Vecteurs et colinéarité

Déterminant et colinéarité

Exercice 6

Soient $\vec{u}\binom{3}{4}$, $\vec{v}\binom{-9}{-8}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminons si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

   Calculons $det(\vec{u}\,,\vec{v})$.

   $det(\vec{u}\,,\vec{v}) = \begin{vmatrix}3 & -9\\4 & -8\end{vmatrix} = 3\times(-8)-(-9)\times 4 = -24+36 = 12 \neq 0$

   Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2. Déterminons si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

   Calculons $det(\vec{u}\,,\vec{w})$.

   $det(\vec{u}\,,\vec{w}) = \begin{vmatrix}3 & \frac{3}{2}\\4 & 2\end{vmatrix} = 3\times 2-\frac{3}{2}\times 4 = 6-3\times 2 = 6-6 = 0$

   Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

3. Déterminons si les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

   Calculons $det(\vec{v}\,,\vec{w})$.

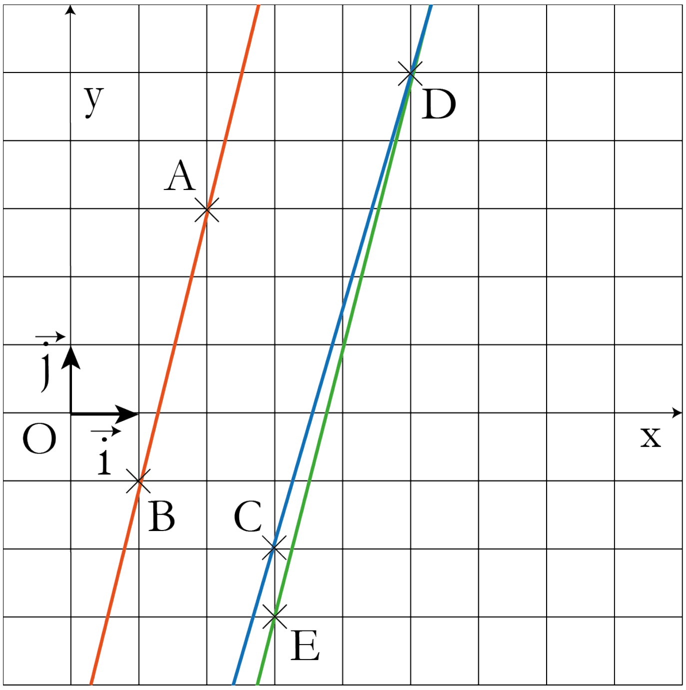
   $det(\vec{v}\,,\vec{w}) = \begin{vmatrix}-9 & \frac{3}{2}\\-8 & 2\end{vmatrix} = -9\times 2-\frac{3}{2}\times(-8) = -18+3\times 4 = -18+12 = -6 \neq 0$

   Donc les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Parallélisme et colinéarité

Exercice 7

Soient A(2 ; 3), B(1 ; -1), C(3 ; -2) et D(5 ; 5) définis dans une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$.



1. Déterminons si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

   Déterminons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

   $\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{1-2}{-1-3} = \binom{-1}{-4}$ et $\overrightarrow{CD} = \binom{x_D - x_C}{y_D - y_C} = \binom{5-3}{5-(-2)} = \binom{2}{7}$.

   Calculons $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

   $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = -1 \times 7 - 2 \times (-4) = -7 + 8 = 1 \neq 0.$

   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

2. Déterminons l'ordonnée y_E du point E(3 ; y_E) tel que (AB)//(ED).

   Si (AB)//(ED), alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires. Donc : $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}) = 0$.

   Or $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}) = \begin{vmatrix} -1 & 5-3 \\ -4 & 5-y_E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5-y_E \end{vmatrix} = -1 \times (5 - y_E) - 2 \times (-4)$

   $= -5 + y_E + 8 = y_E + 3$

   Donc : $y_E + 3 = 0$.

   En résultat : $y_E = -3$

Alignement et colinéarité

Exercice 8

Soient A(0 ; -2), B(4 ; 1/2) et C(9 ; 4) définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Déterminons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ \frac{1}{2}-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-0 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Calculons $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ \frac{5}{2} & 6 \end{vmatrix} = 4 \times 6 - 9 \times \left(\frac{5}{2}\right) = 24 - \frac{45}{2} = \frac{48}{2} - \frac{45}{2} = \frac{48}{2} \neq 0.$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.