Produit scalaire dans le plan

II. Produit scalaire et norme

II.1. Propriétés

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les vecteurs $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ étant deux vecteurs de base orthonormés du plan.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ deux vecteurs supposés non nuls et colinéaires dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Autrement dit, ces deux vecteurs ont même direction, mais pas même sens ni même longueur.

Si les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ont même sens, alors : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Si les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Exemples

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB$ (Vecteurs colinéaires de même sens)

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -OA \times OB$ (Vecteurs colinéaires de sens contraire)

II.2. Identités remarquables

Les produits scalaires mentionnés ci-dessous rappellent trois identités remarquables usuelles :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

II.3. Définition du produit scalaire à l'aide de la norme

L'expression ci-dessous est souvent utilisée pour définir le produit scalaire. Sa complexité, comparée à celle de l'expression analytique xx' + yy' introduite dans la culture anglo-saxonne, constitue l'une des raisons de la défiance des élèves à l'égard du produit scalaire.

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$