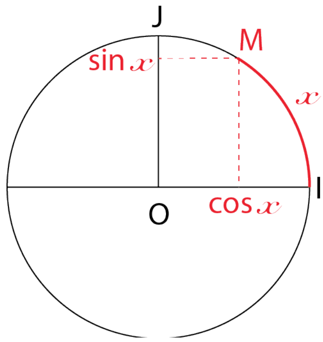
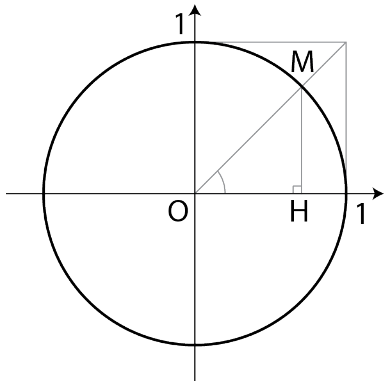
cosinus et sinus d'angles usuels

1. Détermination de $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

   Pour déterminer le cosinus ou le sinus d'un angle, il est tout d'abord impératif de dessiner un cercle trigonométrique (C) ; le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ étant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M situé sur le cercle (C).



   Pour déterminer $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, on place sur le cercle trigonométrique (C) le point M, image du réel $\frac{\pi}{4}$ sur (C) ou tout simplement le point M tel que $(\overrightarrow{OH}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$.

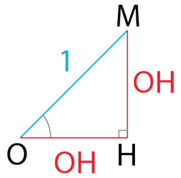


Sur la figure ci-dessus, $(\overrightarrow{OH}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{HM}\ ;\ \overrightarrow{HO}) = \frac{\pi}{2}$ car H est le projeté orthogonal de M sur (OI).
La somme des mesures des angles étant égale à π dans un triangle, on a : $(\overrightarrow{MO}\ ;\ \overrightarrow{MH}) + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$.
Donc : $(\overrightarrow{MO}\ ;\ \overrightarrow{MH}) = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Comme $(\overrightarrow{MO}\ ;\ \overrightarrow{MH}) = (\overrightarrow{OH}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$, le triangle OHM est un triangle isocèle en H.
Le triangle OHM étant un triangle isocèle en H, on a : <u>OH = OM</u>.

<u>Déterminons OH</u>

D'après la figure ci-contre, OHM est un triangle rectangle en H,
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $OH^2 + OH^2 = 1^2$.
D'où : $2 \times OH^2 = 1$.
Ainsi : $OH^2 = \frac{1}{2}$
Par conséquent : $OH = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
On a donc : $OH = HM = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

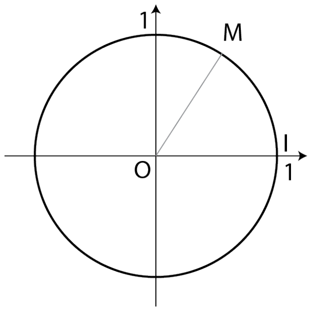


Or : $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = OH et $sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ = HM, d'où :

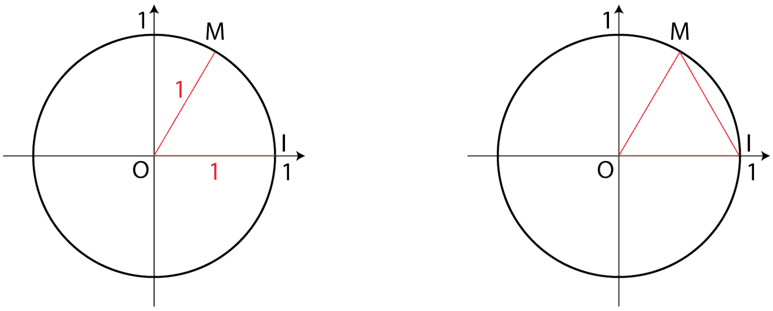
$$\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2. Détermination de $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Pour déterminer $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, on cherche à placer sur le cercle trigonométrique (C) le point M, image du réel $\frac{\pi}{3}$ sur (C) ou tout simplement le point M tel que $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{3}$ (Angle de 60°).

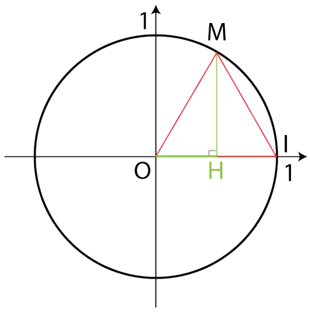


On remarque que OI = OM = 1. Or, un triangle équilatéral possède trois angles de mesure $\frac{\pi}{3}$.



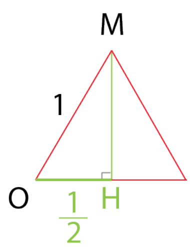
On construit M à l'aide du compas afin d'obtenir un triangle équilatéral OIM tel que ci-dessus.
Ainsi, la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM})$ est égale à $\frac{\pi}{3}$.

Dans le triangle équilatéral OIM, la hauteur issue du sommet M qui intercepte la droite (OI) coupe [OI] en son milieu H.



On a donc : OH = 1/2, c'est-à-dire : $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}}$

<u>Déterminons HM</u>



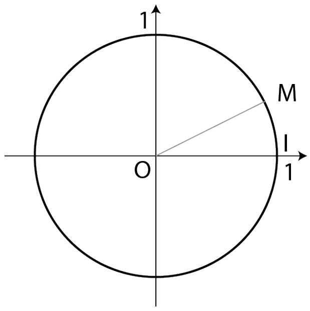
Dans le triangle OHM rectangle en H ci-contre, d'après le théorème de Pythagore, on a : $OH^2 + HM^2 = 1^2$, d'où : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + HM^2 = 1$.

Par un calcul élémentaire, il vient : $HM^2 = \frac{3}{4}$ et $HM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

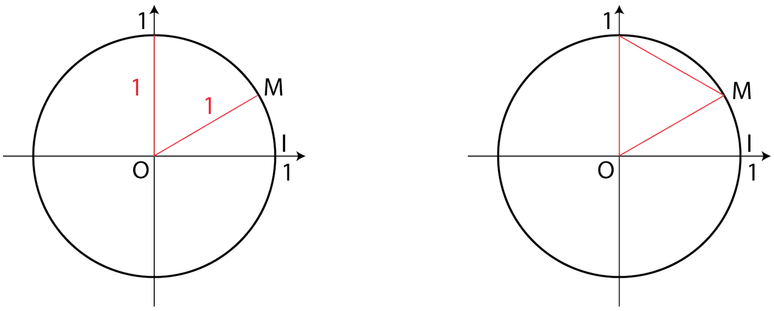
En résultat : $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

3. Détermination de $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Pour déterminer $cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$, on cherche à placer sur le cercle trigonométrique (C) le point M, image du réel $\frac{\pi}{6}$ sur (C) ou tout simplement le point M tel que $\left(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{6}$ (Angle de 30°).

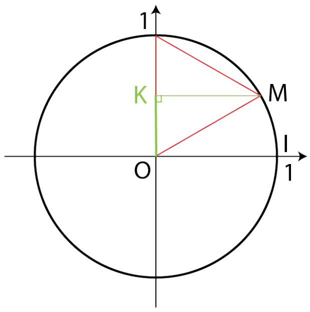


On remarque que OJ = OM = 1. Or, un triangle équilatéral possède trois angles de mesure $\frac{\pi}{3}$.



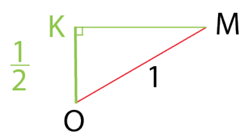
On construit M à l'aide du compas afin d'obtenir un triangle équilatéral OMJ tel que ci-dessus.
Ainsi, la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$ est égale à $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Dans le triangle équilatéral OMJ, la hauteur issue du sommet M qui intercepte la droite (OJ) coupe [OJ] en son milieu K.



On a donc : OK = 1/2, c'est-à-dire : $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}}$

<u>Déterminons KM</u>



Dans le triangle OKM rectangle en K ci-contre, d'après le théorème de Pythagore, on a : $OK^2 + KM^2 = 1^2$, d'où : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + KM^2 = 1$.

Par un calcul élémentaire, il vient : $KM^2 = \frac{3}{4}$ et $KM = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

En résultat : $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$