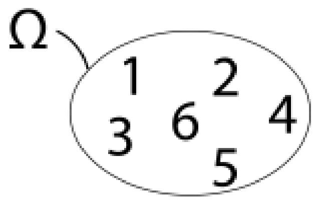
# Dossier : Synthèse autour des probabilités

## 1. Position du problème

Lorsqu'on réalise une expérience aléatoire, il est possible d'établir ce que l'on appelle une loi de probabilité. D'une manière simplifiée, une loi de probabilité associe à des événements de l'univers de l'expérience aléatoire, événements qui forment une "partition" de l'univers, des poids entre 0 et 1 selon le degré de vraisemblance des événements ; la somme des poids de tous les événements étant égale à 1.

**Un exemple pour bien comprendre...**

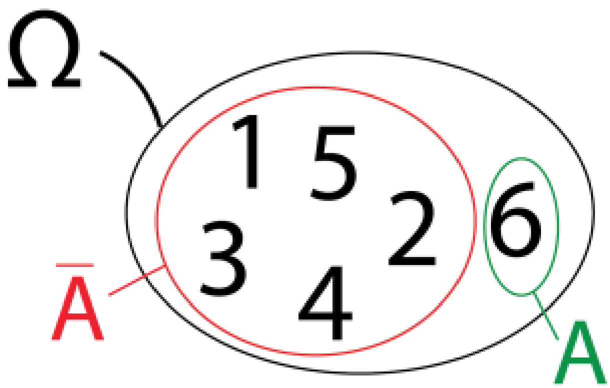
On considère le lancer d'un dé à six faces parfaitement équilibré. L'univers de l'expérience considérée est l'ensemble Ω ci-dessous :




Pour définir une loi de probabilité, il est d'abord nécessaire de se donner une partition de l'univers Ω. On rappelle qu'une partition d'un univers Ω est un ensemble d'événements deux à deux disjoints (ou incompatibles) dont l'union est l'univers Ω.

**Cas 1**

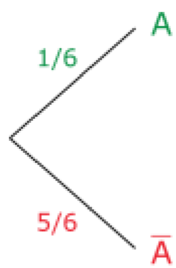
Soit A l'événement : "On obtient le 6" et $\bar{A}$ son événement contraire. Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers Ω car $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$.




La loi de probabilité de l'expérience sur la partition considérée est :

| Evénement | A | $\bar{A}$ |
|---|---|---|
| Probabilité | 1/6 | 5/6 |

Cette loi peut s'écrire d'une manière concise sous la forme d'un arbre de probabilités :



**Cas 2**

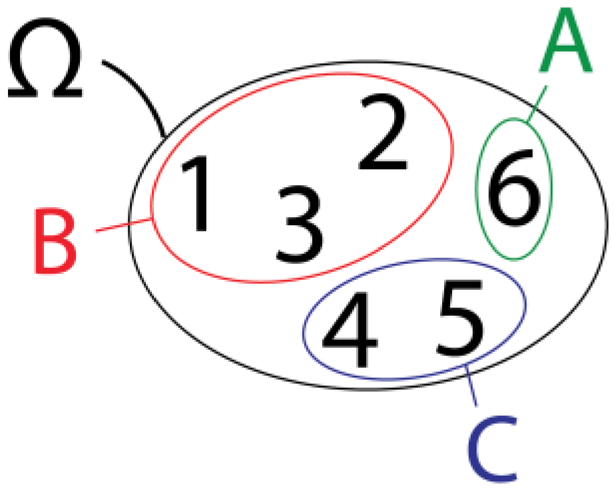
On considère les événements A : "On obtient le 6"

B : "On obtient un nombre inférieur ou égal à 3"

C : "On obtient 4 ou 5".

Les trois événements A, B et C forment une partition de l'univers Ω car :

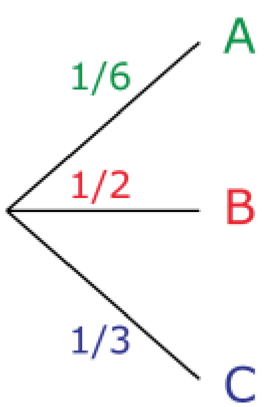
$$A \cap B = \emptyset,\ A \cap C = \emptyset,\ B \cap C = \emptyset \text{ et } A \cup B \cup C = \Omega$$




La loi de probabilité de l'expérience sur la partition considérée est :

| Evénement | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Probabilité | 1/6 | 3/6 = 1/2 | 2/6 = 1/3 |

Cette loi peut s'exprimer à l'aide de l'arbre de probabilités :

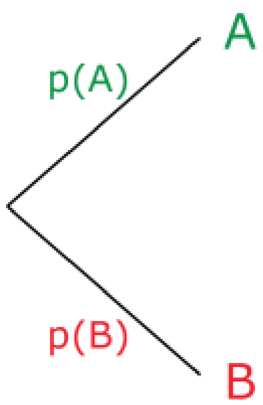



**2. <u>Propriété fondamentale</u>**

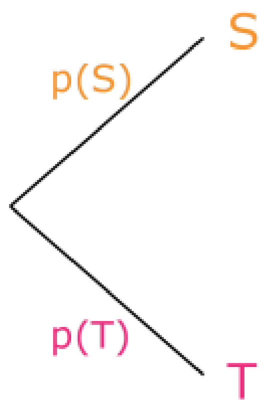
**Dans un arbre de probabilité, la somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.**

### 3. Répétition de deux expériences indépendantes

Lorsqu'on réalise successivement deux expériences indépendantes dont les lois de probabilités sont données par les arbres de probabilités ci-dessous, il est possible de modéliser la situation globale à l'aide d'un seul arbre de probabilités.

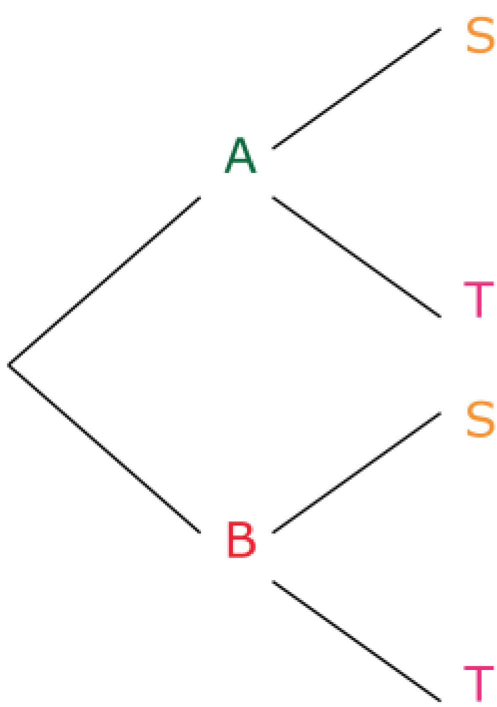



Expérience 1

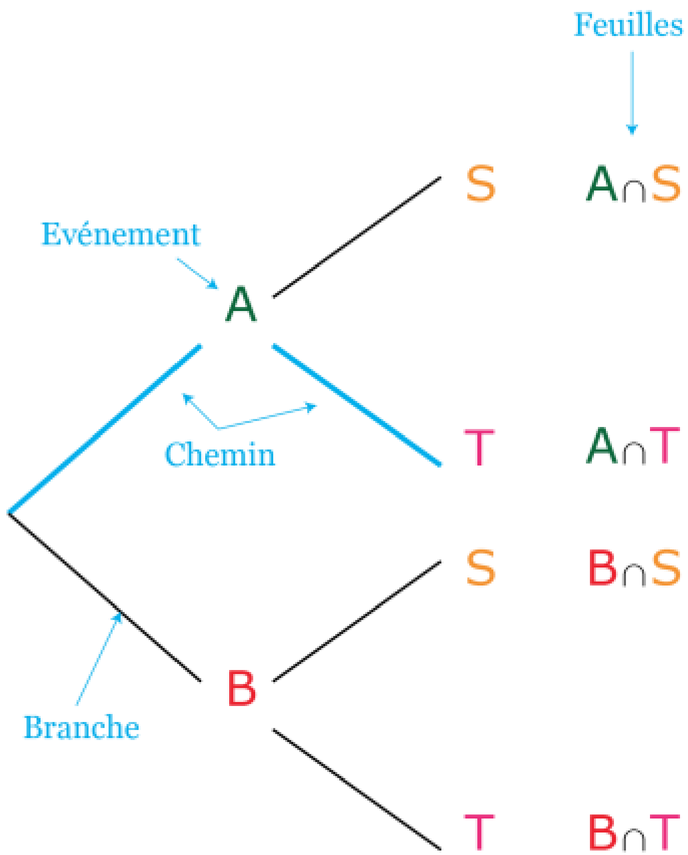



Expérience 2

Arbre de probabilité modélisant la situation globale

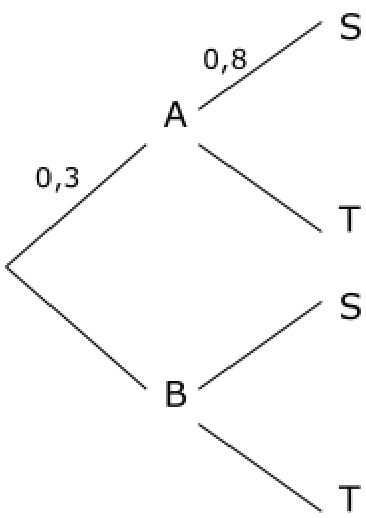


## 4. Vocabulaire de base




## 5. Identification et calculs de probabilités sur un arbre

On considère l'arbre de probabilité ci-dessous.




D'après l'arbre, on a : P(A) = 0,3 et P(S) = 0,8.

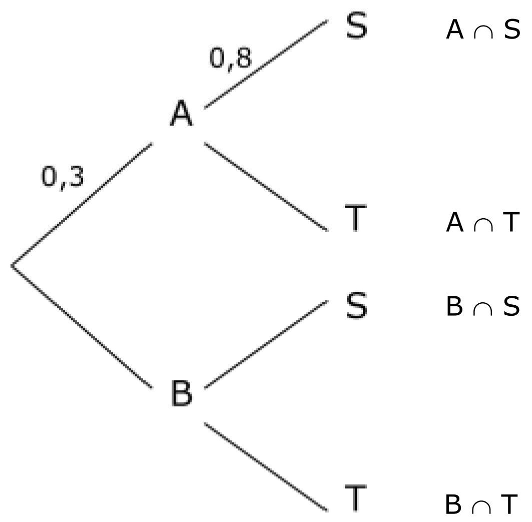
### 5.1. Propriété 1

La somme des probabilités indiquées sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

D'après l'arbre et la propriété 1, on a : P(B) = 0,7 et P(T) = 0,2.

### 5.2. Propriété 2

La probabilité d'une feuille est le produit des probabilités indiquées sur les branches du chemin qui aboutit à cette feuille.

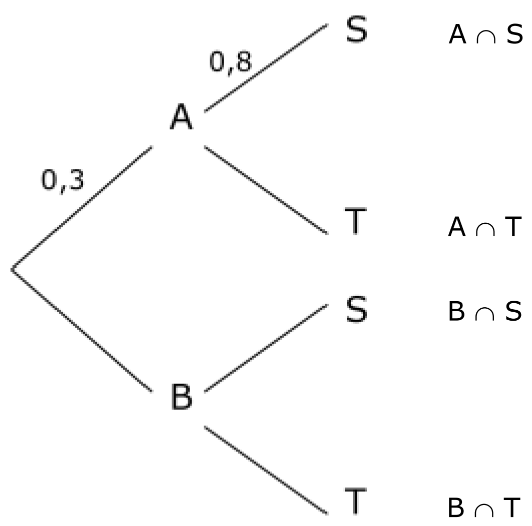



D'après l'arbre et la propriété 2, on a : $P(A \cap S) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

Exercice : Déterminer $P(A \cap T)$, $P(B \cap S)$ et $P(B \cap T)$.

### 5.3. Propriété 3

La probabilité de l'union de deux feuilles (événements disjoints) est égale à la somme des probabilités de chacune de ces feuilles.




On a, par exemple : $P((A \cap S) \cup (B \cap T)) = P(A \cap S) + P(B \cap T) = 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,2 = 0,38$.