signe et monotonie

Lors de l'étude d'une fonction f polynomiale de degré 2 définie par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, dite forme développée, il est généralement demandé de dresser le tableau de variation et le tableau de signe de la fonction.

Une telle fonction possède une forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où (α ; β) sont les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de ladite fonction.

<u>Tableau de variation</u>

Si **a > 0**, alors les branches de la parabole représentant la fonction sont dirigées vers le haut. La fonction est décroissante sur l'intervalle]-∞ ; α], puis croissante sur [α ; +∞[.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	β	↗	$+\infty$

Le minimum de la fonction est le nombre β. Ce minimum est atteint pour x = α.

Si **a < 0**, alors les branches de la parabole sont dirigées vers le bas. La fonction est croissante sur l'intervalle]-∞ ; α], puis décroissante sur l'intervalle [α ; +∞[.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	β	↘	$-\infty$

Le maximum de la fonction est le nombre β. Ce maximum est atteint pour x = α.

<u>Exercice 1</u>

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a. Démontrer que $f(x) = (x - 2)^2 - 1$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 11$.

a. Démontrer que $f(x) = (x-3)^2 + 2$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 - 8x - 2$.

a. Démontrer que $f(x) = -2(x+2)^2 + 6$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

Tableau de signe

Lorsqu'il est possible de factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ l'expression qui définit une fonction polynomiale de degré 2, cela signifie que la fonction peut s'annuler en deux valeurs ($x_1 < x_2$).

Si **a < 0**, alors le tableau de signe de la fonction se construit de la manière suivante :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $(x - x_1)$		-	0	+		+	
Signe de $(x - x_2)$		-		-	0	+	
Signe de $f(x)$		-	0	+	0	-	

Si **a > 0**, alors le tableau de signe de la fonction se construit de la manière suivante :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $(x - x_1)$		-	0	+		+	
Signe de $(x - x_2)$		-		-	0	+	
Signe de $f(x)$		+	0	-	0	+	

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 6$.

a. Démontrer que $f(x) = (x+2)(x-3)$.

b. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

a. Démontrer que $f(x) = -3(x-1)(x-3)$.

b. Dresser le tableau de signe de la fonction f.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 8$.

a. Démontrer que $f(x) = 2(x+2)(x-2)$.

b. Dresser le tableau de signe de la fonction f.