

FONCTIONS AFFINES

1. Langage des fonctions affines

1.1.1. Définition d'une fonction affine

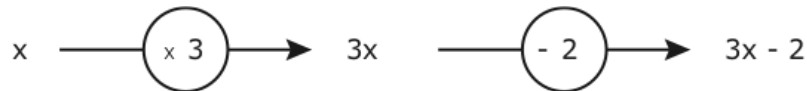
Soit a et b deux nombres réels. Une fonction affine f est une fonction définie sur l'ensemble des réels qui, à tout nombre x , associe le nombre $ax + b$, a et b étant deux réels. Le nombre obtenu, noté $f(x)$, est appelé l'image de x par la fonction f .

Autre notation : $f : x \mapsto ax + b$

Point de vue pragmatique

Une fonction affine... exécute en quelque sorte un programme de calcul élémentaire sur un nombre de départ. Exemple :

- Je choisis un nombre
- Je le multiplie par 3
- Je soustrais 2 au nombre obtenu
- J'écris le résultat



La fonction associée à ce programme de calcul est la fonction définie par $f(x) = 3x - 2$.

1.1.2. Définition d'une fonction linéaire

Lorsque le nombre b est nul, la fonction affine f est dite linéaire de coefficient a . Une fonction linéaire est associée à (ou traduit) une situation de proportionnalité. Une fonction linéaire est définie sur \mathbb{R} par une expression de la forme $f(x) = ax$.

1.2. Détermination de l'image d'un nombre par une fonction affine f

L'image d'un nombre x par une fonction f est le nombre que l'on obtient à l'aide de la fonction f . Par exemple, l'image du nombre 4 par la fonction f est $f(4)$.

Méthodologie

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 2$.

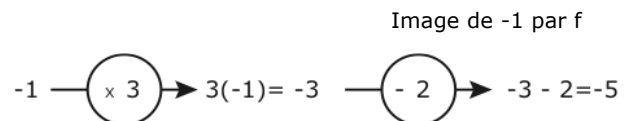
1.2.1. Déterminer l'image du nombre 0 par la fonction f .

$$\text{On a : } f(0) = 3(0) - 2 = -2.$$

1.2.2. Déterminer $f(-1)$ et $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

$$f(-1) = 3(-1) - 2 = -5.$$

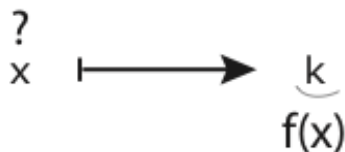
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2 = 2 - 2 = 0.$$



1.2.3. À l'aide de la calculatrice, deux méthodes de détermination de l'image d'un nombre par une fonction sont utilisables. Par la touche « $f(x)$ », il est possible d'entrer l'expression de la fonction f , puis à l'aide de « déf table » (Mode Auto/Ask) et de « table » ou à l'aide de « vars » et $Y1$, un calcul direct de l'image par f du nombre souhaité est possible. On tape $Y1(\dots)$, puis Enter.

1.3. Détermination de l'antécédent d'un nombre par une fonction f

L'antécédent d'un nombre k par une fonction f est le nombre que l'on doit choisir pour que son image par la fonction f soit le nombre k. Déterminer l'antécédent d'un nombre k par une fonction f revient à résoudre l'équation $f(x) = k$.



Méthodologie

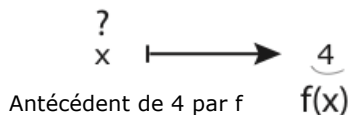
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 2$.

2.2.1. Déterminer l'antécédent du nombre 0 par la fonction f.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}. \text{ Donc, } \frac{2}{3} \text{ est l'antécédent de 0 par f.}$$

2.2.2. Déterminer l'antécédent du nombre 4 par la fonction f.

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 \Leftrightarrow 3x = 4 + 2 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2. \text{ Donc, 2 est l'antécédent de 4 par f.}$$



2. Représentation graphique d'une fonction affine

La représentation graphique de la fonction affine f est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x ; y)$ tels que $y = f(x)$.

Comme $f(x) = ax + b$, l'expression $y = f(x)$ s'écrit $y = ax + b$. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (D) d'équation $y = ax + b$, le nombre a étant le coefficient directeur ou pente de la droite (D) et b étant l'ordonnée à l'origine.

Si $a > 0$, alors la droite monte de la gauche vers la droite [On dit que f est croissante].

Si $a < 0$, alors la droite descend de la gauche vers la droite [On dit que f est décroissante].

La valeur du coefficient a détermine l'inclinaison de la droite par rapport à l'axe des abscisses.

Pour représenter une fonction affine, on construit un tableau de valeurs à trois colonnes comme dans l'exemple ci-dessous.

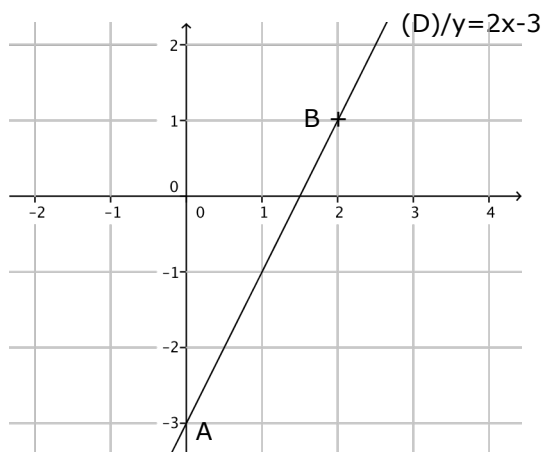
Exemple : Représenter la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$.

La fonction f étant une fonction affine, sa représentation graphique est une droite.

Tableau de valeurs de f

	A	B
x	0	3
f(x)	-3	3

Pour le tracé de la droite (D)/ $y = 2x - 3$, voir figure.



3. Caractérisation d'une fonction affine

Théorème

f est une fonction affine si et seulement si l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.

Autrement dit, x_1 et x_2 étant deux réels distincts, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images, on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

On écrira d'une manière simple : f affine $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a$.

4. Variation d'une fonction affine (ou pourquoi f est croissante quand $a > 0$)

Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_2 > x_1$.

Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1).$$

$$> 0$$

Si $a > 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > f(x_1)$. Les nombres x_1 et x_2 et leurs images par la fonction f sont dans le même ordre : **La fonction f est croissante.**

La droite (D) qui représente la fonction affine f monte...

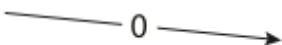
Tableau de variation de f

x	$-b/a$
$f(x)$	

Si $a < 0$, alors $f(x_2) - f(x_1) < 0$ et $f(x_2) < f(x_1)$. Les nombres x_1 et x_2 et leurs images par la fonction f sont dans l'ordre inverse : **La fonction f est décroissante.**

La droite (D) qui représente la fonction affine f descend...

Tableau de variation de f

x	$-b/a$
$f(x)$	

5. Etude du signe de f(x)

Cas où a > 0

Réolvons $f(x) > 0$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$ (le sens de l'inégalité ne change pas car on divise par a qui est positif).

Réolvons $f(x) < 0$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Tableau de signe de $(ax + b)$ avec $a > 0$.

X	-b/a		
Signe de f(x)	-	0	+

Cas où a < 0

Tableau de signe de $(ax + b)$ avec $a < 0$.

X	-b/a		
Signe de f(x)	+	0	-

6. Savoir faire - Trouver l'expression d'une fonction affine

Soit f la fonction affine qui vérifie $f(2) = -3$ et $f(-1) = 6$. Trouver l'expression de f(x) en fonction de x.

f étant affine, on a : $f(x) = ax + b$.

Déterminons a

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-3 - 6}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

Déterminons b

$$f(2) = -3 \Rightarrow -3(2) + b = -3 \Rightarrow -6 + b = -3 \Rightarrow b = 6 - 3 \Rightarrow b = 3$$

En résultat, on a : $f(x) = -3x - 3$.