Activité autour du poulailler

Soit f la fonction polynomiale de degré 2 définie par $f(x) = -2x^2 + 40x + 42$.

1. Calculons $f(x)$ pour x = 0 à 21.

$f(0) = -2(0)^2 + 40(0) + 42 = 42$

$f(1) = -2(1)^2 + 40(1) + 42 = -2 + 40 + 42 = 80$

$f(2) = -2(2)^2 + 40(2) + 42 = -8 + 80 + 42 = 122 - 8 = 114$

$f(3) = -2(3)^2 + 40(3) + 42 = -18 + 120 + 42 = 162 - 18 = 144$

$f(4) = -2(4)^2 + 40(4) + 42 = -32 + 160 + 42 = 202 - 32 = 170$

$f(5) = -2(5)^2 + 40(5) + 42 = -50 + 200 + 42 = 242 - 50 = 192$

$f(6) = -2(6)^2 + 40(6) + 42 = -72 + 240 + 42 = 282 - 72 = 210$

$f(7) = -2(7)^2 + 40(7) + 42 = -98 + 280 + 42 = 322 - 98 = 224$

$f(8) = -2(8)^2 + 40(8) + 42 = -128 + 320 + 42 = 362 - 128 = 234$

$f(9) = -2(9)^2 + 40(9) + 42 = -162 + 360 + 42 = 402 - 162 = 240$

$f(10) = -2(10)^2 + 40(10) + 42 = -200 + 400 + 42 = 242$

$f(11) = -2(11)^2 + 40(11) + 42 = [-2(11) + 40](11) + 42 = [-22 + 40](11) + 42$

$f(11) = (18)(11) + 42 = 198 + 42 = 240$

$f(12) = -2(12)^2 + 40(12) + 42 = [-2(12) + 40](12) + 42 = [-24 + 40](12) + 42$

$f(12) = (16)(12) + 42 = 192 + 42 = 234$

$f(13) = -2(13)^2 + 40(13) + 42 = [-2(13) + 40](13) + 42 = [-26 + 40](13) + 42$

$f(13) = (14)(13) + 42 = 182 + 42 = 224$

ou $f(13) = -2(13)^2 + 40(13) + 42 = -2(169) + 520 + 42 = -338 + 562 = 224$

$f(14) = -2(14)^2 + 40(14) + 42 = [-2(14) + 40](14) + 42 = [-28 + 40](14) + 42$

$f(14) = (12)(14) + 42 = 168 + 42 = 210$

$f(15) = -2(15)^2 + 40(15) + 42 = [-2(15) + 40](15) + 42 = [-30 + 40](15) + 42$

$f(15) = (10)(15) + 42 = 150 + 42 = 192$

$f(16) = -2(16)^2 + 40(16) + 42 = [-2(16) + 40](16) + 42 = [-32 + 40](16) + 42$

$f(16) = (8)(16) + 42 = 128 + 42 = 170$

$f(17) = -2(17)^2 + 40(17) + 42 = [-2(17) + 40](17) + 42 = [-34 + 40](17) + 42$

$f(17) = (6)(17) + 42 = 102 + 42 = 144$

$f(18) = -2(18)^2 + 40(18) + 42 = [-2(18) + 40](18) + 42 = [-36 + 40](18) + 42$

$f(18) = (4)(18) + 42 = 72 + 42 = 114$

$f(19) = -2(19)^2 + 40(19) + 42 = [-2(19) + 40](19) + 42 = [-38 + 40](19) + 42$

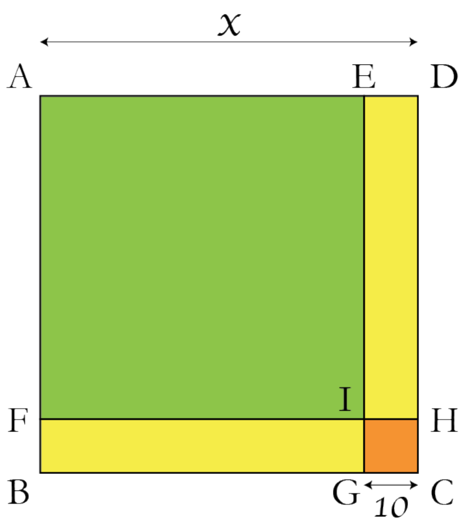
$f(19) = (2)(19) + 42 = 38 + 42 = 80$

$f(20) = -2(20)^2 + 40(20) + 42 = -800 + 800 + 42 = 42$

$f(21) = -2(21)^2 + 40(21) + 42 = -2(441) + 840 + 42 = -882 + 882 = 0$

Il est important de s'entraîner à effectuer mentalement les calculs ci-dessus afin de gagner en dextérité, mais il est aussi fondamental de savoir modéliser la fonction f à l'aide de la calculatrice afin de pouvoir obtenir rapidement un tableau de valeurs et une représentation graphique de la fonction.

2. On considère la figure ci-dessous.



Calculons l'aire du carré ABCD à l'aide des aires des carrés AFIE et IGCH, puis des rectangles EIHD et FBGI.

On a, d'une part : $A_{ABCD} = x^2$

D'autre part : $A_{ABCD} = A_{AFIE} + 2 \times A_{FBGI} + A_{IGCH}$

$A_{ABCD} = (x-10)^2 + 2(10)(x-10) + 10^2 = (x-10)^2 + 20(x-10) + 100$

$A_{ABCD} = (x-10)^2 + 20x - 200 + 100 = (x-10)^2 + 20x - 100$

On a donc : $\underline{x^2 = (x-10)^2 + 20x - 100}$

3. Démontrons que $x^2 - 20x - 21 = (x-10)^2 - 121$.

D'après la question 2, on a : $x^2 = (x-10)^2 + 20x - 100$.

Donc : $x^2 - 20x = (x-10)^2 - 100$

En résultat : $x^2 - 20x - 21 = (x-10)^2 - 121$.

Il est possible de démontrer directement l'égalité $x^2 - 20x - 21 = (x-10)^2 - 121$

On a : $\underbrace{(x-10)^2}_{Identité\ rem.} - 121 = x^2 - 2(x)(10) + 10^2 - 121 = x^2 - 20x + 100 - 121$

D'où : $(x-10)^2 - 121 = x^2 - 20x - 21$

4. Montrons que $f(x) = -2[(x-10)^2 - 11^2]$.

   $-2[(x-10)^2 - 11^2] = -2[(x-10)^2 - 121] = -2[x^2 - 20x - 21]$

   $= -2x^2 + 40x + 42 = f(x)$

5. Démontrons que $f(x) \leq 242$ pour tout réel x.

   Calculons $f(x) - 242$

   $f(x) - 242 = -2[(x-10)^2 - 11^2] - 242 = -2[(x-10)^2 - 121] - 242$

   $= -2[(x-10)^2] + 242 - 242 = -2[(x-10)^2] \leq 0$

   Donc : $f(x) - 242 \leq 0$

   C'est-à-dire : $f(x) \leq 242$

6. En déduire que la fonction f admet un maximum lorsque x = 10.

   Pour toutes les valeurs de x, on a : $f(x) \leq 242$ avec $f(10) = 242$.

   Donc : 242 est la valeur maximale que peut prendre la fonction f. On dit que la fonction f admet un maximum lorsque x = 10 et que ce maximum est 242.

7. Démontrons que $f(x) = -2(x+1)(x-21)$.

   On a : $f(x) = -2\left[\underbrace{(x-10)^2 - 11^2}_{a^2-b^2}\right] = -2[(x-10-11)](x-10+11)$

   $= -2[(x-21)](x+1) = -2(x+1)(x-21)$

   On rappelle que : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

8. Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

   $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2(x+1)(x-21) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 21 = 0$

   $\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 21$

   L'équation a deux solutions -1 et 21, mais comme x appartient à l'intervalle [0 ; 21], seule la solution 21 est admissible.