PROBLÈME

On considère les fonctions f et g définies sur l'ensemble des réels par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = -x + 3$. Leurs représentations graphiques sont respectivement une parabole (P_f) et une droite (D_g).

1. La fonction f est une fonction affine car $f(x) = ax + b$ avec $a = -1$ et $b = 3$. La fonction g est une fonction polynomiale de degré 2 car $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 3$.

2. Démontrons que $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.

   $(x - 2)^2 - 1 = x^2 - 2(x)(2) + 2^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3 = f(x)$.

   Cette forme est la forme canonique définissant la fonction f. Le sommet S de la parabole représentant cette fonction a pour coordonnées (2 ; -1).

3. Démontrons que $f(x) = (x - 3)(x - 1)$.

   $(x - 3)(x - 1) = x^2 - x - 3x + 3 = x^2 - 4x + 3 = f(x)$.

4. $f(0) = (0)^2 - 4(0) + 3 = 3$.

   $f(1) = (1 - 3)(1 - 1) = 0$ et $f(3) = (3 - 3)(3 - 1) = 0$.

   $f(x) = (2 - 2)^2 - 1 = -1$.

   $f(4) = (4 - 3)(4 - 1) = (1)(3) = 3$ et $f(5) = (5 - 3)(5 - 1) = (2)(4) = 8$ et

5. Tableau de valeurs de la fonction f.

				A	S	B	C	D
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	15	8	3	0	-1	0	3	8

6. Voir l'ANNEXE pour le tracé des courbes (P_f) et (D_g).

7. Voir sur l'ANNEXE pour les équations des courbes (P_f) et (D_g).

8. Déterminons $f(x) - f(2)$.

   $f(x) - f(2) = (x - 2)^2 - 1 - (-1) = (x - 2)^2 - 1 + 1 = (x - 2)^2 \geq 0$.

   D'où : $f(x) \geq f(2)$ pour tout réel x. Donc f(2) est le minimum de la fonction f.

9. D'après la figure, les coordonnées des points d'intersection I et J de la droite (D_g) et de la parabole (P_f) sont respectivement (0 ; 3) et (3 ; 0).

Exercice - API

La droite (Δ) représentant la fonction affine f passe par les points A(-4; -3) et B(4 ; 1).

Déterminons f(x) en fonction de x.

La fonction f étant affine (fonction représentée par une droite), on a : f(x) = ax + b.

De plus : A(-4; -3) ∈ (Δ), donc : f(-4) = -3, c'est-à-dire : a(-4) + b = -3 (relation 1)

Et : B(4 ; 1) ∈ (Δ), donc : f(4) = 1, c'est-à-dire : a(4) + b = 1 (relation 2)

Les relations 1 et 2 s'écrivent : -4a + b = -3 et 4a + b = 1.

En additionnant les membres de gauche, on obtient : 2b = -2, d'où : b = -1.

La relation 2 devient alors : 4a - 1 = 1, d'où : 4a = 2, donc : a = 1/2 = 0,5.

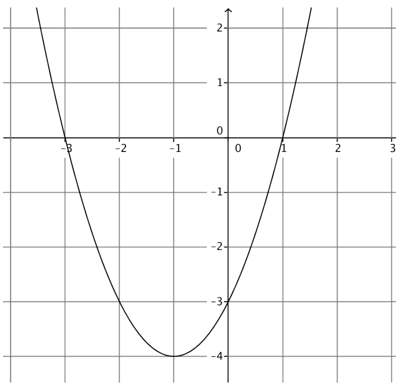
Conclusion : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Une autre méthode de résolution du problème consiste à tracer la droite et à déterminer graphiquement sa pente et son ordonnée à l'origine.

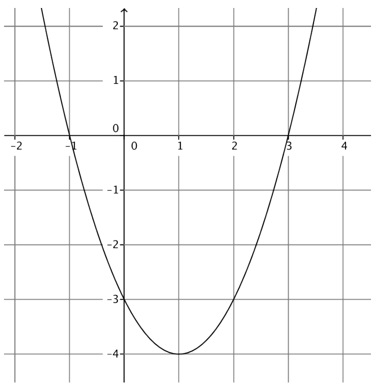
QCM

La fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = x^2 - 2x - 3$ est représentée par la <u>courbe 2</u>.

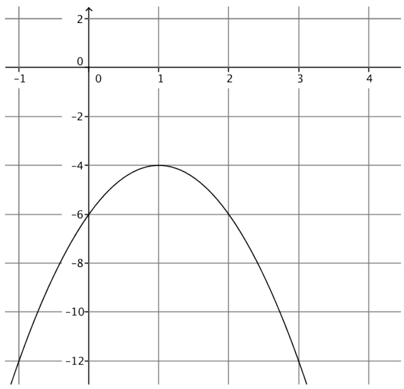
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



On a : a = 1, donc les deux branches de la parabole sont dirigées vers le haut. La courbe 3 est incompatible avec cette hypothèse.

$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$. La courbe 1 est incompatible avec cette hypothèse.

ANNEXE

PROBLÈME

Représentation de la parabole et de la droite représentatives des fonctions f et g.