Problème ouvert

Un fermier dispose de 43 mètres de grillage. Il veut clore un poulailler de manière à ce qu'il forme un rectangle avec le mur AE et que la surface au sol soit la plus grande possible.

Démarche 1

Pour résoudre le problème posé, il était possible de proposer des valeurs particulières pour les longueurs BC, DE ou CD.

Par exemple, si l'on prenait BC = 3 m et donc DE = 4 m, comme la longueur du grillage est de 43 m, il était alors aisé de déduire que CD = 43 - (3 + 4) = 43 - 7 = 36 m.

Il était ainsi facile de trouver l'aire du poulailler rectangulaire lorsque BC = 3 m. Dans ce cas, l'aire du poulailler était égale à 4 × 36 = 144 m².

<u>Récapitulatif de valeurs obtenues en jouant</u>

La longueur BC est exprimée en mètres, l'aire A_{ACDE} est exprimée en m².

Pour BC = 0, on a : A_{ACDE} =	42
BC = 1	80
BC = 2	114
BC = 3	144
BC = 4	170
BC = 5	192
BC = 6	210
BC = 7	224
BC = 8	234
BC = 9	240
BC = 10	242
BC = 11	240
BC = 12	234
BC = 13	224
BC = 14	210
BC = 15	192
BC = 16	170
BC = 17	144
BC = 18	114
BC = 19	80
BC = 20	42
BC = 21	0

En observant les valeurs calculées, il est possible de conjecturer que l'aire maximale est de 242 m², valeur obtenue pour BC = 10.

Démarche 2

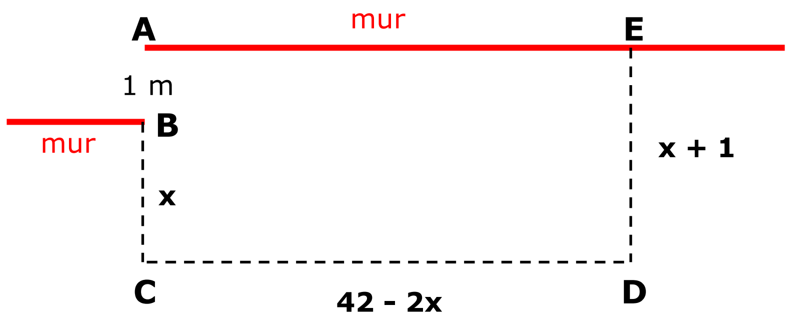
Observant que, lorsque la longueur BC varie, l'aire du poulailler varie, il s'avère naturel de poser $x = BC$ (la variable) et de noter $A(x)$ l'aire calculée (... laquelle dépend de la variable).

Posant $x = BC$, on obtient immédiatement $ED = x + 1$.
Une longueur étant positive, on a obligatoirement $x \geq 0$ car BC est une longueur.

De plus, $BC + CD + DE = 43$, donc :
$CD = 43 - BC - DE = 43 - x - (x + 1) = 43 - 2x - 1 = 42 - 2x$.

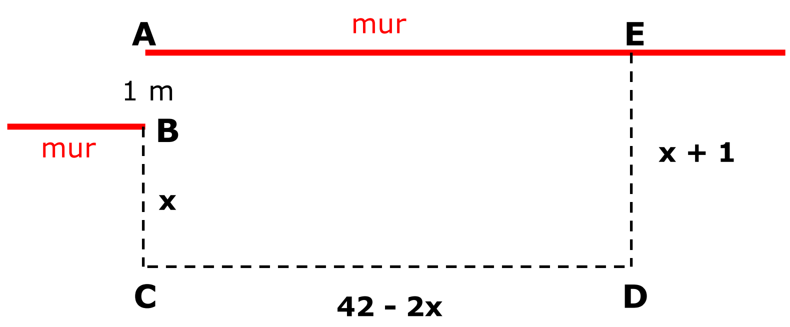
Comme CD est une longueur, on doit avoir $CD \geq 0$.
D'où : $42 - 2x \geq 0$, c'est-à-dire $42 \geq 2x$. En résultat : $x \leq 21$.

Par conséquent, la variable x vérifie : $\underline{0 \leq x \leq 21}$. Autrement dit, la variable x ne peut pas prendre n'importe quelle valeur. Nous avons : $x \in [0 ; 21]$.



Observant que l'aire du rectangle est égale à ED × CD, l'aire du rectangle ACDE, notée ci-après A(x), est donnée par :

$$A(x) = ED \times CD = (x + 1)(42 - 2x) = -2x^2 + 40x + 42.$$



Pour x = 0, nous avons A(0) = 42.

On remarque que A est la fonction qui, à tout réel x de l'intervalle [0 ; 21], associé le réel $-2x^2 + 40x + 42$.

A est donc une fonction polynôme de degré 2 dont la forme développée est :

$$A(x) = -2x^2 + 40x + 42.$$

On peut vérifier aisément que A(x) = -2(x + 1)(x - 21) est la forme factorisée correspondante.

Afin de déterminer l'aire maximale du poulailler, une représentation graphique de la fonction A, qui à la variable x associe l'aire A(x), sous Excel ou GeoGebra, est alors aisée à réaliser, confirmant la conjecture observée grâce au tableau.

Courbe réalisée sous GeoGebra représentant A(x) en fonction de la variable x

Sur cette courbe, on observe que l'aire maximale est obtenue pour une valeur de x qui est égale à 10.

Il s'agit là d'une observation... et non d'une preuve absolue !

Démonstration

Une conjecture ne constituant pas une preuve, il est nécessaire de démontrer mathématiquement le résultat pressenti : $A(x) \leq A(10) = 242$, inégalité qui stipule le fait que 242 est un maximum de l'aire, obtenu pour $x = 10$.

Méthode :

Calculons $A(x) - A(10)$.

$$\begin{aligned} A(x) - A(10) &= -2x^2 + 40x + 42 - 242 \\ &= -2x^2 + 40x - 200 \\ &= -2(x^2 - 20x + 100) \\ &= -2(x^2 - 2 \times x \times 10 + 10^2) \\ &= -2(x - 10)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Donc : $A(x) - A(10) \leq 0$

En résultat, $A(x) \leq A(10) = 242$ pour tout $x \in [0 ; 21]$.

L'aire maximale du poulailler est donc bien 242 m², valeur obtenue pour BC = 10 m.

De plus, comme $A(x) - A(10) = -2(x - 10)^2$, on note que :

$A(x) = A(10) - 2(x - 10)^2$. C'est-à-dire :

$$A(x) = - 2(x - 10)^2 + 242.$$

On retrouve la forme canonique de $A(x)$ avec les coordonnées $(\alpha ; \beta)$ du sommet S de la parabole.