PROBLÈME

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la droite (D) d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ et le point $M(x_0;y_0)$. On note $(x_H;y_H)$ le projeté orthogonal du point M sur la droite (D).

1. Représenter par un schéma clair et soigné les hypothèses du problème.
2. A l'aide des hypothèses de l'énoncé, déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à la droite (D).
3. Exprimer $\overrightarrow{HM}$ en fonction des données de l'énoncé.
4. En exprimant l'appartenance du point H à la droite (D), déterminer une relation (1) entre les coordonnées x_H et y_H du point H et les réels a, b etc.
5. En exprimant la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$, déterminer une relation (2) entre x_0, y_0, x_H, y_H, a, b et c.
6. Montrer que les relations (1) et (2) sont équivalentes au système de deux équations linéaires à deux inconnues x_H et y_H suivant :
$$\begin{cases} ax_H+by_H+c=0 \\ bx_H-ay_H=bx_0-ay_0 \end{cases}$$
7. Déterminer x_H et y_H en fonction de x_0, y_0, a, b et c.
8. Démontrer que $x_H-x_0=-\frac{a}{a^2+b^2}(ax_0+by_0+c)$.
9. Exprimer y_H-y_0 en fonction de x_0, y_0, a, b et c.
10. En déduire $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2$.
11. On note $|x|$ la distance à zéro du nombre réel x ; $|x|$ se lisant "valeur absolue de x".
    11.a. Déterminer $|-3|$ et $|5|$.
    11.b. Résoudre sur l'ensemble des réels positifs l'équation $x^2=a^2$ où a est un réel quelconque.
12. Montrer que $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$