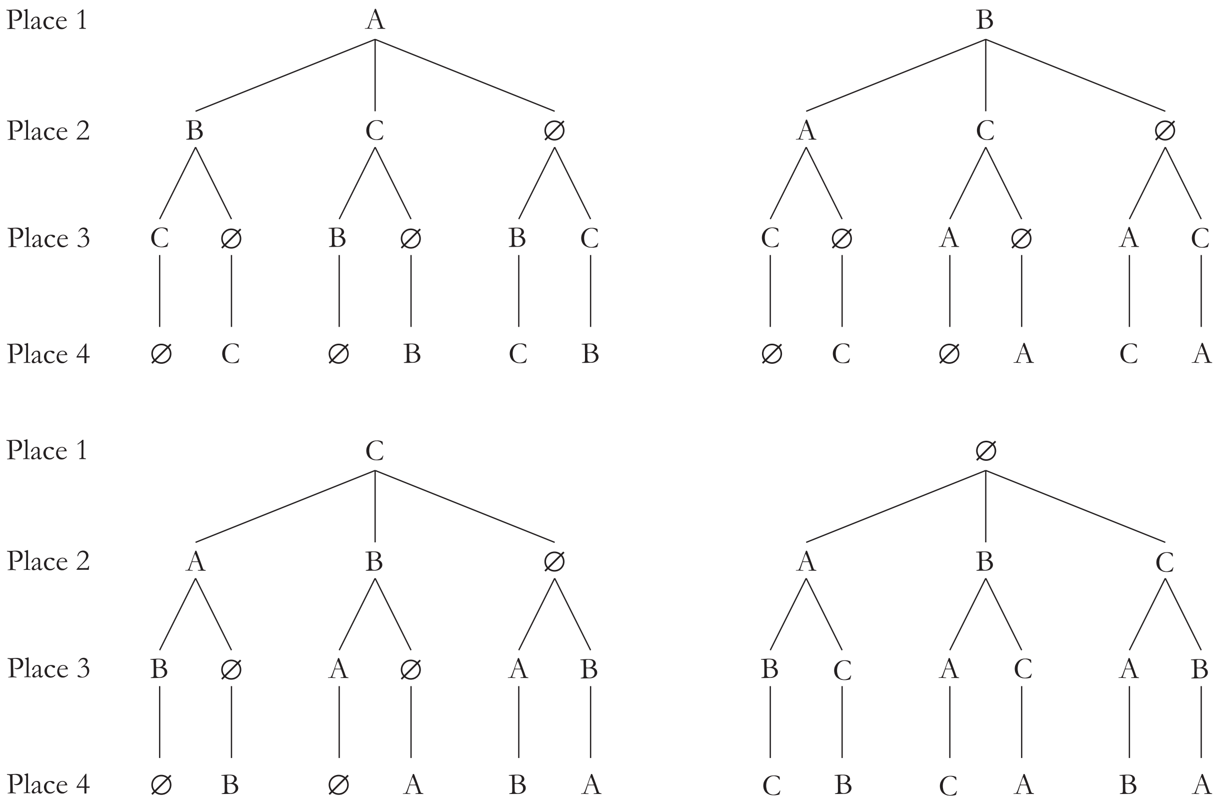
Correction de l’exercice 27

27 Une petite entreprise dispose de quatre places de parking. Les employés, au nombre de quatre, viennent au travail avec trois voitures A, B et C.
Combien y a-t-il de dispositions où les voitures A et B sont côte à côte ?

La résolution de ce problème peut se faire en simulant physiquement la situation décrite. Il nous est loisible de matérialiser les trois véhicules A, B et C par trois rectangles découpés dans des feuilles cartonnées, tous de couleurs distinctes, et de matérialiser le parking de quatre places, que nous numéroterons de 1 à 4, par un dessin. La détermination des dispositions où les voitures A et B sont côte à côte peut alors s’opérer par tâtonnements et simple dénombrement des configurations testées, comme sur la photographie ci-dessous.

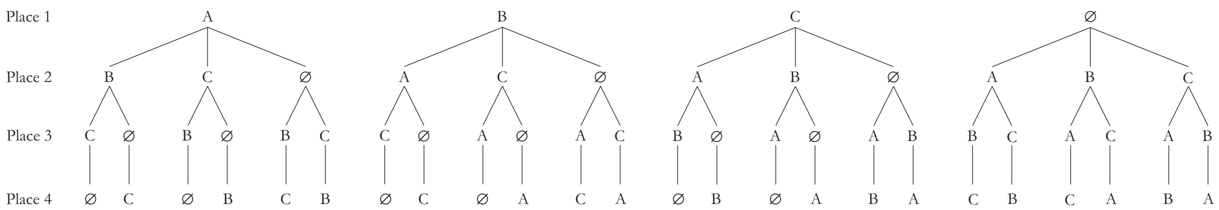
Nous dénombrerions par la simulation 12 dispositions dans lesquelles les véhicules A et B seraient côte à côte.

Une modélisation via des arbres s’avérera néanmoins plus rapide et féconde, permettant non seulement de répondre à la question posée, mais aussi de déterminer toutes les dispositions possibles des véhicules sur le parking, comme ci-dessous :



A la lecture des arbres dessinés, nous dénombrons $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ dispositions possibles des véhicules sur le parking, la première disposition étant ABC∅.

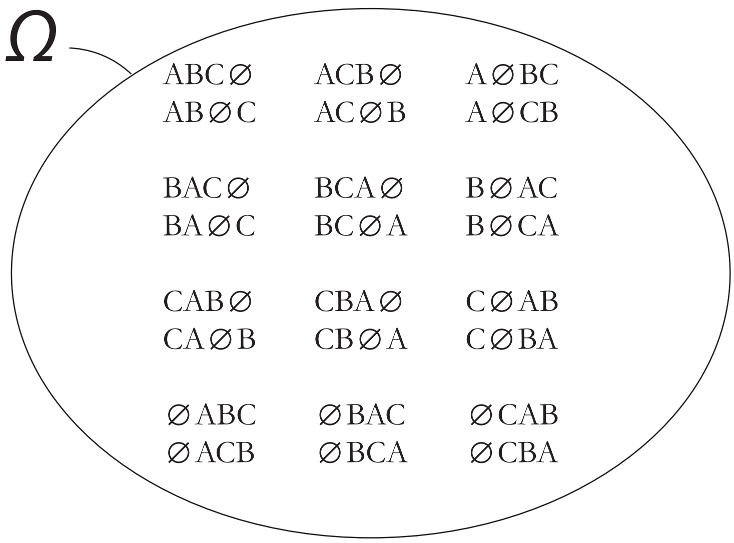
En observant plus attentivement la structure arborescente construite pour représenter toutes les dispositions possibles des trois voitures A, B et C sur le parking de quatre places, nous observons que celle-ci correspond à celle que nous aurions obtenue en modélisant le tirage, sans remise, de quatre boules numérotées A, B, C et ∅.



Les mots Place 1 à Place 4 étant remplacés dans un tirage de quatre boules par les mots Tirage 1 à Tirage 4, le fait de ne pas remettre la boule tirée décrémentant à chaque tirage le nombre de boules susceptibles d'être tirées.

Ce n'est pas un hasard si nous avons étudié les tirages avec et sans remise. Leurs modélisations par des arbres se retrouvent dans une grande diversité de problèmes, apparemment différents mais structurellement identiques.

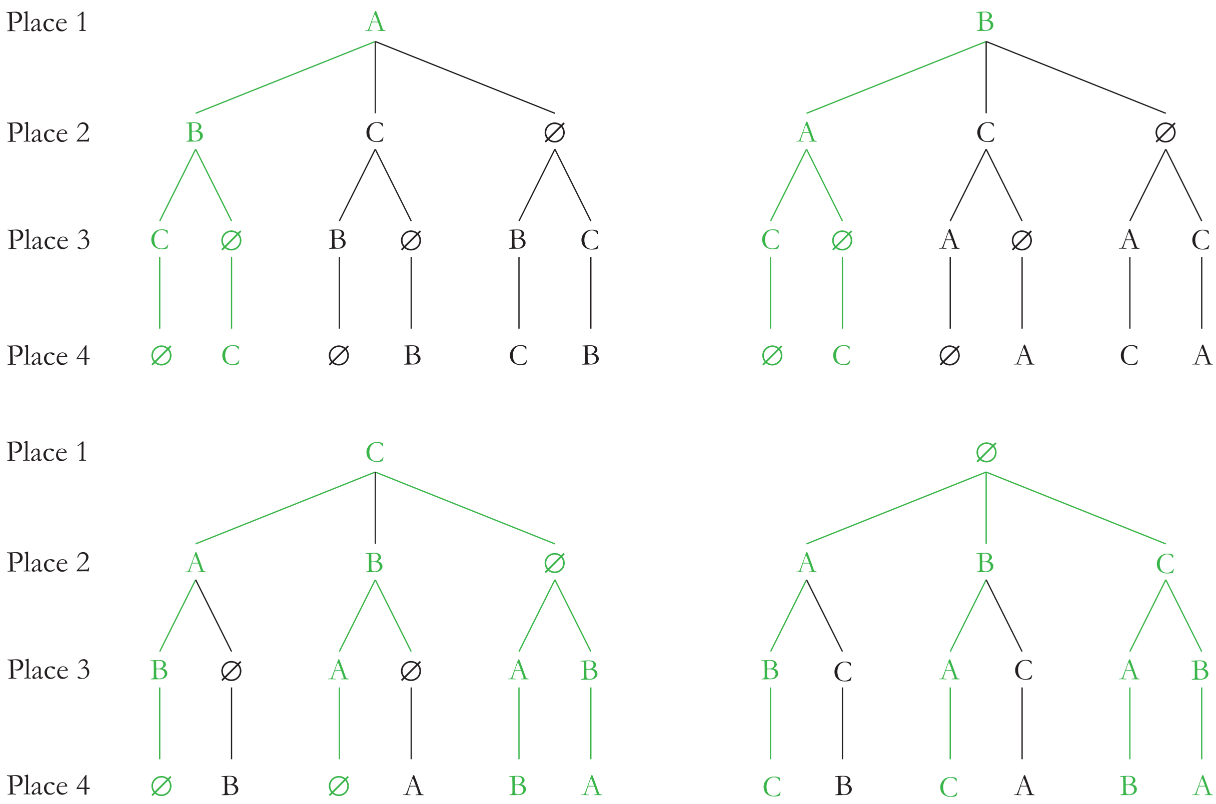
L'univers Ω de l'expérience aléatoire qui consisterait à former au hasard une disposition comporte donc 24 résultats possibles, comme ci-dessous.



Il va sans dire que les arbres dessinés constituent un moyen efficace de se représenter le contenu de l'univers Ω de l'expérience aléatoire et que la représentation d'Euler-Venn ci-dessus n'apporte aucune information supplémentaire. Ici, Card Ω = 24.

Considérons l’événement E : « Les véhicules A et B sont côte à côte ».

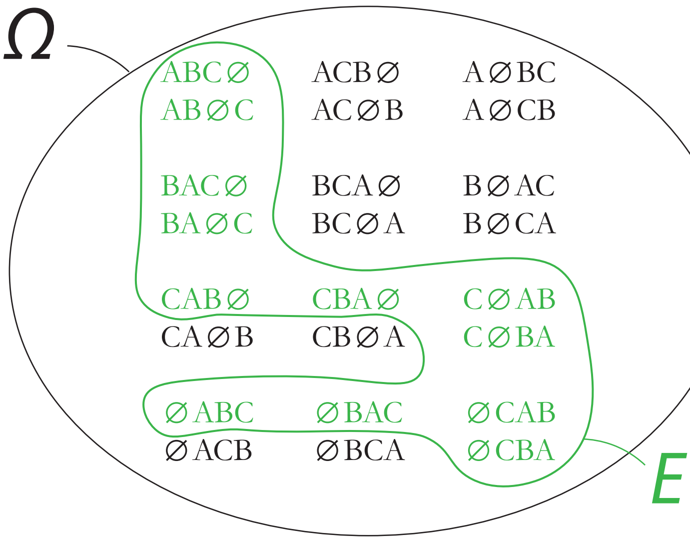
Les résultats ou dispositions qui réalisent cet événement sont dénombrables en vert sur les arbres représentés, comme ci-dessous :



Nous dénombrons au total 2 + 2 + 4 + 4 = 12 dispositions dans lesquelles A et B sont côte à côte.

Donc : Card(E) = 12.

En utilisant la représentation d'Euler-Venn, nous pouvons écrire :



La situation étant une situation d'équiprobabilité (aucune disposition n'étant favorisée), nous pouvons en déduire que la probabilité que A et B se trouvent côte à côte est :

$$P(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Il est important de comprendre que tout problème de mathématiques nécessite, avant même d'aborder sa résolution, une bonne représentation schématique ou modélisation. A ce titre, les arbres constituent un outil très puissant.