COURS - FONCTIONS AFFINES

1. Langage des fonctions affines

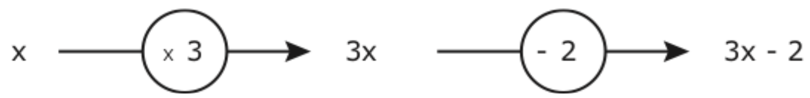
1.1. Définition d'une fonction affine

Soit a et b deux nombres réels. Une fonction affine f est une fonction définie sur l'ensemble des réels qui, à tout nombre x, associe le nombre ax + b, a et b étant deux réels. Le nombre obtenu, noté f(x), est appelé l'image de x par la fonction f.

Autre notation : f : $x \longmapsto ax + b$

Point de vue pragmatique

Une fonction affine... exécute en quelque sorte un programme de calcul élémentaire sur un nombre de départ. Exemple :
— Je choisis un nombre
— Je le multiplie par 3
— Je soustrais 2 au nombre obtenu
— J'écris le résultat



La fonction f associée à ce programme est la fonction définie par f(x) = 3x - 2.

1.2. Définition d'une fonction linéaire

Lorsque le nombre b est nul, la fonction affine f est dite linéaire de coefficient a. Une fonction linéaire est associée à (ou traduit) une situation de proportionnalité. Une fonction linéaire est définie sur ℝ par une expression de la forme f(x) = ax.

1.3. Détermination de l'image d'un nombre par une fonction affine f

L'image d'un nombre x par une fonction f est le nombre que l'on obtient à l'aide de la fonction f. Par exemple, l'image du nombre 4 par la fonction f est f(4).

Méthodologie

Soit f la fonction affine définie par f(x) = 3x - 2.

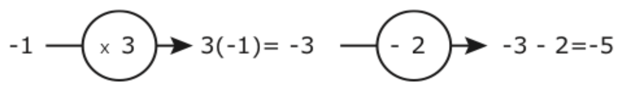
1.3.1. Déterminer l'image du nombre 0 par la fonction f.

On a : f(0) = 3(0) - 2 = -2.

1.3.2. Déterminer f(-1) et $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Image de -1 par f

f(-1) = 3(-1) - 2 = -5.



$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

1.3.3. A l'aide de la calculatrice, deux méthodes de détermination de l'image d'un nombre par une fonction sont utilisables. Par la touche « f(x) », il est possible d'entrer l'expression de la fonction f, puis à l'aide de « déf table » (Mode Auto/Ask) et de « table » ou à l'aide de « vars » et Y1, un calcul direct de l'image par f du nombre souhaité est possible. On tape Y1(…), puis Enter.

1.4. Détermination d'un antécédent de nombre par une fonction f

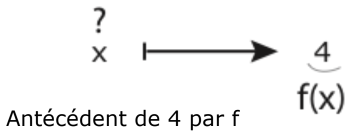
Un antécédent d'un nombre k par une fonction f est un nombre que l'on doit choisir pour que son image par la fonction f soit le nombre k. Déterminer un antécédent d'un nombre k par une fonction f revient à résoudre l'équation f(x) = k.

Méthodologie

Soit f la fonction affine définie par f(x) = 3x - 2.

1.4.1. Déterminer l'antécédent du nombre 0 par la fonction f.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Donc, $\frac{2}{3}$ est l'antécédent de 0 par f.

1.4.2. Déterminer l'antécédent du nombre 4 par la fonction f.
$f(x) = 4 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 \Leftrightarrow 3x = 4 + 2 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$. Donc, 2 est l'antécédent de 4 par f.



2. Représentation graphique d'une fonction affine

La représentation graphique de la fonction affine f est l'ensemble de tous les points de coordonnées (x ; y) tels que y = f(x).
Comme f(x) = ax + b, l'expression y = f(x) s'écrit y = ax + b. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite (D) d'équation y = ax + b, le nombre a étant le coefficient directeur ou pente de la droite (D) et b étant l'ordonnée à l'origine.

Si a > 0, alors la droite monte de la gauche vers la droite [On dit que f est croissante].

Si a < 0, alors la droite descend de la gauche vers la droite [On dit que f est décroissante].

La valeur du coefficient directeur ou pente a détermine l'inclinaison de la droite par rapport à l'axe des abscisses.

Pour représenter une fonction affine, on construit un tableau de valeurs à trois colonnes comme dans l'exemple ci-dessous.

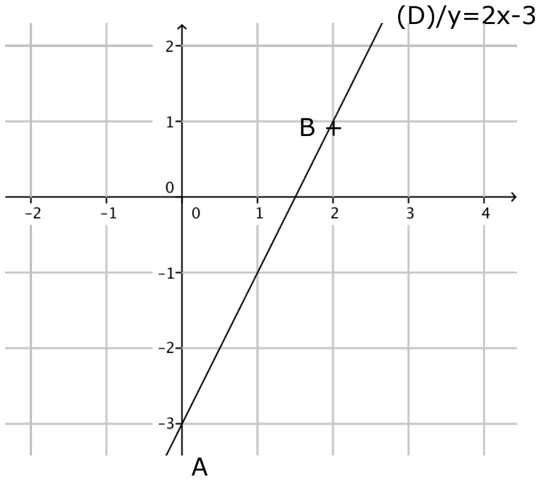
Exemple

Représenter la fonction f définie par f(x) = 2x - 3.
La fonction f étant une fonction affine, sa représentation graphique est une droite.

Tableau de valeurs de la fonction f

	A	B
x	0	3
f(x)	-3	3

Pour le tracé de la droite (D)/y =2x - 3, voir figure.



3. Caractérisation d'une fonction affine

Théorème

f est une fonction affine si et seulement si l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.

Autrement dit, x_1 et x_2 étant deux réels distincts, $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images, on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

On écrira d'une manière simple : f affine $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = a$

4. Variation d'une fonction affine (ou pourquoi f est croissante quand a > 0)

Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_2 > x_1$.

Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) = ax_2 + b - ax_1 - b = ax_2 - ax_1$

$f(x_2) - f(x_1) = a(\underbrace{x_2 - x_1}_{> 0})$.

Si **a > 0**, alors $f(x_2) - f(x_1) > 0$ et $f(x_2) > f(x_1)$. Les nombres x_1 et x_2 et leurs images par la fonction f sont dans le même ordre : **La fonction f est croissante**.

La droite (D) qui représente la fonction affine f monte...

Tableau de variation de f

x	$-b/a$
f(x)	↗ 0 ↗

Si **a < 0**, alors $f(x_2) - f(x_1) < 0$ et $f(x_2) < f(x_1)$. Les nombres x_1 et x_2 et leurs images par la fonction f sont dans l'ordre inverse : **La fonction f est décroissante**.

La droite (D) qui représente la fonction affine f descend...

Tableau de variation de f

x	$-b/a$
f(x)	↘ 0 ↘

5. Étude du signe de f(x)

Cas où a > 0

Résolvons f(x) > 0.
f(x) > 0 ⇔ ax + b > 0 ⇔ ax > -b ⇔ x > $-\frac{b}{a}$ (le sens de l'inégalité ne change pas car on divise par a qui est positif).

Résolvons f(x) < 0.
f(x) < 0 ⇔ ax + b < 0 ⇔ ax < -b ⇔ x < $-\frac{b}{a}$.

f(x) = 0 ⇔ x = $-\frac{b}{a}$.

Tableau de signe de (ax + b) avec a > 0.

x		-b/a	
Signe de f(x)	-	0	+

Cas où a < 0

Tableau de signe de (ax + b) avec a < 0.

x		-b/a	
Signe de f(x)	+	0	-

6. Savoir faire - Trouver l'expression f(x) caractérisant une fonction affine

Soit f la fonction affine qui vérifie f(2) = -3 et f(-1) = 6. Trouver l'expression de f(x) en fonction de x.

f étant affine, on a : f(x) = ax + b.

Déterminons a

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-3 - 6}{3} = \frac{-9}{3} = -3$$

Déterminons b

f(2) = -3 ⇒ -3(2) + b = -3 ⇒ -6 + b = -3 ⇒ b = 6 - 3 ⇒ b = 3

En résultat, on a : f(x) = -3x - 3.