Vecteurs et colinéarité

Déterminant

Exercice 1

Soient $\vec{u}\binom{4}{0}$, $\vec{v}\binom{1}{3}$ et $\vec{w}\binom{-3}{-4}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminons $det(\vec{u}\,,\vec{v})$, $det(\vec{u}\,,\vec{w})$ et $det(v\,,\vec{w})$.

$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - 1 \times 0 = 12.$

$det(\vec{u},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4 \times (-4) - (-3) \times 0 = -16.$

$det(\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-4) - (-3) \times 3 = -4 + 9 = 5.$

Exercice 2

Soient $\vec{u}\binom{2}{3}$, $\vec{v}\binom{-3}{-6}$ et $\vec{w}\binom{6}{9}$ trois vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminons $det(\vec{u}\,,\vec{v})$, $det(\vec{u}\,,\vec{w})$ et $det(v\,,\vec{w})$.

$det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 2 \times (-6) - (-3) \times 3 = -12 + 9 = -3.$

$det(\vec{u},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 6 \times 3 = 18 - 18 = 0.$

$det(\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = -3 \times 9 - (-6) \times 6 = -27 + 36 = 9.$

Exercice 3

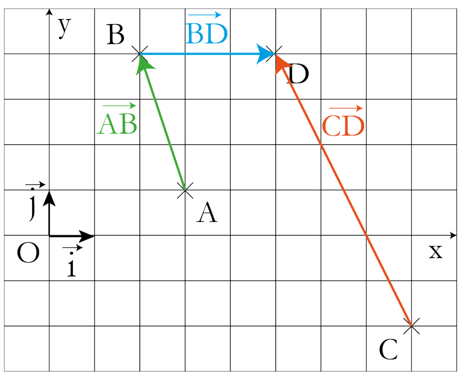
1. Déterminons les coordonnées vectorielles des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.

   D'après la figure, on a : A(3 ; 1), B(2 ; 4), C(8 ; -2) et D(5 ; 4).

   $\overrightarrow{AB} = \binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \binom{2-3}{4-1} = \binom{-1}{3}.$

   $\overrightarrow{BD} = \binom{x_D - x_B}{y_D - y_B} = \binom{5-2}{4-4} = \binom{3}{0}.$

   $\overrightarrow{CD} = \binom{x_D - x_C}{y_D - y_C} = \binom{5-8}{4-(-2)} = \binom{-3}{6}.$



2. Déterminons $det\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BD}\right)$ et $det\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right)$.

   $det\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{BD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1(0) - 3(3) = -9.$

   De plus : $det\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times 6 - (-3) \times 3 = -6 + 9 = 3.$

Exercice 4

Soient $\vec{u}\binom{4}{-1}$ et $\vec{v}\binom{-8}{2}$ deux vecteurs définis dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

A-t-on $\vec{v} = k\vec{u}$?

On a : $\vec{v} = \binom{-8}{2} = -2\binom{4}{-1} = -2\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{u}\binom{4}{-1}$ et $\vec{v}\binom{-8}{2}$ sont donc des vecteurs colinéaires.

Exercice 5

Soient $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{9}{7}$ deux vecteurs. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?

Le résultat peut être énoncé immédiatement : nous voyons que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car $9 = 3 \times 3$ mais $7 \neq 3 \times 2$.

On peut néanmoins démontrer via des écritures mathématiques et un raisonnement par l'absurde ce résultat et s'amuser ainsi à travailler nos compétences rédactionnelles.

Hypothèse : supposons que $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{9}{7}$ soient colinéaires.

$\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{9}{7}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \binom{9}{7} = k\binom{3}{2} \Leftrightarrow \binom{9}{7} = \binom{3k}{2k} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = 9 \\ 2k = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 = 3{,}5!$

Ce résultat étant absurde, l'hypothèse de départ est nécessairement fausse. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.