Produit scalaire dans le plan

I. Approche pragmatique (anglo-saxonne) du produit scalaire

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les vecteurs $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$ étant deux vecteurs de base orthonormés du plan.

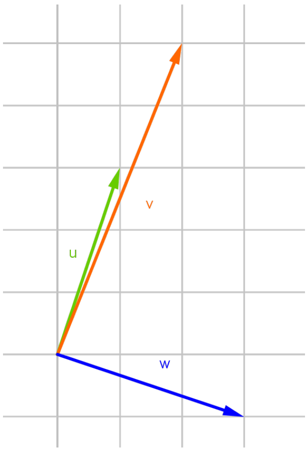
I.1. Expression analytique du produit scalaire

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ deux vecteurs supposés non nuls dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ s'écrit : $\vec{u}.\vec{v}$. On lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$.

Comment calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$?

$$\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=xx'+yy'$$

<u>Applications</u>



<u>A.1</u>

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ trois vecteurs définis par rapport à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

$\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=1\times 2+3\times 5=2+15=17$

$\vec{u}.\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=1\times 3+3\times(-1)=3-3=0$

$\vec{v}.\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=2\times 3+5\times(-1)=6-5=1$

<u>A.2</u>

On considère les vecteurs $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$.

$\vec{\imath}.\vec{\imath}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\times 1+0\times 0=1$

$\vec{\jmath}.\vec{\jmath}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\times 0+1\times 1=1$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\times 0+0\times 1=0$

Nous notons que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs $\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$. Les produits scalaires de ces vecteurs respectifs sont nuls d'après les calculs réalisés…
La notion d'orthogonalité est en effet sous-jacente à la notion de produit scalaire !

I.2. Produit scalaire et opérations

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x"\\y"\end{pmatrix}$ trois vecteurs supposés non nuls dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et λ un réel non nul.

I.2.1. Propriété 1 (commutativité du produit scalaire)

$$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}\qquad(1)$$

Démonstration

$\vec{u}.\vec{v} = \binom{x}{y}.\binom{x'}{y'} = xx' + yy' = x'x + y'y = \binom{x'}{y'}.\binom{x}{y} = \vec{v}.\vec{u}$

Application

Soient $\vec{u}\binom{1}{3}$ et $\vec{v}\binom{2}{5}$ deux vecteurs du plan.

$\vec{u}.\vec{v} = \binom{1}{3}.\binom{2}{5} = 1 \times 2 + 3 \times 5 = 2 + 15 = 17$

$\vec{v}.\vec{u} = \binom{2}{5}.\binom{1}{3} = 2 \times 1 + 5 \times 3 = 2 + 15 = 17$

I.2.2. Propriété 2

$$(\overrightarrow{\lambda u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) \qquad (2)$$

Démonstration

$(\overrightarrow{\lambda u}).\vec{v} = \binom{\lambda x}{\lambda y}.\binom{x'}{y'} = \lambda xx' + \lambda yy' = \lambda(xx' + yy')$
$\lambda(\vec{u}.\vec{v}) = \lambda\binom{x}{y}.\binom{x'}{y'} = \lambda(xx' + yy')$
$\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \binom{x}{y}.\binom{\lambda x'}{\lambda y'} = \lambda xx' + \lambda yy' = \lambda(xx' + yy')$
Ces trois expressions sont toutes identiques.

Application

Soient $\vec{u}\binom{1}{3}$ et $\vec{v}\binom{2}{5}$ deux vecteurs du plan.

$(3\vec{u}).\vec{v} = \binom{3}{9}.\binom{2}{5} = 3 \times 2 + 9 \times 5 = 6 + 45 = 51$
$\vec{u}.(3\vec{v}) = \binom{1}{3}.\binom{6}{15} = 1 \times 6 + 3 \times 15 = 6 + 45 = 51$
$3(\vec{u}.\vec{v}) = 3\binom{1}{3}.\binom{2}{5} = 3(1 \times 2 + 3 \times 5) = 3(2 + 15) = 3 \times 17 = 51$

Nous avons bien vérifié que : $(\overrightarrow{3u}).\vec{v} = 3(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(3\vec{v})$

I.2.3. Propriété 3

$$(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} \qquad (3)$$

Démonstration

$(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \left(\binom{x}{y} + \binom{x'}{y'}\right).\binom{x"}{y"} = \binom{x + x'}{y + y'}.\binom{x"}{y"} = (x + x')x" + (y + y')y"$
$(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = xx$+x'x $+ yy" + y'y"$

$\vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w} = \binom{x}{y}.\binom{x"}{y"} + \binom{x'}{y'}.\binom{x"}{y"} = xx"$+yy" $+ x'x" + y'y"$, d'où l'égalité (3).

Application

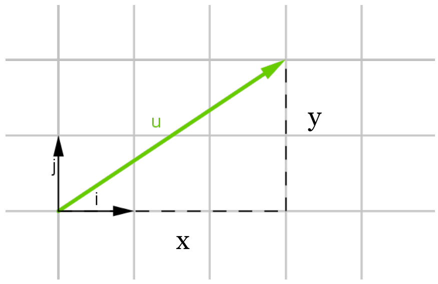
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ trois vecteurs définis par rapport à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

$(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2\\3+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = -3+4 = 1$

$\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 3+3+(-6)+1 = 1$, d'où l'égalité (3).

I.3. Produit scalaire et norme d'un vecteur

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan défini par rapport à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



On rappelle que la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est la longueur de ce vecteur. On la note : $\|\vec{u}\|$ (ce que l'on lit "norme du vecteur $\vec{u}$ ").
Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ quelconque, nous avons naturellement : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

D'après la figure ci-dessus et par application du théorème de Pythagore au triangle rectangle construit, nous savons que le carré de la longueur du vecteur $\vec{u}$ est égal à la somme des carrés des longueurs x et y. Donc : $\|\vec{u}\|^2 = x^2+y^2$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

<u>Calculons $\vec{u}.\vec{u}$</u>

On a :

$$\vec{u}.\vec{u} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x^2+y^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Autrement dit, le carré de la norme d'un vecteur est égal à son produit scalaire par lui-même...

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u}$$

Par ailleurs : Pour tout nombre réel λ et tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|.\|\vec{u}\|$

Applications

A.1. Considérons les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$. Déterminons $\|\vec{\imath}\|$, $\|\vec{\jmath}\|$ *et* $\|\vec{u}\|$.

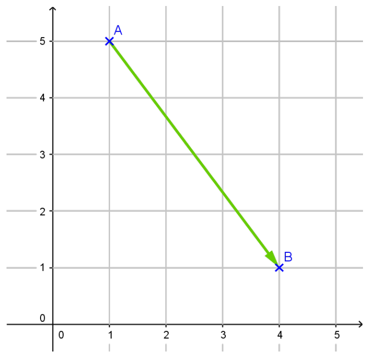
A l'aide de la formule $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$, nous obtenons immédiatement : $\|\vec{\imath}\| = 1$, $\|\vec{\jmath}\| = 1$

De plus : $\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$.

A.2. Considérons le vecteur $\vec{u}\binom{1}{3}$. Déterminons $\|\vec{u}\|$.

$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}.\vec{u} = \binom{1}{3}.\binom{1}{3} = 1 + 9 = 10$, donc : $\|\vec{u}\| = \sqrt{10}$

A.3. Considérons les points A(1 ; 5) et B(4 ; 1). Déterminons $\overrightarrow{AB}$ et $\|\overrightarrow{AB}\|$.



On a : $\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{4-1}{1-5} = \binom{3}{-4}$

D'où : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \binom{3}{-4}.\binom{3}{-4} = 9 + 16 = 25$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{25} = 5$

I.4. Produit scalaire et orthogonalité

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs supposés non nuls dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

Ainsi, en plus du critère dont nous disposions pour étudier la colinéarité de deux vecteurs (notion de parallélisme), nous disposons dorénavant d'un critère pour étudier l'orthogonalité...

<u>Applications</u>

A.1. On considère les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$.

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \binom{1}{0}.\binom{0}{1} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0.$

A.2. On considère les vecteurs $\vec{u}\binom{4}{-3}$ et $\vec{v}\binom{2}{3}$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?

$\vec{u}.\vec{v} = \binom{4}{-3}.\binom{2}{3} = 4 \times 2 + (-3) \times 3 = 8 - 9 = -1 \neq 0$, donc les vecteurs $\vec{u}\binom{4}{-3}$ et $\vec{v}\binom{2}{3}$ ne sont pas orthogonaux.

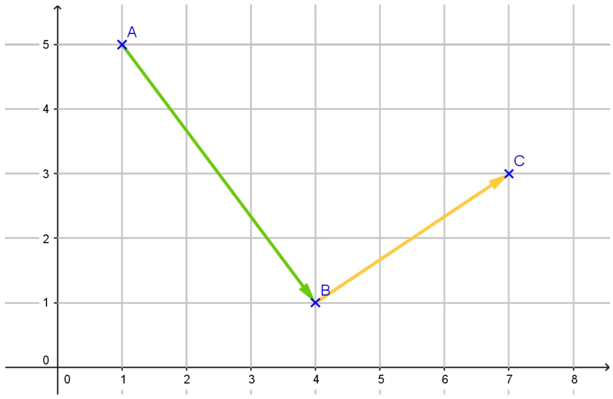
A.3. On considère les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{-3}$ et $\vec{v}\binom{6}{2}$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?

$\vec{u}.\vec{v} = \binom{1}{-3}.\binom{6}{2} = 6 - 6 = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{-3}$ et $\vec{v}\binom{6}{2}$ sont orthogonaux.

A.4. On considère les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{-6}{3}$. Ces vecteurs sont-ils orthogonaux ?

$\vec{u}.\vec{v} = \binom{1}{2}.\binom{-6}{3} = 1 \times (-6) + 2 \times 3 = -6 + 6 = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux.

A.5. On considère les points A(1 ; 5), B(4 ; 1) et C(7 ; 3). Déterminer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. Le triangle ABC est-il rectangle en B?



On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-4 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 - 8 = 1 \neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ n'étant pas orthogonaux, le triangle ABC n'est pas rectangle en B.