signe et monotonie

Tableaux de variation

Exercice 1

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a. Démontrons que $f(x) = (x-2)^2 - 1$.

$(x-2)^2 - 1 = x^2 - 2(x)(2) + (2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3$

Donc : $(x-2)^2 - 1 = f(x)$

La forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1$, $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ nous donne les coordonnées $(\alpha; \beta)$ du sommet S de la parabole représentative de la fonction f et le fait que le coefficient a soit positif nous indique que les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

b. Tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 11$.

a. Démontrons que $f(x) = (x-3)^2 + 2$.

$(x-3)^2 + 2 = x^2 - 2(x)(3) + (3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 9 + 2 = x^2 - 6x + 11$

Donc : $(x-3)^2 + 2 = f(x)$

La forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = 1$, $\alpha = 3$ et $\beta = 2$ nous donne les coordonnées $(\alpha; \beta)$ du sommet S de la parabole représentative de la fonction f . Comme, par ailleurs, le coefficient a est positif, les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

b. Tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3

Soit la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 - 8x - 2$.

a. Démontrons que $f(x) = -2(x+2)^2 + 6$.

$-2(x+2)^2 + 6 = -2[x^2 + 2(x)(2) + (2)^2] + 6 = -2[x^2 + 4x + 4] + 6$

D'où : $-2(x+2)^2 + 6 = -2x^2 - 8x - 8 + 6 = -2x^2 - 8x - 2 = f(x)$

La forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a = -2$, $\alpha = -2$ et $\beta = 6$ nous donne les coordonnées $(-2; 6)$ du sommet S de la parabole représentative de la fonction f . Le coefficient a étant négatif, les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.

b. Tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f(x)			6		
	$-\infty$	↗		↘	$+\infty$

Tableaux de signe

Exercice 4

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 6$.

a. Démontrons que $f(x) = (x+2)(x-3)$.

$(x+2)(x-3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6 = f(x)$

b. Tableau de signe de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
Signe de (x + 2)		-	0	+	|	+	
Signe de (x - 3)		-	|	-	0	+	
Signe de (x + 2)(x - 3)		+	0	-	0	+	

Exercice 5

Soit la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

a. Démontrons que $f(x) = -3(x-1)(x-3)$.

$-3(x-1)(x-3) = -3[x^2 - 3x - x + 3] = -3[x^2 - 4x + 3] = -3x^2 + 12x - 9$

Donc : $-3(x-1)(x-3) = f(x)$.

b. Tableau de signe de la fonction f.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de (x - 1)		-	0	+	|	+	
Signe de (x - 3)		-	|	-	0	+	
Signe de -3(x - 1)(x - 3)		-	0	+	0	-	

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 8$.

a. Démontrons que $f(x) = 2(x+2)(x-2)$.

$2(x+2)(x-2) = 2[x^2 - 2^2] = 2[x^2 - 4] = 2x^2 - 8 = f(x)$.

b. Tableau de signe de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Signe de (x + 2)		-	0	+	|	+	
Signe de (x - 2)		-	|	-	0	+	
Signe de 2(x + 2)(x - 2)		+	0	-	0	+	