{20n}{(10+n)^2}$	$\frac{100}{(n+10)^2}$

9) Calculons l'espérance E(X) de la variable aléatoire X.

$$E(X) = \frac{n^2}{(n+10)^2} \times (-6) + \frac{20n}{(10+n)^2} \times (-1) + \frac{100}{(n+10)^2} \times (4)$$

Donc : $E(X) = \frac{-6n^2 - 20n + 400}{(n+10)^2}$

10) Montrons que : $\underbrace{-6n^2 - 20n + 400}_{A} = \underbrace{6(n+10)\left(\frac{20}{3} - n\right)}_{B}$.

$$B = 6(n+10)\left(\frac{20}{3} - n\right) = (6n+60)\left(\frac{20}{3} - n\right) = 40n - 6n^2 + 400 - 60n$$

$B = -6n^2 - 20n + 400 = A$ cqfd

11) Pour que l'espérance E(X) soit strictement positive, il faut que $\frac{20}{3} - n > 0$, donc :

$$n < \frac{20}{3} \approx 6{,}7$$

Il faut un nombre de boules rouges compris entre 2 et 6, valeurs incluses, pour l'espérance soit strictement positive.

12) Cours

Une variable aléatoire X est une fonction qui associe à tous les résultats de l'univers d'une expérience aléatoire un nombre réel.