Fonctions polynômes

Soit f la fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Image d'un nombre par f

L'image du nombre x_0 par la fonction f est : $f(x_0) = a(x_0)^2 + b(x_0) + c$.

Ce nombre se calcule à l'aide des fractions lorsque possible, la calculatrice étant généralement à proscrire.

Exemple

Soit f définie par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.
Déterminons l'image des nombres -3, 0, $\frac{1}{2}$ et 2 par la fonction f.

$f(-3) = 2(-3)^2 - 5(-3) + 3 = 2(9) + 15 + 3 = 18 + 18 = 36$.

$f(0) = 2(0)^2 - 5(0) + 3 = 3 \leftarrow$ Ordonnée à l'origine !

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{2} + 3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = -\frac{4}{2} + 3 = -2 + 3 = 1$$

$f(2) = 2(2)^2 - 5(2) + 3 = 2(4) - 10 + 3 = 8 - 7 = 1$.

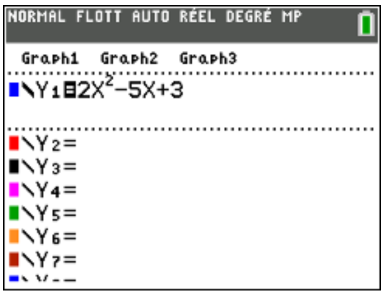
Tableau de valeurs

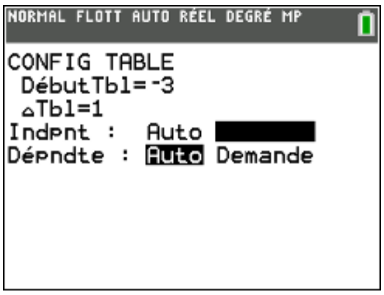
Pour réaliser un tableau de valeurs pour une fonction polynôme f, il est nécessaire de choisir plusieurs valeurs de x.

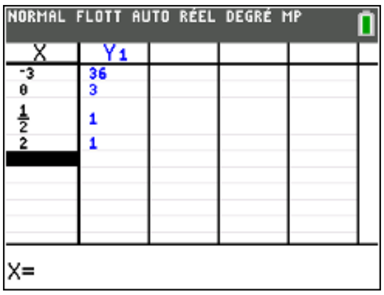
Tableau de valeurs de f

x	-3	0	1/2	2
f(x)	36	3	1	1

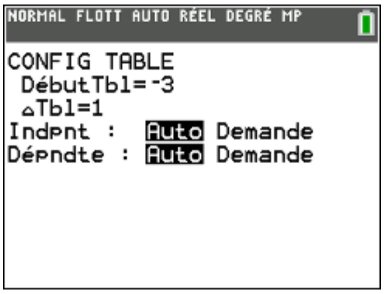
A la calculatrice, on peut vérifier les valeurs calculées.

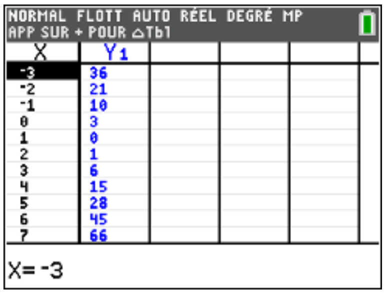






A la calculatrice, on peut aussi obtenir un tableau exhaustif de valeurs.





Antécédent d'un nombre par f

Déterminer le ou les antécédents du nombre réel k par la fonction f revient à rechercher les valeurs de x pour lesquelles f(x) = k.

Cela revient à résoudre l'équation f(x) = k, c'est-à-dire $ax^2 + bx + c = k$.

Une telle équation possède 0, 1 ou 2 solutions.
Sa résolution n'est possible que par des manipulations algébriques appropriées.

Exemple 1

Soit f définie par $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
Déterminons le ou les antécédents du nombre 6 par la fonction f.

Résolvons f(x) = 6.

$f(x) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$.

L'équation f(x) = 6 possède 2 solutions 0 et 5.

Le nombre 6 a pour antécédents 0 et 5 par la fonction f.
On sait que f(0) = f(5) = 6.

Exemple 2

Soit f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 4$.
Déterminons le ou les antécédents du nombre 0 par la fonction f.

Résolvons f(x) = 0.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x(2) + 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

L'équation f(x) = 0 possède une seule solution 2.

Le nombre 0 a pour unique antécédent 2 par la fonction f.
On sait que f(2) = 0

Exemple 3

Soit f définie par $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$.

1. Montrons que $2x^2 + 4x - 3 = 2(x + 1)^2 - 5 \leftarrow$ Forme canonique

On a : $2(x + 1)^2 - 5 = 2(x^2 + 2(x)(1) + (1)^2) - 5 = 2(x^2 + 2x + 1) - 5 = 2x^2 + 4x + 2 - 5$
Donc : $2(x + 1)^2 - 5 = 2x^2 + 4x - 3$ cqfd

2. Déterminons le ou les antécédents du nombre -5 par la fonction f.

Résolvons $f(x) = -5$.

$f(x) = -5 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 3 = - 5 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 - 5 = - 5 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = - 1$.

L'équation $f(x) = - 5$ possède une seule solution - 1.

Le nombre -5 a pour unique antécédent -1 par la fonction f.
On sait que $f(-1) = -5$.

Exemple 4

Soit f définie par $f(x) = 4x^2 + 12$.

Déterminons le ou les antécédents du nombre - 4 par la fonction f.

Résolvons $f(x) = - 4$.

$f(x) = -4 \Leftrightarrow 4x^2 + 12 = - 4 \Leftrightarrow 4x^2 = - 16 \Leftrightarrow x^2 = -16/4 \Leftrightarrow x^2 = - 4 < 0$!

Cette équation n'admet aucune solution.

Le nombre - 4 ne possède pas d'antécédent par la fonction f.