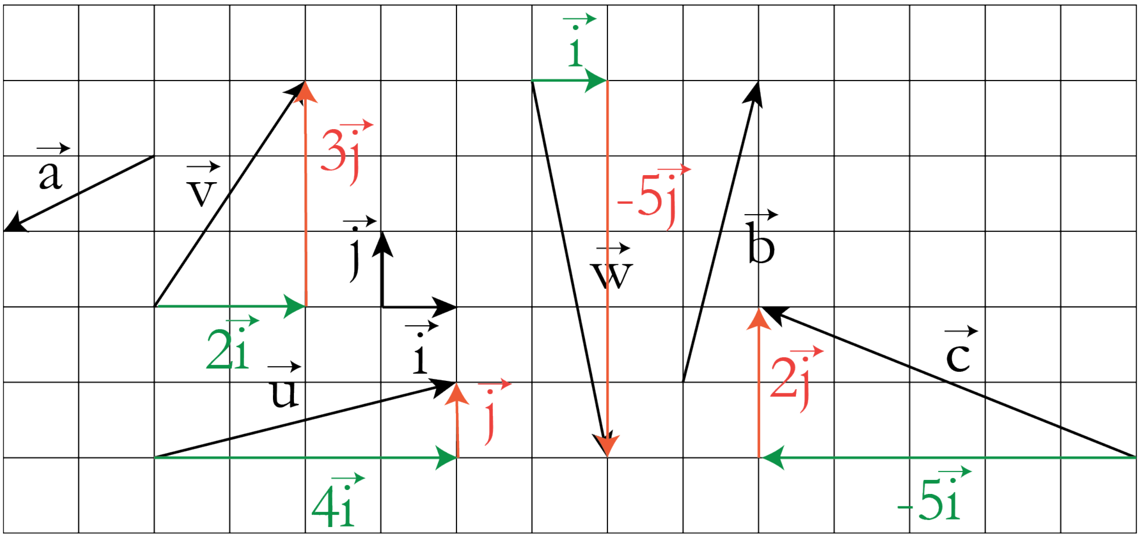
Activité - vecteurs

1. Déterminons les coordonnées vectorielles de chacun des vecteurs représentés.



D'après la figure, on a : $\vec{u} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

On dit que le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées vectorielles $\binom{4}{1}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Par <u>abus de langage</u>, nous n'hésiterons pas à écrire : $\vec{u} = \binom{4}{1}$, étant implicite le fait que la base considérée est la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

De plus, $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$. Le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées vectorielles $\binom{2}{3}$.

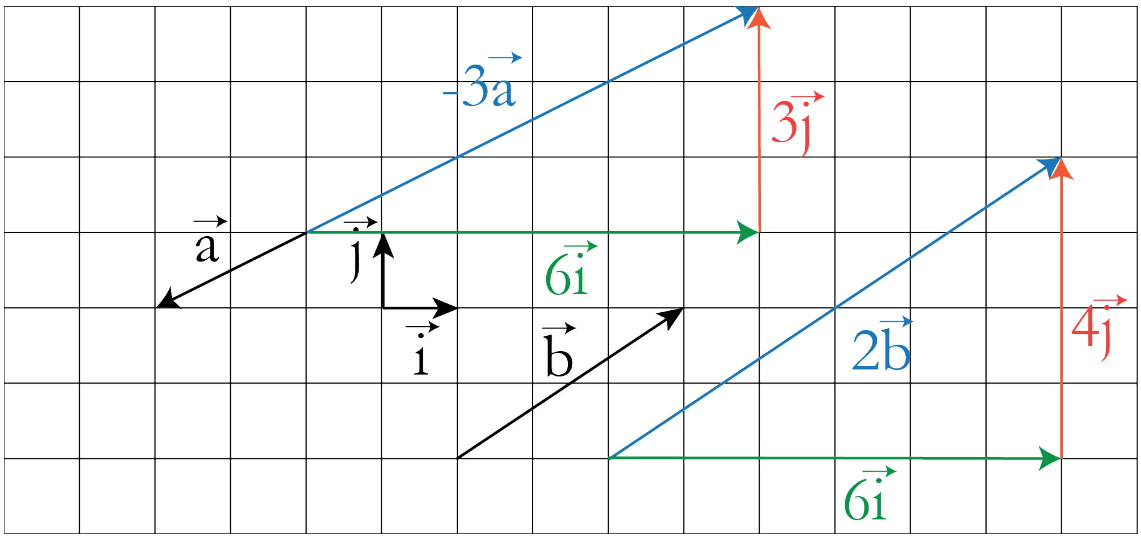
Par ailleurs : $\vec{w} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$. Le vecteur $\vec{w}$ a pour coordonnées vectorielles $\binom{1}{-5}$.

Enfin, on a : $\vec{a} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ et $\vec{c} = -5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

On dit que nous avons, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, les vecteurs $\vec{a}\binom{-2}{-1}$, $\vec{b}\binom{1}{4}$ et $\vec{c}\binom{-5}{2}$.

Écrire $\vec{a} = \binom{-2}{-1}$ est accepté mais à la condition de savoir qu'il s'agit là d'un abus de langage commode et que cela signifie que : $\vec{a} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

2. Tracé des vecteurs $-3\vec{a}$ et $2\vec{b}$. Voir ci-dessous.



D'après la figure, on a : $\vec{a} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a donc les vecteurs $\vec{a}\binom{-2}{-1}$ et $\vec{b}\binom{3}{2}$.

Par lecture graphique, on remarque que les vecteurs $-3\vec{a}$ et $2\vec{b}$ ont pour coordonnées respectives $\binom{6}{3}$ et $\binom{6}{4}$.

Ce qui signifie que : $-3\binom{-2}{-1} = \binom{6}{3}$.

De même : $2\binom{3}{2} = \binom{6}{4}$.

Règle de calcul

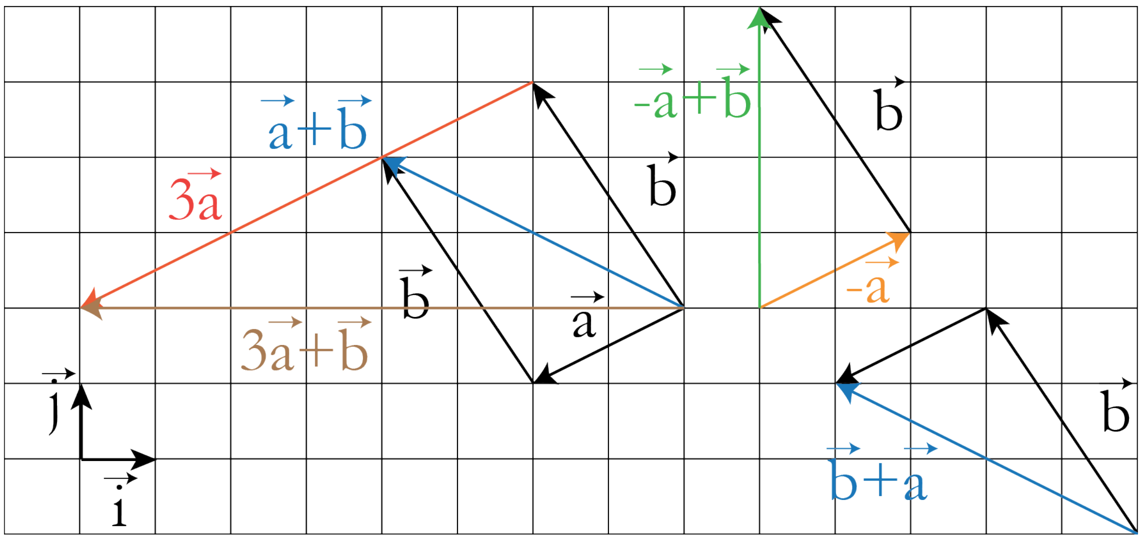
Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ un vecteur du plan et k un nombre réel.

$k\vec{u} = k(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}) = kx\vec{\imath} + ky\vec{\jmath} = \binom{kx}{ky}$ et $k\vec{u} = k\binom{x}{y}$

En résultat :

$$k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

3. Tracé des vecteurs $\vec{a}+\vec{b}$, $-\vec{a}+\vec{b}$ et $3\vec{a}+\vec{b}$.



D'après la figure, on a : $\vec{a} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{b} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a donc les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Par lecture graphique, on remarque que :

$\vec{a}+\vec{b} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$.

$-\vec{a}+\vec{b} = 4\vec{\jmath} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.

$3\vec{a}+\vec{b} = -8\vec{\imath} = \begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$.

Or : $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $-\vec{a}+\vec{b} = -\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $3\vec{a}+\vec{b} = 3\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Ce qui signifie que : $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$. De même : $-\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.

Et : $3\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\0\end{pmatrix}$.

Règles de calcul

Soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ deux vecteurs du plan, k et deux nombres réels.

$\vec{u}+\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} = (x+x')\vec{\imath} + (y+y')\vec{\jmath} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

et $\vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

En résultat :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

$\vec{u} - \vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) = (x - x')\vec{\imath} + (y - y')\vec{\jmath} = \binom{x-x'}{y-y'}$

et $\vec{u} - \vec{v} = \binom{x}{y} - \binom{x'}{y'}$

En résultat :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$$

D'une manière générale :

$$k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + k'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + k'x' \\ ky + k'y' \end{pmatrix}$$