Activité autour des probabilités : Le Grand Duc de Toscane

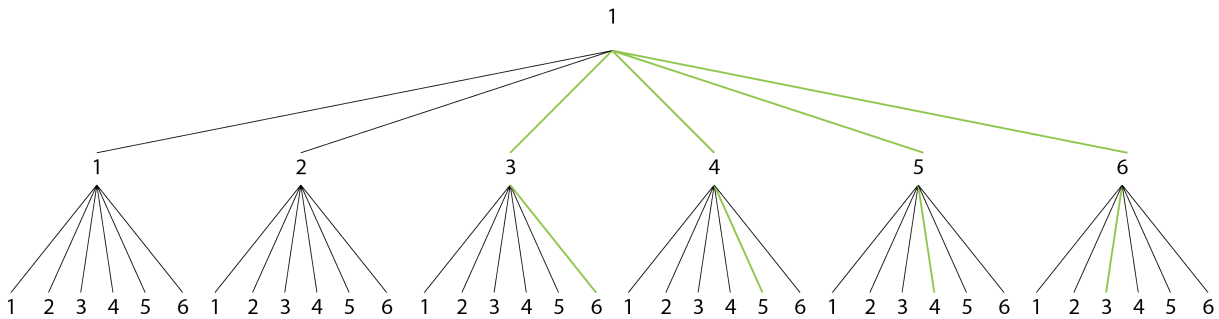
12 Problème du Grand Duc de Toscane

Le problème du Grand Duc était fondé sur l'étude du jeu de « passe-dix » en vogue à la cour de Florence au début du XVII^{e} siècle. Ce jeu de dés consistait à lancer trois dés cubiques équilibrés et à faire la somme des nombres portés par les trois faces supérieures.
Le Grand Duc observa qu'« obtenir une somme égale à 10 » avait tendance à apparaître plus souvent qu'« obtenir une somme égale à 9 », alors qu'il y a autant de possibilités d'écrire 9 ou 10 comme la somme de trois nombres :

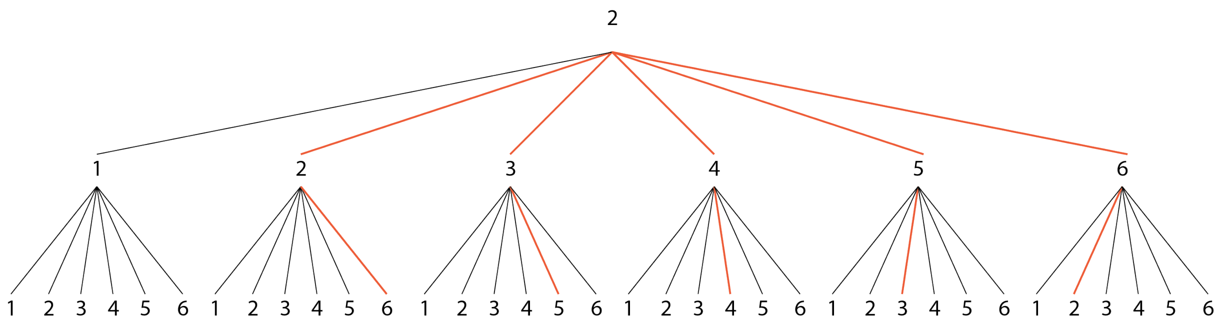
- $6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3 = 10$;
- $6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3 = 9$.

Élaborer une stratégie pour prouver que l'observation faite par le Grand Duc de Toscane est fondée.

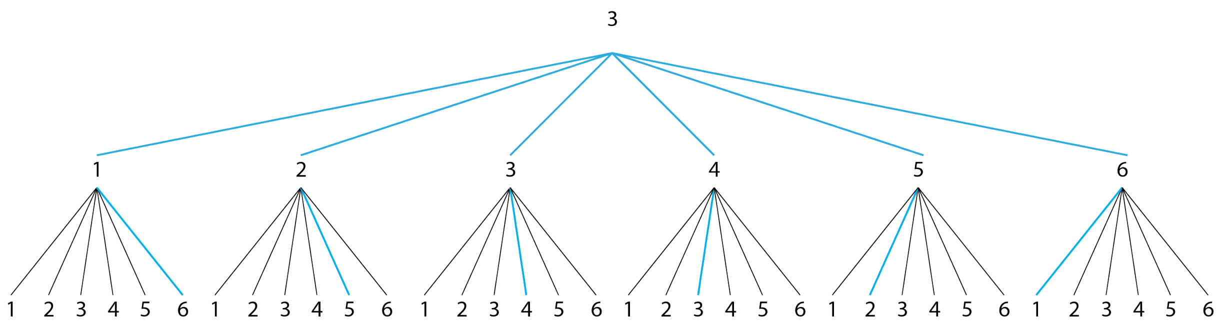
Représentons l'univers de l'expérience aléatoire qui consiste à lancer les trois dés à l'aide d'un arbre et colorions les branches associées aux résultats pour lesquels la somme des chiffres obtenus est 10.
On note A l'événement : "La somme des chiffres est égale à 10".



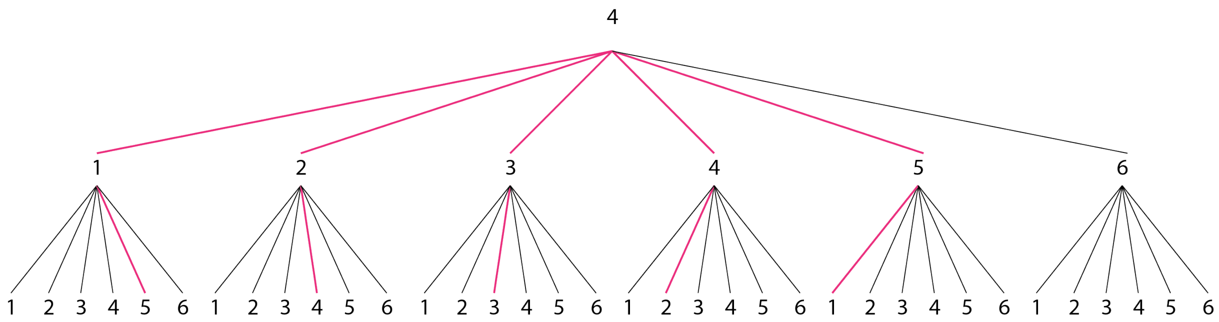
4 résultats réalisent A



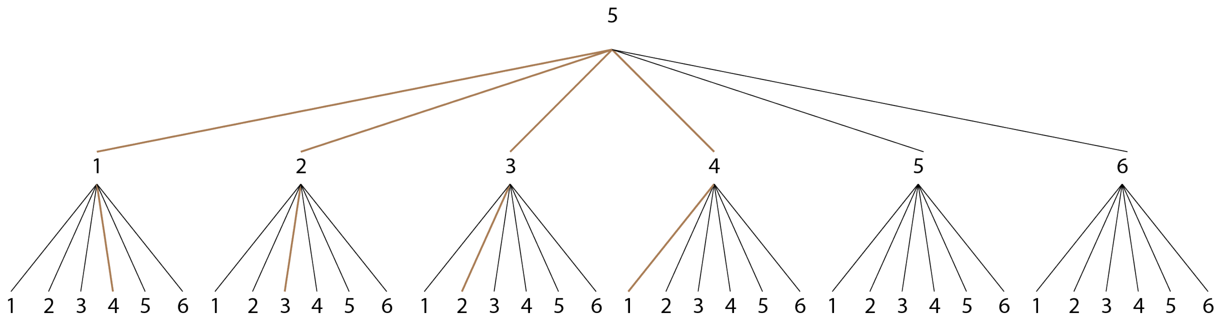
5 résultats réalisent A



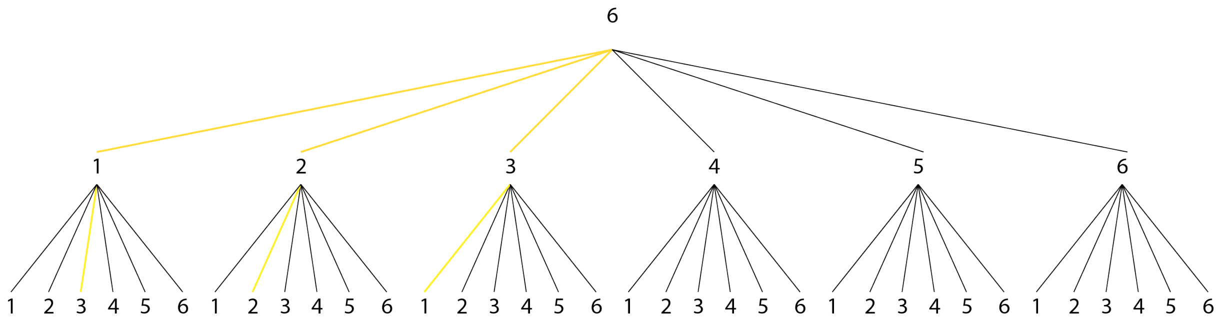
6 résultats réalisent A



5 résultats réalisent A



4 résultats réalisent A



3 résultats (en jaune) réalisent A

D'après la représentation arborescente ci-dessus, on constate que le nombre de résultats possibles de l'expérience aléatoire est égal à : 6 × 6 × 6 = 216. Donc : <u>Card Ω = 216</u>.

Considérons l'événement A : "La somme des chiffres est égale à 10".
l'événement B : "La somme des chiffres est égale à 9".

<u>Déterminons P(A)</u>

D'après la représentation, le nombre de résultats qui réalisent l'événement A est égal à : 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3, donc : 27.
Ainsi : <u>Card A = 27</u>.

La situation étant une situation d'équiprobabilité (aucun résultat n'étant favorisé puisque les dés sont parfaitement équilibrés), nous pouvons écrire :

$$P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{27}{216} = \frac{3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{8}$$

<u>Déterminons P(B)</u>

D'après la représentation, le nombre de résultats qui réalisent l'événement B est égal à : 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2, donc : 25.

Ainsi : Card B = 25.

La situation étant une situation d'équiprobabilité, nous pouvons écrire :

$$P(B) = \frac{Card\ B}{Card\ \Omega} = \frac{25}{216}$$

En résultat, nous constatons que la probabilité d'obtenir une somme égale à 9 est inférieure à la probabilité d'obtenir une somme égale à 10. L'observation du Grand Duc de Toscane est confortée par la théorie des probabilités : Son observation est pertinente !