Synthèse de méthodes : Équations et inéquations

1. Résolution d'équations

Qu'est-ce qu'une équation ?

Une équation est une relation d'égalité comportant une ou plusieurs inconnues qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs des inconnues. Résoudre une équation consiste à déterminer la ou les valeurs pour lesquelles la relation est vraie.

Exemples

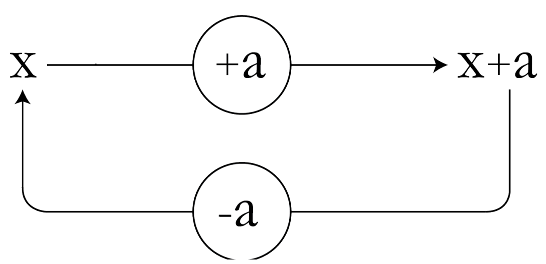
Soit l'équation $3x - 9 = 0$ (E_1)
Cette équation établit une relation d'égalité entre $3x - 9$ (x étant appelé variable ou inconnue) et zéro.
Posons $A = 3x - 9$.
Pour $x = 2$, on a : $A = 3(2) - 9 = 6 - 9 = -3$, donc $A \neq 0$. La relation $3x - 9 = 0$ n'est pas vraie. On dit que le nombre 2 n'est pas solution de l'équation.
Pour $x = 3$, on a : $A = 3(3) - 9 = 9 - 9 = 0$. La relation $3x - 9 = 0$ est vraie. On dit que le nombre 3 est solution de l'équation.

Soit l'équation $x^2 = 9$ (E_2)
Cette équation établit une relation d'égalité entre x^2 et 9.
Posons $A = x^2$.
Pour $x = -3$, on a : $A = (-3)^2 = 9$, donc la relation $x^2 = 9$ est vraie. -3 est solution de l'équation (E_2).
Pour $x = 3$, on a : $A = (3)^2 = 9$, donc la relation $x^2 = 9$ est vraie. 3 est solution de l'équation (E_2).
Pour $x = 2$, on a : $A = (2)^2 = 4 \neq 9$. La relation $x^2 = 9$ est fausse. On dit que le nombre 2 n'est pas solution de l'équation.

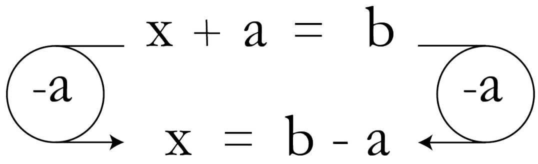
Soit l'équation $x + y = 4$ (E_3)
Cette équation établit une relation d'égalité entre $x + y$ et 4.
Posons $A = x + y$.
Pour $x = 2$ et $y = 3$, on a : $A = 2 + 3 = 5$, donc $A \neq 4$. La relation $x + y = 4$ n'est pas vraie. On dit que le couple (2 ; 3) n'est pas solution de l'équation.
Pour $x = 3$ et $y = 1$, on a : $A = 3 + 1 = 4$, donc $A = 0$. La relation $x + y = 4$ est vraie. On dit que le couple (3 ; 1) est solution de l'équation.
On note que les couples (0 ; 4), (2 ; 2), (-1 ; 4), (0,25 ; 3,75), etc. sont solutions de l'équation. L'équation (E_3) possède une infinité de couples solutions.

1.1. Résolution d'une équation du type x + a = b

Principe de résolution : pour résoudre ce type d'équation, il est nécessaire de s'interroger sur la manière dont a été construite l'expression algébrique $x + a$ afin de pouvoir la déconstruire et obtenir x.



Pour construire l'expression algébrique x + a à partir de la valeur x, on ajoute a au nombre x. Par conséquent, pour retrouver la valeur de x à partir du nombre x + a, il faut déconstruire l'expression x + a en enlevant a. C'est ce principe qui est utilisé pour résoudre l'équation x + a = b en prenant soin de préserver l'égalité par une même transformation des membres de gauche et de droite.

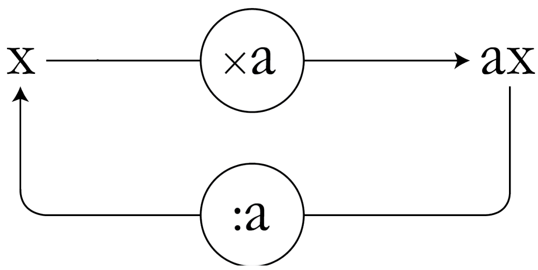


<u>Exemple d'énoncé</u> : Résoudre l'équation x + 14 = 9.

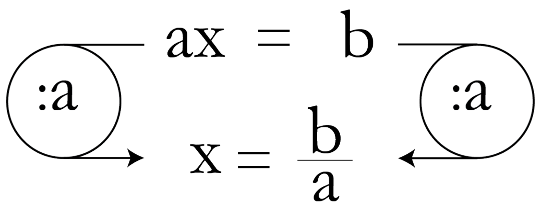
Rédaction de la résolution	*Éléments de méthode*
Résolvons x + 14 = 9 (E).	*Je dis ce que je sais et ce que je fais*
x + 14 = 9 ⇔ x = 9 - 14 = -5	*Je fais ce que je dis*
En résultat, (E) a pour solution -5.	*Je présente mon résultat*

1.2. Résolution d'une équation du type x + a = b

Principe de résolution : pour résoudre ce type d'équation, il est nécessaire de s'interroger sur la manière dont a été construite l'expression algébrique ax afin de pouvoir la déconstruire et obtenir x.



Pour construire l'expression algébrique ax à partir de la valeur x, on multiplie x par le nombre a. Par conséquent, pour retrouver la valeur de x à partir du nombre ax, il faut déconstruire l'expression ax en la divisant par a. C'est ce principe qui est utilisé pour résoudre l'équation ax = b, comme ci-dessous :

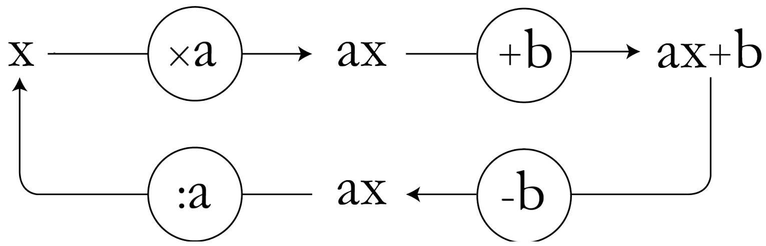


<u>Exemple d'énoncé</u> : Résoudre l'équation 24x = 16.

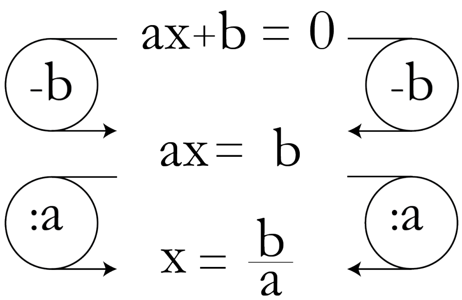
Rédaction de la résolution	*Éléments de méthode*
Résolvons 24x = 16 (E).	*Je dis ce que je sais et ce que je fais*
24x = 16 ⇔ $x = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$	*Je fais ce que je dis*
En résultat, (E) a pour solution $\frac{2}{3}$.	*Je présente mon résultat*

1.3. Résolution d'une équation du type ax + b = 0

Ce type d'équation se résout selon le même principe que mentionné. On regarde comment se construit ax + b et on déconstruit l'expression pour retrouver x.



Pour construire l'expression algébrique ax + b à partir de la valeur x, on multiplie x par le nombre a, puis on ajoute b au résultat obtenu Par conséquent, pour retrouver la valeur de x à partir du nombre ax + b, il faut déconstruire l'expression ax + b en soustrayant b, puis en divisant par a.



<u>Exemple d'énoncé</u> : Résoudre l'équation -9x + 12 = 0.

Rédaction de la résolution	*Éléments de méthode*
Résolvons -9x + 12 = 0 (E).	*Je dis ce que je sais et ce que je fais*
-9x + 12 = 0 ⇔ -9x = -12 ⇔ $x = \frac{-12}{-9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$	*Je fais ce que je dis*
En résultat, (E) a pour solution $\frac{4}{3}$.	*Je présente mon résultat*

1.4. Résolution d'une équation du type ax + b = cx + d

Toutes les équations du type ax + b = cx + d se résolvent facilement en s'arrangeant pour se ramener à une équation du type ax + b = 0.

1.5. Résolution d'une équation du type (ax + b)(cx + d) = 0.

Toutes les équations du type (ax + b)(cx + d) = 0 se résolvent en s'arrangeant pour se ramener à la résolution de deux équations du type ax + b = 0.

<u>Cours</u>

A × B = 0 ⇔ A = 0 ou B =0

Exemple d'énoncé : Résoudre l'équation $(3x + 9)(2x - 4) = 0$ (E)

Rédaction de la résolution

Résolvons $(3x + 9)(2x - 4) = 0$ (E).
$(3x + 9)(2x - 4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 9 = 0$ ou $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = -9$ ou $2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{-9}{3} = -3$ ou $x = \frac{4}{2} = 2$.
En résultat, (E) a pour solutions -3 et 2.

1.6. Résolution d'une équation du type (ax + b)/(cx + d) = 0.

Ce type d'équation est simple à résoudre car $(ax + b)(cx + d) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$.

Cours

$A/B = 0 \Leftrightarrow A = 0$

1.7. Résolution d'une équation du type $x^2 = a$.

Si $a < 0$, alors $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

Si $a = 0$, alors $x^2 = 0$ admet pour solution unique le nombre 0.

Si $a > 0$, alors $x^2 = a$ admet deux solutions distinctes $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

1.8. Résolution d'une équation de type inconnu.

Pour résoudre une équation de type inconnu, il convient de transformer la relation d'égalité de manière à se ramener à un type connu. Il est donc indispensable de maîtriser le calcul algébrique, ainsi que la factorisation et le développement de telles expressions.

Synthèse de cours sur les connecteurs logiques

Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont des connecteurs logiques utilisés pour l'articulation des raisonnements mathématiques et, en particulier, la résolution d'équations.

Le symbole $\Rightarrow$ se lit "Si..., alors" ou "implique".

Le symbole $\Leftrightarrow$ se lit "si et seulement si" ou "équivaut à".

Exemple 1

Considérons l'assertion : "Tous les hommes sont mortels."

Implication directe
Si A est un homme, alors A est mortel.
On peut écrire à l'aide du connecteur logique $\Rightarrow$: "A est un homme $\Rightarrow$ A est mortel."

Implication réciproque
L'implication réciproque n'est pas vraie ! Si A est mortel A, alors n'est pas nécessairement un homme. Il peut s'agir d'un perroquet. " A est mortel $\Rightarrow$ A est un homme." est faux.

Contraposée
En revanche, une chose est certaine, si A n'est pas mortel, alors A n'est pas un homme.
La contraposée de "A est un homme $\Rightarrow$ A est mortel" qui s'écrit "A n'est pas mortel $\Rightarrow$ A n'est pas un homme" est toujours vraie.

Exemple 2

Considérons l'équation : $4x = 12$.

Si $4x = 12$, alors, en divisant les membres situés à gauche et à droite de l'égalité par 4 afin de bien préserver l'égalité, on obtient $x = 12/4 = 3$. On peut donc écrire : $4x = 12 \Rightarrow x = 12/4 = 3$.
Réciproquement, si $x = 3$, alors $4x = 12$. D'où l'écriture : $x = 3 \Rightarrow 4x = 12$.

On a : $4x = 12 \Rightarrow x = 3$ et $x = 3 \Rightarrow 4x = 12$, donc : $4x = 12 \Leftrightarrow x = 3$

En conclusion, dans la résolution d'une équation, l'articulation des étapes de raisonnement peut s'effectuer, toutefois avec la prudence nécessaire à tout raisonnement, à l'aide du connecteur $\Leftrightarrow$. Ici : $4x = 12 \Leftrightarrow x = 12/4 = 3$

2. Résolution d'inéquations

Qu'est-ce qu'une inéquation ?

Une inéquation est une relation d'inégalité comportant une ou plusieurs inconnues qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs des inconnues. Résoudre une inéquation consiste à déterminer la ou les valeurs pour lesquelles la relation est vraie.

Cours - Inégalité

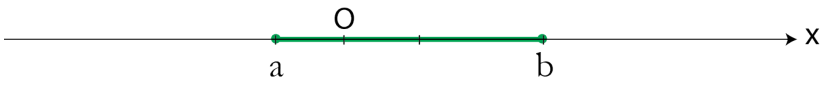
Soit l'inégalité $a < b$ et c un réel non nul. Multiplier ou diviser par un nombre négatif les membres situés à gauche et à droite d'une inégalité change le sens de l'inégalité.

Si $0 < c$, alors $ac < bc$

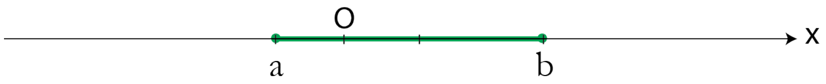
Si $c < 0$, alors $ac > bc$

Cours - Intervalles

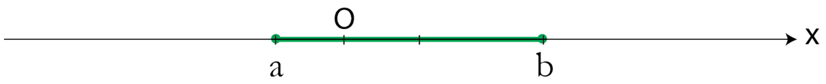
On appelle intervalle [a ; b] fermé en a et fermé en b l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$.



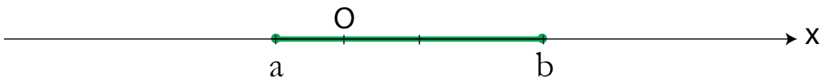
On appelle intervalle]a ; b] ouvert en a et fermé en b l'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$.



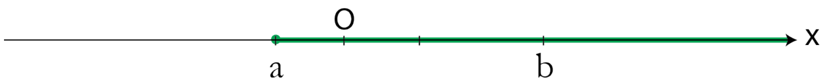
On appelle intervalle [a ; b[fermé en a et ouvert en b l'ensemble des réels x tels que $a \leq x < b$.



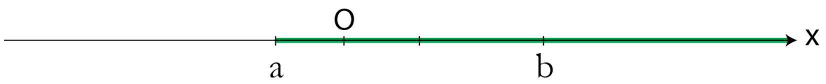
On appelle intervalle]a ; b[ouvert en a et ouvert en b l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$.



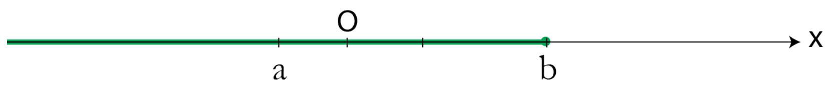
On appelle intervalle [a ; +∞[fermé en a l'ensemble des réels x tels que $a \leq x$.



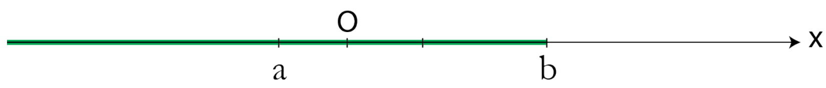
On appelle intervalle]a ; +∞[ouvert en a l'ensemble des réels x tels que $a < x$.



On appelle intervalle]-∞ ; b] fermé en b l'ensemble des réels x tels que $x \leq b$.



On appelle intervalle]-∞ ; b][ouvert en b l'ensemble des réels x tels que x < b.



Exemple 1

Soit $2 < 3$.

Si on multiplie par le nombre positif 5, on a : $10 < 15$. Le sens de l'inégalité ne change pas.

Si on multiplie par le nombre négatif -1, on a : $-2 > -3$. Le sens de l'inégalité change !

Exemple 2

Soit $x \geq 2$. On note $x \in [2 ; +\infty[$.

Soit $-5 < a \leq 3$. On note $x \in]-5 ; 3]$.

Soit $b \leq 6$. On note $x \in]-\infty ; 6]$.

Soit $0 < AB < 8$. On note $AB \in]0 ; 8[$.

La résolution d'une inéquation se fait selon la même méthode que celle suivie pour une équation. On prend soin d'équilibrer les membres situés de part et d'autre du symbole d'inégalité en faisant attention au changement de signe lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif.

Exemple 3

Résolvons l'inéquation $4x - 20 \leq 8$.
$4x - 20 \leq 8 \Leftrightarrow 4x \leq 8 + 20 \Leftrightarrow 4x \leq 28 \Leftrightarrow x \leq \frac{28}{4} = 7$.
En résultat, l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-\infty ; 7]$

Exemple 4

Résolvons l'inéquation $-3x + 5 < 23$.
$-3x + 5 < 23 \Leftrightarrow -3x < 23 - 5 \Leftrightarrow -3x < 18 \Leftrightarrow x > \frac{18}{-3} = -6$.
En résultat, l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-6 ; +\infty[$.