Fonctions polynômes de degré 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 6x + 5$ sur l'ensemble des réels.

1 La fonction f définie par $f(x) = 1x^2 - 6x + 5$ est une fonction polynomiale de degré 2 car $f(x) = ax^2 + bx + c$? avec a = 1, b = -6 et c = 5.

2. Calculons f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6).

$f(-2) = (-2)^2 - 6(-2) + 5 = 4 + 12 + 5 = 21$

$f(-1) = (-1)^2 - 6(-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12$

$f(0) = (0)^2 - 6(0) + 5 = 5$

$f(1) = (1)^2 - 6(1) + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$

$f(2) = (2)^2 - 6(2) + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$

$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$

$f(4) = (4)^2 - 6(4) + 5 = 16 - 24 + 5 = -3$

$f(5) = (5)^2 - 6(5) + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$

$f(6) = (6)^2 - 6(6) + 5 = 36 - 36 + 5$

3. Démontrons que $f(x) = (x-1)(x-5)$ [Forme factorisée].

$(x-1)(x-5) = x^2 - 5x - x + 5 = x^2 - 6x + 5 = f(x)$

4. Démontrons que $f(x) = (x-3)^2 - 4$ [Forme canonique].

On a : $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 2(x)(3) + 3^2 - 4$

Donc : $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4$

D'où : $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5 = f(x)$

En résultat : $(x-3)^2 - 4 = f(x)$

5. Étudions le signe de $f(x) - f(3)$.
   $f(x) - f(3) = f(x) - (-4) = f(x) + 4 = (x-3)^2 - 4 + 4 = (x-3)^2 \geq 0$
   Donc : $f(x) \geq f(3) = -4$.

   La plus petite valeur que puisse prendre f(x) est f(3) car, pour tout réel x, on a :

$$f(x) \geq f(3)$$

   On dit que la valeur -4 est le minimum de la fonction f et que ce minimum est atteint pour x = 3.

6. Résolvons l'équation f(x) = 0.

   $f(x) = 0 \iff (x-1)(x-5) = 0 \iff x - 1 = 0$ ou $x - 5 = 0 \iff$

   $x = 1$ ou $x = 5$.

   En résultat, l'équation f(x) = 0 admet deux solutions 1 et 5.

7. Résolvons l'équation f(x) = -4.

   $f(x) = -4 \iff (x-3)^2 - 4 = -4 \iff (x-3)^2 = 0 \iff x - 3 = 0 \iff$

   $x = 3$.

   En résultat, l'équation f(x) = -4 admet une unique solution 3.

8. Déterminons le ou les antécédents du nombre 5 par la fonction f.

$$f : \overset{?}{\overbrace{x}} \longmapsto 5$$

   Résolvons f(x) = 5.

$f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5(x-3)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ ou $x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$.

En résultat, l'équation f(x) = 5 admet deux solutions 0 et 6.

9. Tableau de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5

10. Une équation de la courbe représentative de la fonction f est y = f(x), c'est-à-dire, par exemple :

$$y = x^2 - 6x + 5$$

ou

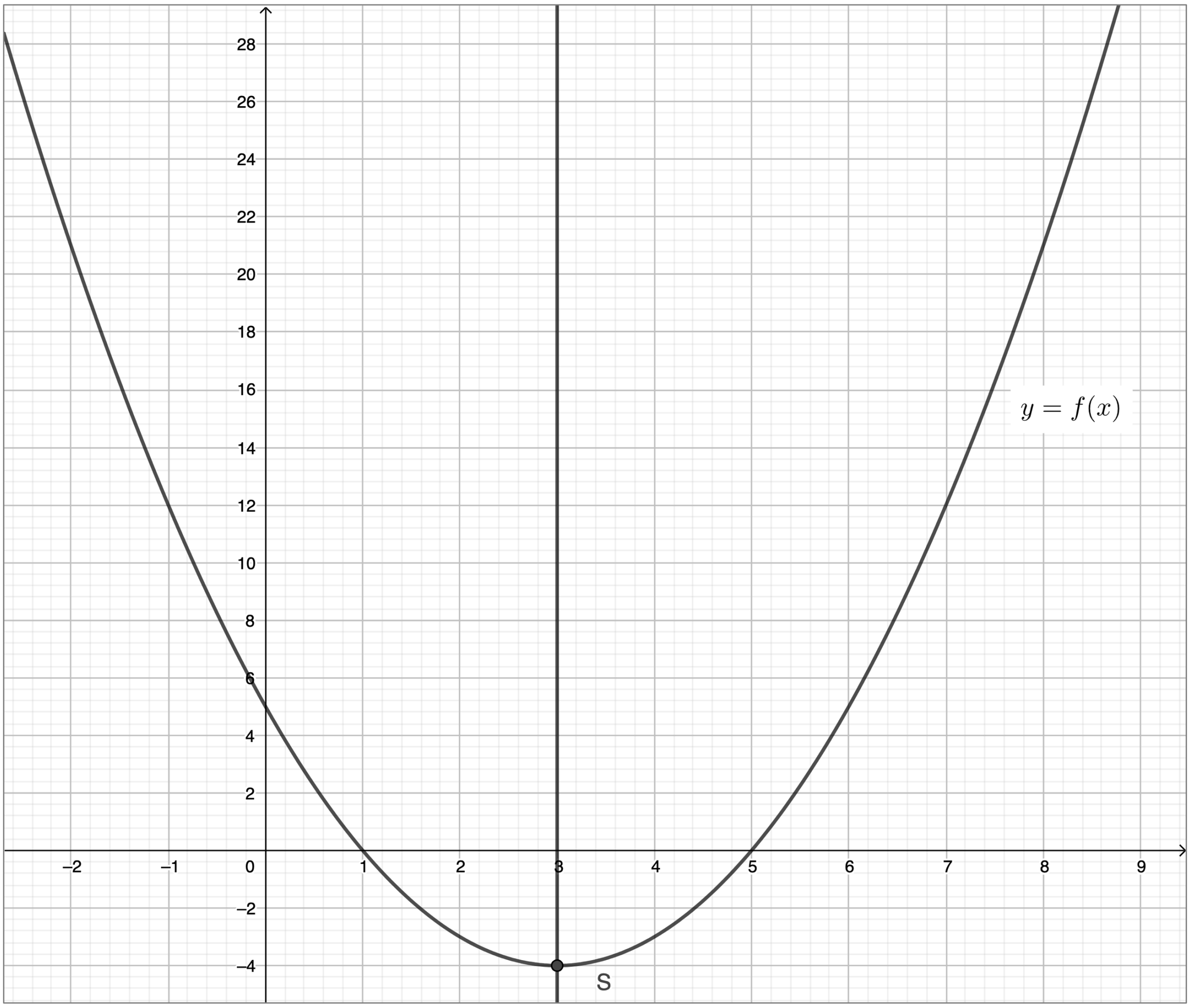
$$y = (x-1)(x-5)$$

ou

$$y = (x-3)^2 - 4$$

Les coordonnées x et y de tous les points M(x ; y) de la courbe représentative de la fonction f vérifient les équations ci-dessous.

11. Tracé de la courbe représentative de la fonction f.



On observe sur cette courbe la présence d'un sommet S(3 ; -4) et d'un axe de symétrie vertical d'équation x = 3.

12. La courbe représentative de la fonction f est appelée une parabole.