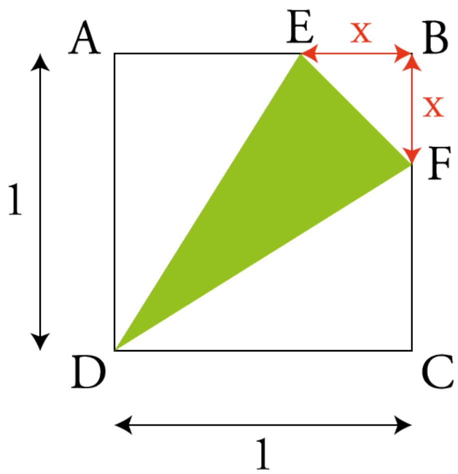
# exercice 54

On considère la figure sur laquelle EB = BF = x avec E ∈ [AB] et F ∈ [BC].




1. La variable x représente une longueur, donc x ≥ 0.

   De plus, on a : EB ≤ AB, donc x ≤ 1. D'où : 0 ≤ x ≤ 1.

   On dit que x appartient à l'intervalle [0 ; 1]. On écrit : x ∈ [0 ; 1].

2. Déterminons les aires des triangles EBF, FCD et AED.

   On a : $A_{EBF} = \frac{EB \times BF}{2} = \frac{x \times x}{2} = \frac{1}{2}x^2$

   De plus : $A_{FCD} = \frac{CD \times CF}{2} = \frac{1 \times (1-x)}{2} = \frac{1-x}{2}$

   Enfin : $A_{AED} = \frac{AE \times AD}{2} = \frac{1 \times (1-x)}{2} = \frac{1-x}{2}$

   Soit A l'aire de la région non colorée en vert à l'intérieur du carré ABCD.

   On a : $A = A_{EBF} + A_{FCD} + A_{AED} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1-x}{2} + \frac{1-x}{2} = \frac{1}{2}x^2 + 1 - x.$

3. Déterminons l'aire $A_{EFD}$ du triangle EFD.

   $A_{EFD} = A_{ABCD} - A = 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - x\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 + x = -\frac{1}{2}x^2 + x.$

   Autrement dit : $A_{EFD} = f(x)$ avec $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ où f est une fonction polynomiale de degré 2 car $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ et c = 0.

4. Résolvons l'équation f(x) = 0.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + x = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

Autrement dit, on a : f(0) = f(2) = 0.

Montrons que $f(x) = -\frac{1}{2}(x-\alpha)^2 + \beta$ où l'on précisera les valeurs de α et β.

On sait que f(0) = 0. Donc : $-\frac{1}{2}(0-\alpha)^2 + \beta = 0$

C'est-à-dire : $-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta = 0$

De plus, on sait que f(2) = 0. Donc : $-\frac{1}{2}(2-\alpha)^2 + \beta = 0$

Donc : $-\frac{1}{2}(4 - 4\alpha + \alpha^2) + \beta = 0$

D'où : $-2 + 2\alpha \underbrace{-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta}_{0} = 0$. Ainsi : $-2 + 2\alpha = 0$. Par conséquent : $2 = 2\alpha$.

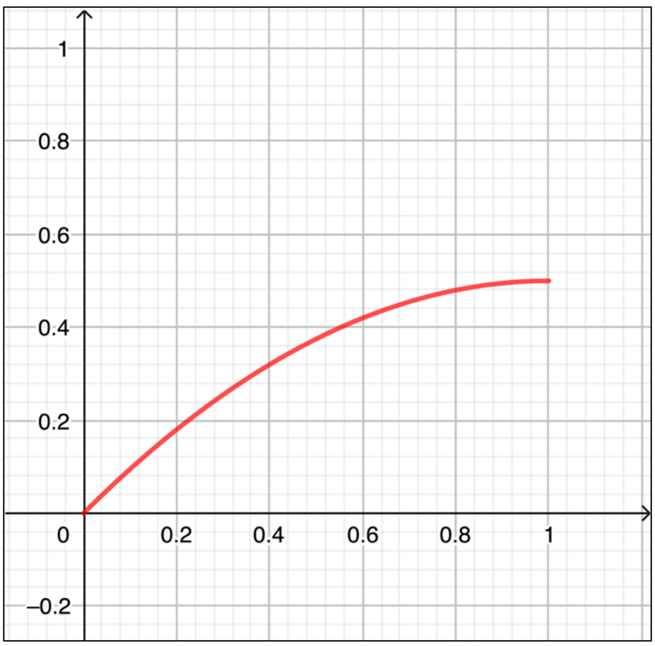
En résultat : $\alpha = 1$

Or : $-\frac{1}{2}\alpha^2 + \beta = 0$, donc : $-\frac{1}{2}(1)^2 + \beta = 0$, d'où $-\frac{1}{2} + \beta = 0$.

En résultat : $\beta = \frac{1}{2}$

Conclusion : $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$. Cette expression est la forme canonique qui définit f. Les coordonnées du sommet S de la parabole qui représente la fonction f polynomiale de degré 2 sont $(\alpha; \beta)$, c'est-à-dire $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Représentation graphique de la fonction f



5. Tableau de variation de la fonction f.

| x | 0 | | 1 |
|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | $\nearrow$ | 0,5 |

On observe que l'aire du triangle EFD augmente de la valeur 0 à la valeur 0,5 lorsque la variable x varie de 0 à 1.