vecteurs et colinéarité

déterminant

Définition - Déterminant de deux vecteurs du plan.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs définis par rapport à une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ l'expression $det(\vec{u},\vec{v})$ où

$$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Exercice 1

Soient $\vec{u}\binom{4}{0}$, $\vec{v}\binom{1}{3}$ et $\vec{w}\binom{-3}{-4}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Déterminer $det(\vec{u}\,,\vec{v})$, $det(\vec{u}\,,\vec{w})$ et $det(\vec{v}\,,\vec{w})$.

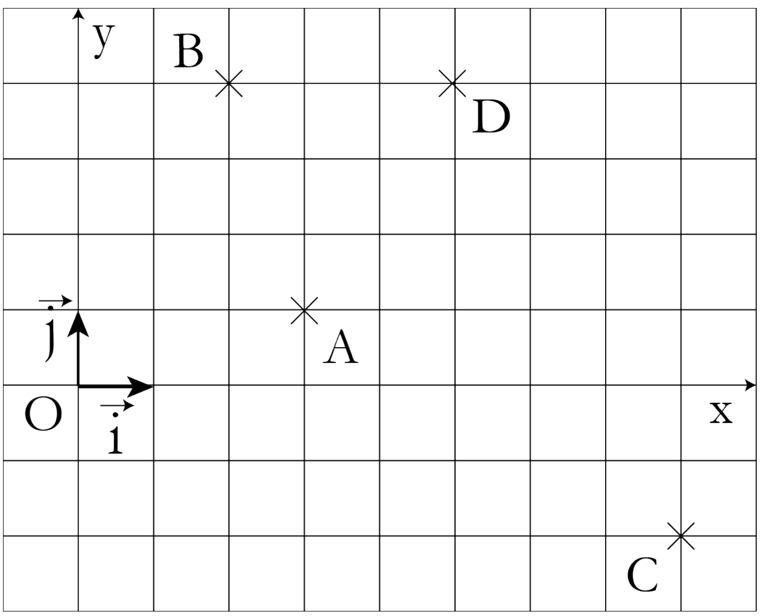
Exercice 2

Soient $\vec{u}\binom{2}{3}$, $\vec{v}\binom{-3}{-6}$ et $\vec{w}\binom{6}{9}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Déterminer $det(\vec{u}\,,\vec{v})$, $det(\vec{u}\,,\vec{w})$ et $det(\vec{v}\,,\vec{w})$.

Exercice 3

1. Déterminer les coordonnées vectorielles des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentés ci-dessous.



2. Déterminer $det\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BD}\right)$ et $det\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right)$.

colinéarité

Définition - Colinéarité de deux vecteurs non nuls du plan.

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs non nuls définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On dit que les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k (non nul) tel que : $\vec{u} = k\vec{v}$.

Propriété

Lorsque deux vecteurs sont colinéaires, les droites dirigées par ces deux vecteurs sont parallèles.

Exercice 4

Soient $\vec{u}\binom{4}{-1}$ et $\vec{v}\binom{-8}{2}$ deux vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

Exercice 5

Soient $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{9}{7}$ deux vecteurs. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

déterminant et colinéarité

Propriété

Soient $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ deux vecteurs non nuls définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement $det(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0$.

C'est-à-dire $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

Exercice 6

Soient $\vec{u}\binom{3}{4}$, $\vec{v}\binom{-9}{-8}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?
3. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

Parallélisme et colinéarité

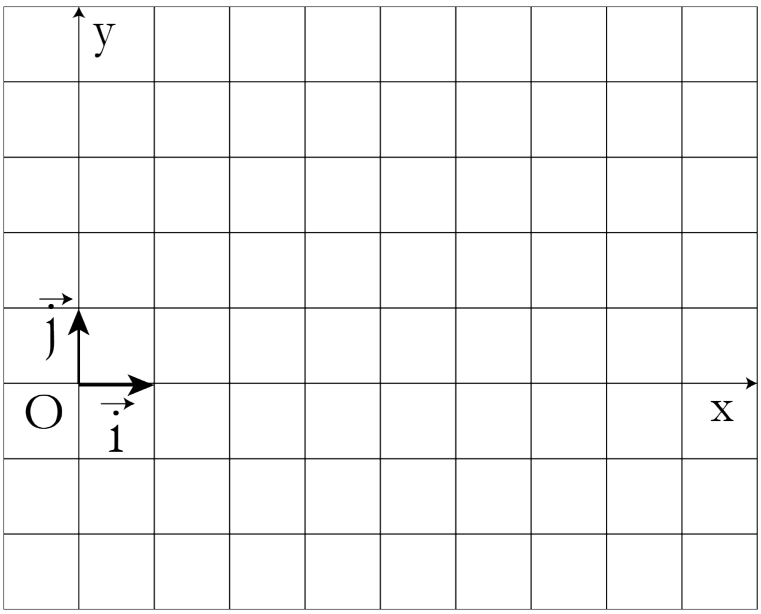
Propriété

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement $det(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}) = 0$.

Exercice 7

Soient A(2 ; 3), B(1 ; -1), C(3 ; -2) et D(5 ; 5) définis dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



1. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
2. Déterminer l'ordonnée y_E du point E(3 ; y_E) tel que (AB)//(ED).

Alignement et colinéarité

Propriété

Soient A, B et C trois points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement $det(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}) = 0$.

Exercice 8

Soient A(0 ; -2), B(4 ; 1/2) et C(9 ; 4) définis dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

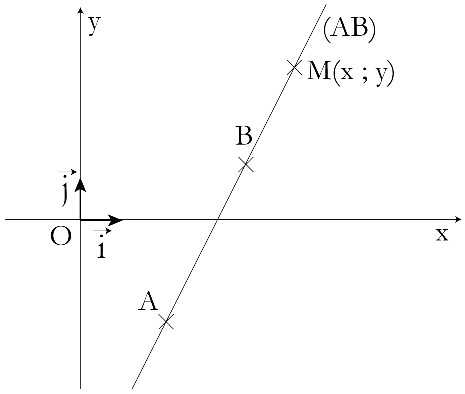
Les points A, B et C sont-ils alignés ?

équation de droite

Propriété

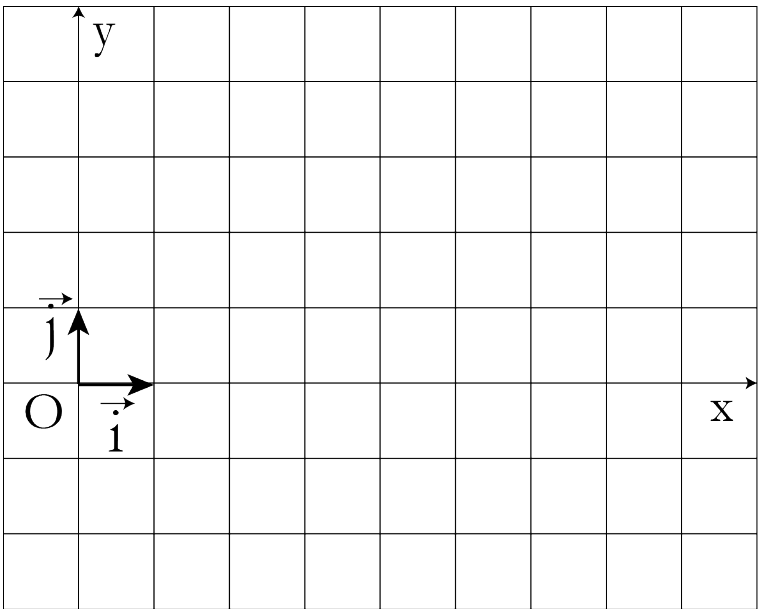
Soient A, B deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pour tout point M de la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $det(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AM}) = 0$.



Exercice 9

Soient A(3 ; -2) et B(1 ; 2) deux points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. En déduire l'équation réduite unique de la droite (AB).
3. Préciser la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite (AB).

Exercice 10

Soient A(-1 ; 4) un point du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $\vec{u}\binom{2}{-1}$ un vecteur directeur de la droite (D) passant par A. Déterminer l'équation réduite de (D).

déterminant et aire

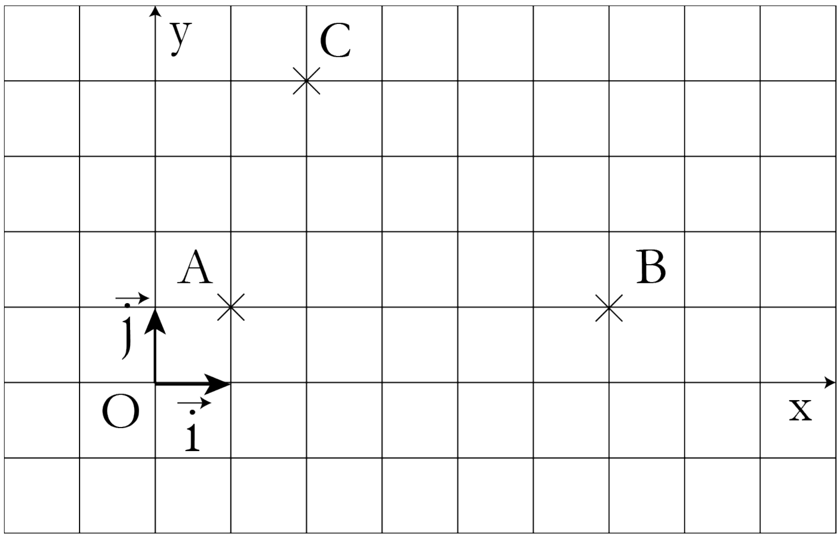
Propriété

Soient A, B et C trois points du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

La valeur absolue du déterminant $det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est égale à l'aire du parallélogramme formé par les côtés [AB] et [AC].

Exercice 11

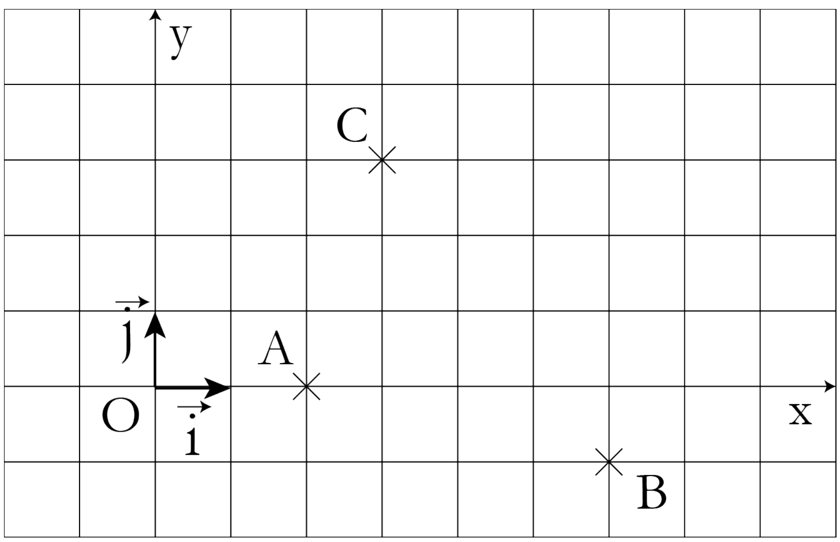
On considère la figure ci-dessous :



Déterminer l'aire du parallélogramme formé par les côtés [AB] et [AC].

Exercice 12

On considère la figure ci-dessous :



Déterminer l'aire du parallélogramme formé par les côtés [AB] et [AC].