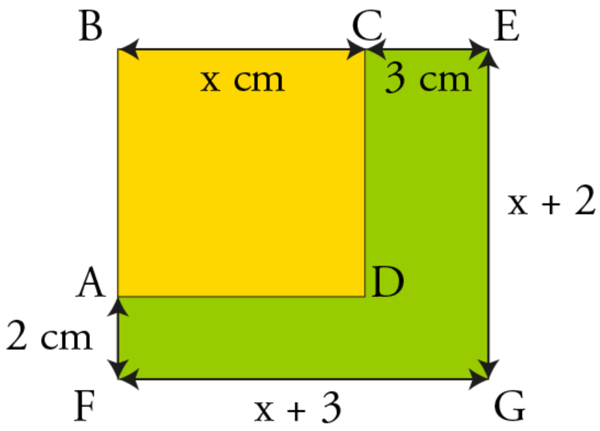
EXERCICE 53

On considère la figure ci-dessous :



Sur la figure, ABCD est un carré de côté ayant pour longueur x, x étant variable. Le quadrilatère BEGF est un rectangle tel que BE = x + 3 et BF = x + 2.

On souhaite déterminer quelle valeur attribuer à la variable x pour que l'aire du rectangle BEGF soit le double de l'aire du carré ABCD.

1. Déterminons l'aire A_C du carré et l'aire A_R du rectangle.

   On a : $A_C = AB \times AB = x^2$.

   De plus : $A_R = BF \times BE = (x + 2)(x + 3)$.

   $A_R = 2\ A_C \Leftrightarrow (x + 2)(x + 3) = x^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2x + 6 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 2x^2$

   $\Leftrightarrow -x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$

   Pour que $A_R = 2\ A_C$, il faut et il suffit que la longueur du côté [AB] du carré soit solution de l'équation $x^2 - 5x - 6 = 0$.

2. Considérons la fonction $f : x \to x^2 - 5x - 6$

   Cette fonction est une fonction polynôme de degré 2 définie sur $[0, +\infty[$ car f est définie par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = -6$.
   La représentation graphique de f est une parabole de sommet S ayant pour coordonnées $(\alpha ; \beta)$ avec :

   $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-5)}{2(1)} = \frac{5}{2}$ et $\beta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) - 6 = -\frac{49}{4}$.

La forme canonique de f est $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$.

Un regard rapide sur cette expression nous permet de voir qu'il s'agit là d'une identité remarquable de la forme $a^2 - b^2$.

Factorisons f(x).

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left[\left(x - \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)\right]\left[\left(x - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{7}{2}\right)\right]$$

$$f(x) = [x - 6][x + 1]$$

3. Rappelons que pour que $A_R = 2\ A_C$, il faut et il suffit que la longueur du côté [AB] du carré soit solution de l'équation $x^2 - 5x - 6 = 0$.

   Or, $f(x) = x^2 - 5x - 6 = (x - 6)(x + 1) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$

   $x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$ $x - 6 = 0$ ou $x + 1 = 0$

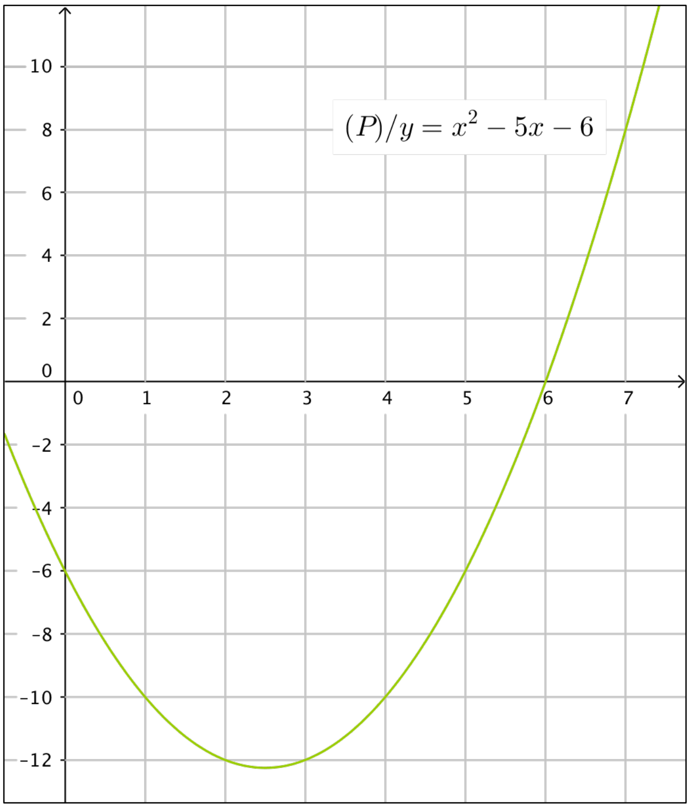
   $x = 6$ $\qquad$ $x = -1$

   AB étant une distance, on a : $x \geq 0$.

   <u>Conclusion</u>

   La seule solution pour laquelle $A_R = 2\ A_C$ est le réel 6.

Tracé de la parabole représentative de la fonction polynomiale f



La situation dans laquelle l'aire du rectangle BEGF est le double de l'aire du carré ABCD est représentée ci-dessous :