Loi de probabilité

Définition 10

Faire des probabilités revient à assigner à des événements des poids entre 0 et 1.

Corollaire

Pour tout événement E de l'univers Ω d'une expérience aléatoire considérée, la probabilité que l'événement E se réalise ou soit réalisé se note P(E).

P(E) est un poids entre 0 et 1, c'est-à-dire un nombre réel compris entre 0 et 1.

P(E) se lit « probabilité de l'événement E ».

On a toujours : $0 \leq P(E) \leq 1$.

Si $P(E) = 0$, alors E est un événement impossible.

Si $P(E) = 1$, alors E est un événement certain.

Définition 11

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et E_1, E_2, ..., E_n des événements de Ω.

On dit que les événements E_1, E_2, ..., E_n forment une **partition** de l'univers Ω lorsque tous les événements sont deux à deux disjoints et lorsque leur union est l'univers Ω.

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_3 = \varnothing$, ... $E_1 \cap E_n = \varnothing$,

$E_2 \cap E_3 = \varnothing$, ... $E_2 \cap E_n = \varnothing$,

...

$E_{n-1} \cap E_n = \varnothing$,

$E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \cup E_n = \Omega$

Exemple 1

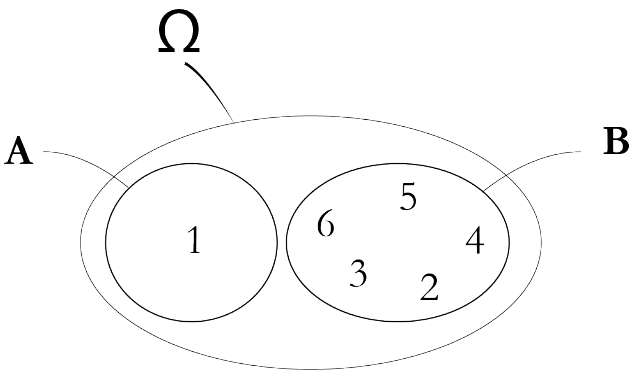
Supposons que nous lancions un dé à six faces.

Considérons les deux événements :

A : « Le joueur obtient le nombre 1 ».

B : « Le joueur n'obtient pas le 1 ».

Univers Ω de l'expérience aléatoire



On constate que : $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$.

Conclusion : A et B forment une partition de Ω.

Exemple 2

Supposons que nous lancions un dé à six faces.

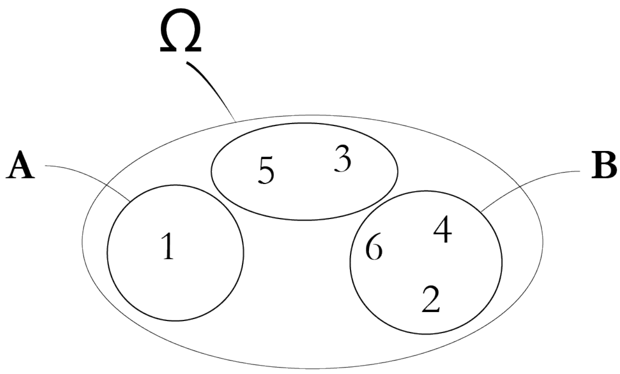
Considérons les trois événements :

A : « Le joueur obtient le nombre 1 ».

B : « Le joueur obtient un nombre pair ».

C : « Le joueur obtient le nombre 3 ou 5 ».

Univers Ω de l'expérience aléatoire



On constate que : $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ et $A \cup B \cup C = \Omega$.

Conclusion : A, B et C forment une partition de Ω.

Contre-exemple 1

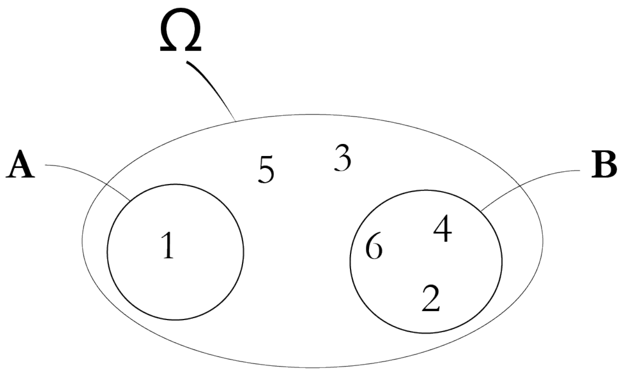
Supposons que nous lancions un dé à six faces.

Considérons les deux événements :

A : « Le joueur obtient le nombre 1 ».

B : « Le joueur obtient un nombre pair ».

Univers Ω de l'expérience aléatoire



On constate que : $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B \neq \Omega$.

Conclusion : A et B ne forment pas une partition de Ω car l'union des événements n'est pas l'univers.

Contre-exemple 2

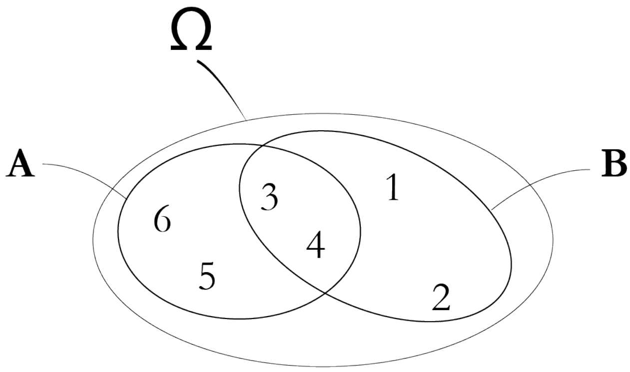
Supposons que nous lancions un dé à six faces.

Considérons les deux événements :

A : « Le joueur obtient un nombre supérieur ou égale à 3 ».

B : « Le joueur obtient un nombre plus petit que 5 ».

Univers Ω de l'expérience aléatoire



On constate que : $A \cap B \neq \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$.

Conclusion : A et B ne forment pas une partition de Ω car A et B ne sont pas disjoints.

Définition 12

Considérons une expérience aléatoire dont on suppose connus tous les résultats possibles, c'est-à-dire dont on suppose connu l'univers Ω, et considérons des événements formant une partition de Ω.

Donner une loi de probabilité associée à l'expérience aléatoire, c'est attribuer une probabilité à chacun des événements formant la partition de l'univers de sorte que la somme des probabilités soit égale à 1.

Une loi de probabilité se représente sous la forme d'un tableau ou d'un arbre de probabilité.

Exemple 1

Supposons que nous lancions une pièce non équilibrée et considérons les événements :

P : « La pièce tombe sur pile », et F : « La pièce tombe sur face ».

Ces deux événements forment une partition de l'univers Ω de l'expérience réalisée.

Un dispositif mécanique avait lancé 100 000 fois la pièce et obtenu 80 000 fois le côté pile. La probabilité que l'on obtienne pile peut être estimée à 80 000 sur 100 000, c'est-à-dire 0,8.

Autrement dit, nous pouvons légitimement supposer P(P) = 0,8.

La loi de probabilité associée au lancer de pièce peut se représenter sous la forme d'un tableau, comme ci-dessous :

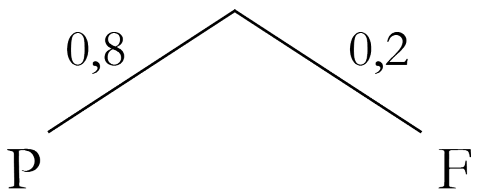
Événement	P	F
Probabilité	0,8	

La somme des probabilités étant égale à 1, il est facile de déduire que P(F) = 0,2.

D'où la loi de probabilité du lancer de pièce :

Événement	P	F
Probabilité	0,8	0,2

La loi de probabilité associée au lancer de pièce peut aussi se représenter sous la forme d'un arbre de probabilité, comme ci-dessous :



Cet arbre comporte deux branches issues d'un même nœud. P(P) = 0,8 et P(F) = 0,2.

Propriété

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.

Exemple 2

Supposons que nous lancions une pièce parfaitement équilibrée et considérons les événements :

P : « La pièce tombe sur pile », et F : « La pièce tombe sur face ».

Ces deux événements forment une partition de l'univers Ω de l'expérience réalisée.

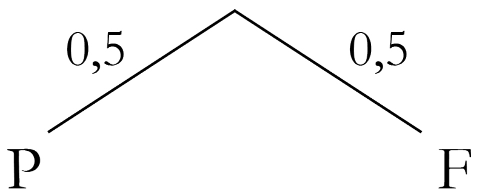
Aucun résultat n'étant favorisé puisque la pièce est parfaitement équilibrée, nous pouvons légitimement supposer P(P) = P(F) = 0,5. On parle de **situation d'équiprobabilité.**

La loi de probabilité associée au lancer de pièce peut se représenter sous la forme d'un tableau, comme ci-dessous :

Événement	P	F
Probabilité	0,5	0,5

La somme des probabilités est égale à 1. P(P) + P(F) = 1.

La loi de probabilité associée au lancer de pièce peut aussi se représenter sous la forme d'un arbre de probabilité, comme ci-dessous :



Ici, **la loi est** dite **équirépartie**.

Exemple 3

Supposons que nous lancions un dé à six faces et que nous sachions que la probabilité de tirer le 2, 3, 4 ou 5 soit deux fois plus grande que celle de tirer le 1, et que la probabilité de tirer le 6 soit la même que celle de tirer le 1, est-il possible d'en déduire la loi de probabilité de l'expérience ?

Notons i l'événement : « Le joueur tire le i » avec i = 1 à 6 et posons P(1) = p.

Les événements 1, 2, 3, 4, 5 et 6 forment une partition de l'univers Ω.

Loi de probabilité associée à l'expérience

Événement	1	2	3	4	5	6
Probabilité	p	2p	2p	2p	2p	p

La somme des probabilités étant toujours égale à 1, on peut écrire :

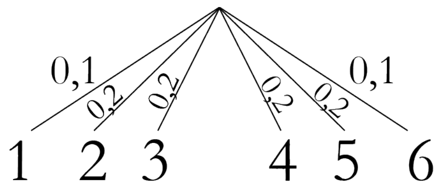
p + 2p + 2p + 2p + 2p + p = 1, d'où : 10p = 1 et p = 0,1.

Conclusion

La loi de probabilité du lancer de dé est représentée par :

Événement	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

Arbre de probabilité associé à l'expérience



Exemple 4

Supposons que nous lancions un dé à six faces.

Notons G l'événement : « Le joueur obtient le 6 et gagne ».

Notons P l'événement : « Le joueur n'obtient pas le 6 et perd ».

Supposons que nous sachions que la probabilité de gagner soit trois fois plus petite que celle de perdre.

Les événements G et P forment une partition de l'univers Ω.

Posons P(G) = p.

Loi de probabilité associée à l'expérience

Événement	G	P
Probabilité	p	3p

La somme des probabilités étant toujours égale à 1, on peut écrire :

p + 3p = 1, d'où : 4p = 1 et p = 0,25.

Conclusion

La loi de probabilité du lancer de dé est représentée par :

Événement	G	P
Probabilité	0,25	0,75

Arbre de probabilité associé à l'expérience