Term

Mathématiques

Hyperbole

SPÉCIALITÉ

NOUVEAU PROGRAMME 2020

Livre du professeur

Sous la direction de Joël Malaval

Séverine Aubry
Michel Bachimont
Bernard Chrétien
Pierre-Antoine Desrousseaux
Fabrice Destruhaut
Marion Girin
Anne Keller
Jean-Marc Lécole
Isabelle Lericque
Annie Plantiveau
Frédéric Puigredo
Joël Ternoy
Mickaël Védrine
Myriam Vialaneix

Nathan

92, avenue de France, 75013 PARIS
ISBN : 978-209-172892-6

Sommaire

Propositions de progression

Trois chapitres (**12** : Fonctions sinus et cosinus, **14** : Calcul intégral, **17** : Concentration. Loi des grands nombres) ne font pas partie du programme de l'épreuve écrite du mois de mars. En revanche, des questions sur ces trois chapitres peuvent être posées au cours du Grand oral de juin.
Ainsi, les 14 autres chapitres sont à traiter sur 21 semaines de la rentrée de septembre au 15 mars environ. Les trois chapitres 12, 14, 17 sont donc à traiter durant les mois d'avril et mai.

Voici deux propositions de progressions possibles.

Progression 1 : alternée selon les 3 grand thèmes

Période	Ordre dans l'année	Titre du chapitre du manuel	Numéro du chapitre du manuel	Domaine
Septembre – Octobre : 6 semaines	1	Dénombrement. Récurrence	**1**	**Algèbre et géométrie**
	2	Limites des suites	**6**	Analyse
	3	Combinatoire et dénombrement	**2**	**Algèbre et géométrie**
	4	Compléments sur les suites	**7**	**Analyse**
Novembre – Décembre : 7 semaines	5	Succession d'épreuves indépendantes. Schéma de Bernoulli	**15**	**Probabilités**
	6	Limites des fonctions	**8**	**Analyse**
	7	Vecteurs, droites et plans de l'espace	**3**	**Algèbre et géométrie**
	8	Compléments sur la dérivation	**9**	**Analyse**
	9	Continuité des fonctions d'une variable réelle	**10**	**Analyse**
Janvier – mi-mars : 8 semaines	10	Orthogonalité et distances dans l'espace	**4**	**Algèbre et géométrie**
	11	Fonction logarithme	**11**	**Analyse**
	12	Sommes de variables aléatoires	**16**	**Probabilités**
	13	Primitives. Équations différentielles	**13**	**Analyse**
	14	Représentations paramétriques et équations cartésiennes	**5**	**Algèbre et géométrie**
Avril – Mai : 5 semaines	15	Fonctions sinus et cosinus	**12**	**Analyse**
	16	Calcul intégral	**14**	**Analyse**
	17	Concentration. Loi des grands nombres	**17**	**Probabilités**

Précisions sur les contenus traités dans chaque chapitre

<table>
<tr><th>Séquence 1 : 8 h</th><th>1. Dénombrement. Récurrence</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Principe additif : nombre d’éléments d’une réunion d’ensembles deux à deux disjoints.
– Principe multiplicatif : nombre d’éléments d’un produit cartésien.
– Raisonnement par récurrence. Nombre de k-uplets (ou k-listes) d’un ensemble à n éléments.
– Nombres des parties d’un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de $\{0, 1\}$…</td><td rowspan="3">– Dénombrer en utilisant le principe additif, le principe multiplicatif.
– Démontrer par récurrence.
– Déterminer un nombre de k-uplets, de parties.
– Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).</td><td rowspan="3">– La notion d’ensemble : Euclide, Cantor, Venn (page 26).
– Formalisation du raisonnement par récurrence : Pascal, Peano (page 26).
– Triangles de Sierpinsky (page 29).
– Nombres triangulaires (page 38).
– Une propriété établie par Paul Erdös (page 53).</td></tr>
<tr><td>Démonstrations</td><td>– Nombre d’éléments de E^k.
– Nombre d’éléments de $\mathcal{P}(E)$.</td></tr>
<tr><td>Exemples d’algorithmes</td><td>– Calculer et représenter les premiers termes d’une suite du type $u_n = f(n)$ (exercices 15, 57), du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (exercices 55, 93).
– Algorithme glouton (exercice 100).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Récurrence forte, récurrence double (exercices 75, 76, 115, 116).
– Suites extraites (exercices 118, 119).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 2 : 10 h</th><th>6. Limites des suites</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle $[A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d’un certain rang. Suite tendant vers $-\infty$.
– La suite (u_n) tend vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d’un certain rang.
– Limites et comparaison. Théorème des gendarmes.
– Opérations sur les limites.</td><td rowspan="3">– Établir la convergence d’une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
– Raisonner par récurrence pour établir une propriété d’une suite.
– Étudier des phénomènes d’évolution modélisables par une suite.</td><td rowspan="3">– Évolution de la notion de limite d’une suite : Archimède, d’Alembert, Cauchy, Weierstrass (page 170).
– Méthode d’approximation de π d’après Archimède et Liu Hui (page 193).</td></tr>
<tr><td>Démonstrations</td><td>– Divergence vers $+\infty$ d’une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
– Théorème des gendarmes.</td></tr>
<tr><td>Exemples d’algorithmes</td><td>– Calcul des premiers termes d’une suite du type $u_n = f(n)$ (exercices 16, 29, 96), du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (exercice 107).
– Recherche de seuils (exercices 16, 29, 38, 57, 109).
– Recherche d’approximations de π (exercice 99), de $\sqrt{2}$ (exercice 113).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Étude de la convergence de la méthode de Héron (exercice 113).
– Les séries numériques (exercices 114, 115).</td></tr>
</table>

Séquence 3 : 8 h	2. Combinatoire et dénombrement	Capacités attendues	Histoire des mathématiques
Contenus	– Nombre des k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de n!. Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments. – Combinaison de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins. – Pour $0 \leqslant k \leqslant$ n, formules : $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. – Explicitation pour $k = 0, 1, 2$. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.	– Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer. – Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, etc.).	– Évolution des connaissances en combinatoire : Bhaskara, ben Ghersom, Pascal, Fermat, Lucas (page 54). – Les propriétés arithmétiques du triangle de Pascal : mathématiciens indiens et chinois, Pascal (page 54). – Les carrés magiques (page 74).
Démonstrations	– Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble fini. – Nombre de combinaisons de k éléments parmi n. – Démonstration par dénombrement de la relation $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (exercice **54** page 68). – Démonstration de la relation de Pascal : par le calcul (page 70), par une méthode combinatoire (page 62).		
Exemples d'algorithmes	– Pour un entier n donné, génération de la liste des coefficients $\binom{n}{k}$ à l'aide de la relation de Pascal (exercice **11**). – Génération des permutations d'un ensemble fini, ou tirage aléatoire d'une permutation (exercice **15**). – Génération des parties à 2, 3 éléments d'un ensemble fini (exercice **14**, **16**). Nombre de partitions en p parties d'un ensemble à n éléments (exercice **82**).		
Approfondissements possibles	– Combinaisons avec répétitions (exercice **96**).		

<table>
<tr><th>Séquence 4 : 10 h</th><th>7. Compléments sur les suites</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Vocabulaire des suites : sens de variation, majorée, minorée, bornée.
– Comportement d’une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
– Cas des suites croissantes non majorées.
– Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.</td><td rowspan="3">– Établir la convergence d’une suite ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
– Raisonner par récurrence pour établir une propriété d’une suite.
– Étudier des phénomènes d’évolution modélisables par une suite.</td><td rowspan="3">– Inégalité de Jacob Bernoulli et Barrow (page 200).
– Rôles de d’Alembert, Cauchy, Abel à propos de la notion de convergence des suites (page 200).
– Méthode de Héron pour approcher $\sqrt{2}$ (page 227).</td></tr>
<tr><td>Démonstrations</td><td>– Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
– Limite de (q^n), après démonstration par récurrence de l’inégalité de Bernoulli.
– Si une suite est majorée par M et converge vers ℓ, alors $\ell \leqslant$ M.
– Si une suite est croissante (resp. décroissante) et converge vers ℓ, alors elle est majorée (resp. minorée) par ℓ.</td></tr>
<tr><td>Exemples d’algorithmes</td><td>– Recherche de seuils (exercices 13, 46, 48, 69, 70, 71, 96).
– Recherche de valeurs approchées de $\sqrt{2}$ (exercice 105).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Propriétés et utilisation des suites adjacentes (exercice 102).
– Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d’ordre 2 à coefficients constants (exercices 103, 104).
– Étude de la rapidité de convergence de la méthode de Héron (exercice 105).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 5 : 8 h</th><th>15. Succession d'épreuves indépendantes. Schéma de Bernoulli</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Modèle de la succession d'épreuves indépendantes : la probabilité d'une issue $(x_1, \ldots, x_n)$ est égale au produit des probabilités des composantes x_i.
Représentation par un produit cartésien, par un arbre.
– Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli.
– Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
– Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$: loi du nombre de succès. Expression à l'aide des coefficients binomiaux.</td><td rowspan="3">– Modéliser une situation par une succession d'épreuves indépendantes, ou une succession de deux ou trois épreuves quelconques.
Représenter la situation par un arbre.
– Calculer une probabilité en utilisant l'indépendance, des probabilités conditionnelles, la formule des probabilités totales.
– Modéliser une situation par un schéma de Bernoulli, par une loi binomiale.
– Utiliser l'expression de la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil, de comparaison, d'optimisation relatif à des probabilités de nombre de succès.
– Dans le cadre d'une résolution de problème modélisé par une variable binomiale X, calculer numériquement une probabilité $P(X = k)$, $P(X \leqslant k)$, $P(k \leqslant X \leqslant k')$, en s'aidant au besoin d'un algorithme ; chercher un intervalle I pour lequel $P(X \in I)$ est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à $1 - \alpha$.</td><td rowspan="3">– Correspondance Pascal – Fermat, puis Huygens (page 428).
– L'Ars Conjectandi de Jacques Bernoulli (page 428).
– La planche de Galton (page 448).
– La loi de Poisson (page 454).</td></tr>
<tr><td>Démonstration</td><td>– Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli.</td></tr>
<tr><td>Exemples d'algorithmes</td><td>– Calculer $P(X = k)$ lorsque X est une variable aléatoire binomiale (exercice 37).
– Déterminer la plus petite valeur de k telle que $P(X \leqslant k) \geqslant 1 - \alpha$ (exercice 9).
– Déterminer $P(k \leqslant X \leqslant k')$ (exercice 41).
– Simulation de la planche de Galton (exercice 65).
– Problème de la surréservation. Étant donné une variable aléatoire binomiale X et un réel strictement positif α, détermination du plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 1 - \alpha$ (exercice 66).
– Simulation d'un échantillon d'une variable aléatoire (exercice 52).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Loi géométrique (exercice 79).
– Introduction de la loi de Poisson comme limite de lois binomiales. Interprétation (événements rares) (exercice 80).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 6 : 10 h</th><th>8. Limites des fonctions</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$, $-\infty$, en un point. Asymptote parallèle à un axe de coordonnées.
– Limites faisant intervenir les fonctions de référence étudiées en classe de première : puissances entières, racine carrée, fonction exponentielle. Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$.
– Limites et comparaison.
– Opérations sur les limites. L'utilisation de la composition des limites se fait en contexte.</td><td rowspan="3">– Déterminer dans des cas simples la limite d'une fonction en un point, en $\pm\infty$, en utilisant les limites usuelles, les croissances comparées, les opérations sur les limites, des majorations, minorations ou encadrements, la factorisation du terme prépondérant dans une somme.
– Faire le lien entre l'existence d'une asymptote parallèle à un axe et celle de la limite correspondante.</td><td rowspan="3">– La notion de limite d'une fonction : Leibniz, Cauchy, Weierstrass (page 228).
– René Thom et la Théorie des catastrophes (page 259).
– La fonction de Gompertz : modélisation en médecine, écologie, ... (page 259).</td></tr>
<tr><td>Démonstrations</td><td>– Un théorème de comparaison en $+\infty$.
– Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.
– Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$.</td></tr>
<tr><td>Exemples d'algorithmes</td><td>– Déterminer un seuil (exercices 23, 24, 25, 101, 122).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Asymptotes obliques. Branches infinies (exercice 128).
– Équivalents au voisinage de l'infini, de 0 (exercice 129).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 7 : 8 h</th><th>3. Vecteurs, droites et plans de l'espace</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Vecteurs de l'espace. Translations.
– Combinaisons linéaires de vecteurs de l'espace.
– Droites de l'espace. Vecteurs directeurs d'une droite. Vecteurs colinéaires.
– Caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur.
– Plans de l'espace. Direction d'un plan de l'espace.
– Caractérisation d'un plan de l'espace par un point et un couple de vecteurs non colinéaires.
– Bases et repères de l'espace. Décomposition d'un vecteur sur une base.</td><td rowspan="3">– Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés.
– Exploiter une figure pour exprimer un vecteur comme combinaison linéaire de vecteurs.
– Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
– Lire sur une figure si deux vecteurs d'un plan, trois vecteurs de l'espace, forment une base.
– Lire sur une figure la décomposition d'un vecteur dans une base.
– Étudier géométriquement des problèmes simples de configurations dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité).</td><td rowspan="3">– La notion de repère : Descartes (page 82).
– Émergence de la notion de vecteur : Bellavitis, Grassmann, Peano, Hamilton (page 82).</td></tr>
<tr><td>Démonstration</td><td></td></tr>
<tr><td>Exemples d'algorithmes</td><td>– Appartenance d'un point à une droite (exercices 17, 18, 19).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Barycentre d'une famille d'un système pondéré de deux, trois ou quatre points. (exercice 122). Exemples d'utilisation des barycentres, en particulier de la propriété d'associativité, pour résoudre des problèmes de géométrie (exercices 123).
– Fonction vectorielle de Leibniz (exercice 124).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 8 : 8 h</th><th>9. Compléments sur la dérivation</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Rappels sur la dérivation, sens de variation, extremum, équation d’une tangente.
– Composée de deux fonctions, notation $v \circ u$. Relation $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ pour la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.
– Dérivée seconde d’une fonction.
– Fonction convexe sur un intervalle : définition par la position relative de la courbe représentative et des sécantes. Pour une fonction deux fois dérivable, équivalence admise avec la position par rapport aux tangentes, la croissance de f', la positivité de f''.
– Point d’inflexion.</td><td rowspan="3">– Calculer la dérivée d’une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
– Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d’une fonction construite simplement à partir de fonctions de référence.
– Démontrer des inégalités en utilisant le convexité d’une fonction.
– Esquisser l’allure de la courbe représentative d’une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.
– Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d’inflexion.
Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d’une fonction.</td><td rowspan="3">– Convexité, concavité : Archimède, Cauchy, Jensen, Hardy (page 260).</td></tr>
<tr><td>Démonstration</td><td>– Si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.</td></tr>
<tr><td>Exemples d’algorithmes</td><td>– Recherche d’un point d’inflexion (exercices 19, 20, 21).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Courbe de Lorenz (exercice 97).
– Dérivée n-ième d’une fonction (exercice 98).
– Inégalité arithmético-géométrique (exercice 99).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 9 : 8 h</th><th>10. Continuité des fonctions d'une variable réelle</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Fonction continue en un point (définition par les limites), sur un intervalle. Toute fonction dérivable est continue.
– Image d'une suite convergente par une fonction continue.
– Théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions continues strictement monotones.</td><td rowspan="3">– Étudier les solutions d'une équation du type $f(x) = k$: existence, unicité, encadrement.
– Pour une fonction continue f d'un intervalle dans lui-même, étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.</td><td rowspan="3">– Du principe de continuité « géométriquement évident » au 16e siècle aux définitions et démonstrations de Lagrange, Bolzano, jusqu'au théorème des valeurs intermédiaires de Cauchy (page 288).
– La méthode de Raphson-Newton (page 311).
– La fonction logistique (page 312).</td></tr>
<tr><td>Démonstration</td><td>– Si une fonction f est continue strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans $[a; b]$.</td></tr>
<tr><td>Exemples d'algorithmes</td><td>– Méthode de dichotomie (exercices 16, 17, 18).
– Fonction définie par morceaux (exercice 28).
– Méthode par balayage (exercice 55).
– Méthode de la sécante (exercice 81).
– Méthode de Newton (exercice 82).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires (exercice 95).
– Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x, y (exercice 96).
– Prolongement par continuité (exercice 97).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 10 : 10 h</th><th>4. Orthogonalité et distances dans l'espace</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace. Bilinéarité, symétrie.
– Orthogonalité de deux vecteurs. Caractérisation par le produit scalaire.
– Base orthonormée, repère orthonormé.
– Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expressions du produit scalaire et de la norme. Expression de la distance entre deux points.
– Développement de $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2$, formules de polarisation.
– Orthogonalité de deux droites, d'un plan et d'une droite.
– Vecteur normal à un plan. Étant donné un point A et un vecteur non nul $\vec{n}$, plan passant par A et normal à $\vec{n}$.
– Projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan.</td><td rowspan="3">– Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans l'espace.
– Utiliser la projection orthogonale pour déterminer la distance d'un point à une droite ou à un plan.
– Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs et mesures : longueur, angle, aire, volume.
– Étudier des problèmes de configuration de l'espace : orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; lieux géométriques simples, par exemple plan médiateur de deux points (exercice 78).</td><td rowspan="3">– Introduction du produit scalaire : Grassmann, Hamilton (page 112).</td></tr>
<tr><td>Démonstrations</td><td>– Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.</td></tr>
<tr><td>Exemples d'algorithmes</td><td>– Reconnaissance de droites orthogonales (exercices 17, 18, 19).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Sphère circonscrite à un tétraèdre (exercice 115).
– Fonction scalaire de Leibniz (exercice 114).
– Le point de Monge (exercice 116).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 11 : 12 h</th><th>11. Fonction logarithme</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Fonction logarithme népérien, notée ln, construite comme réciproque de la fonction exponentielle.
– Propriétés algébriques du logarithme.
– Fonction dérivée du logarithme, variations. Limites en 0 et en $+\infty$, courbe représentative. Lien entre les courbes représentatives des fonctions logarithme népérien et exponentielle.
– Croissance comparée du logarithme népérien et de $x \mapsto x^n$ en 0 et en $+\infty$.
– La fonction logarithme décimal (page 339).</td><td rowspan="3">– Utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.
– Dans le cadre d'une résolution de problème, utiliser les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.</td><td rowspan="3">– Introduction des logarithmes : Neper, Briggs (page 318).
– Les tables de logarithmes (pages 318-321)
– La méthode de Briggs (page 340).</td></tr>
<tr><td>Démonstration</td><td>– Calcul de la fonction dérivée de la fonction logarithme népérien, la dérivabilité étant admise.
– Limite en 0 de $x \mapsto \ln(x)$.</td></tr>
<tr><td>Exemples d'algorithmes</td><td>– Déterminer un seuil et résoudre une inéquation $q^n \leqslant a$ (exercices 24, 25).
– Algorithme de Briggs pour le calcul du logarithme (exercice 137).
– Les encadrements de Neper (exercice 155).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Pour α dans $\mathbb{R}$, fonction $x \mapsto x^\alpha$ (exercice 152).
– Pour x dans $\mathbb{R}$, limite de $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ (exercice 153).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 12 : 8 h</th><th>16. Somme de variables aléatoires</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Somme de deux variables aléatoires. Linéarité de l'espérance : $\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) + \mathrm{E}(\mathrm{Y})$ et $\mathrm{E}(a\mathrm{X}) = a\mathrm{E}(\mathrm{X})$.
– Dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes, exemples de variables indépendantes X, Y et relation d'additivité $\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{V}(\mathrm{X}) + \mathrm{V}(\mathrm{Y})$. Relation $\mathrm{V}(a\mathrm{X}) = a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$.
– Application à l'espérance, la variance et l'écart-type de la loi binomiale.
– Échantillon de taille n d'une loi de probabilité : liste $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ de variables indépendantes identiques suivant cette loi. Espérance, variance, écart-type de la somme $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \dots + \mathrm{X}_n$ et de la moyenne $\mathrm{M}_n = \dfrac{\mathrm{S}_n}{n}$.</td><td rowspan="3">– Représenter une variable comme somme de variables aléatoires plus simples.
-Calculer l'espérance d'une variable aléatoire, notamment en utilisant la propriété de linéarité.
– Calculer la variance d'une variable aléatoire, notamment en l'exprimant comme somme de variables aléatoires indépendantes.</td><td rowspan="3">– Variables aléatoires et leurs sommes : Huygens, Bernoulli, de Moivre (page 456).</td></tr>
<tr><td>Démonstrations</td><td>– Espérance et variance de la loi binomiale.
– Espérance et variance de S_n.
– Espérance et variance de M_n.</td></tr>
<tr><td>Exemples d'algorithmes</td><td>– Simuler un échantillon d'une loi de probabilité (exercices 13, 14, 15).
– Simuler la somme S_n et la moyenne M_n (exercice 72).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Relation $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\,\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ pour des variables aléatoires indépendantes X, Y. Application à la variance de $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ (exercice 87).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Séquence 13 : 10 h</th><th>13. Primitives.
Équations différentielles</th><th>Capacités attendues</th><th>Histoire des mathématiques</th></tr>
<tr><td>Contenus</td><td>– Équation différentielle $y' = f$, Notion de primitive d’une fonction continue sur un intervalle. Deux primitives d’une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d’une constante.
– Primitives des fonctions de référence $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, exponentielle, sinus, cosinus.
– Équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ; allure des courbes. Équation différentielle $y' = ay + b$.</td><td rowspan="3">– Calculer une primitive en utilisant les primitives de référence et les fonctions de la forme $(v' \circ u) \times u'$.
– Pour une équation différentielle $y' = ay + b$ $(a \neq 0)$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer toutes les solutions.
– Pour une équation différentielle $y' = ay + f$: à partir de la donnée d’une solution particulière, déterminer toutes les solutions.</td><td rowspan="3">– Le calcul différentiel : Newton, Leibniz (page 370).
– Les équations différentielles : Leibniz, Lagrange, Poincaré, Fuchs, Birkhoff (page 370).
– Méthode d’Euler (page 380).
– Problème de Leibniz et vecteur sous-tangent constant (page 391).</td></tr>
<tr><td>Démonstrations</td><td>– Deux primitives d’une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d’une constante.
– Résolution de l’équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel.</td></tr>
<tr><td>Exemples d’algorithmes</td><td>– Résolution par la méthode d’Euler de $y' = f$, de $y' = ay + b$ (exercices 15, 113).</td></tr>
<tr><td>Approfondissements possibles</td><td colspan="3">– Autres exemples d’équations différentielles, éventuellement en lien avec une modélisation, par exemple l’équation logistique (exercices 128 à 131).</td></tr>
</table>

Remarque : les textes concernant les 3 chapitres qui ne figurent pas au programme de l’épreuve de mars du baccalauréat sont sorties après l’écriture de ce manuel. Aussi, dans le chapitre 13, ne tenez pas compte :
– page 372 : des formules qui concernent les fonctions sinus et cosinus dans Rappels utiles, et ne traitez pas les Questions-tests **1**-b et **3**-b ;
– page 376 : des formules qui concernent les fonctions sinus et cosinus dans les tableaux des paragraphes **2. B** et **2. C**.
– page 377 : de la question **b)** de l’exercice **5** et de la question **b)** de l’exercice **7**.
– des exercices **19**, **25** page 381, de l’exercice **40** page 382, de la question **b)** de l’exercice **49** et des exercices **51**, **52**, **54** page 383, de l’exercice **87** page 384, de la question **4** de l’exercice **88** page 385, de l’exercice **101** page 387, de l’exercice **110** page 389, de l’exercice **130** page 396.

Séquence 14 : 10 h	5. Représentations paramétriques et équations cartésiennes	Capacités attendues	Histoire des mathématiques
Contenus	– Représentations paramétriques d'une droite. – Équations cartésiennes d'un plan. – Traduire un problème par un système d'équations linéaires.	– Déterminer une représentation paramétrique d'une droite. Reconnaître une droite donnée par une représentation paramétrique. – Déterminer une équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal et un point. Reconnaître un plan donné par une équation cartésienne et préciser un vecteur normal à ce plan. – Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan donné par une équation cartésienne, ou sur une droite donnée par un point et un vecteur directeur. – Dans un cadre géométrique repéré, traduire par un système d'équations linéaires des problèmes de types suivants : décider si trois vecteurs forment une base, déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base, étudier une configuration dans l'espace (alignement, colinéarité, parallélisme, coplanarité, intersection et orthogonalité de droites ou de plans), etc. Dans des cas simples, résoudre le système obtenu et interpréter géométriquement les solutions.	– Repérage dans l'espace et équations : Lagrange, Monge (page 142).
Démonstrations	– Ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$. – Équation cartésienne du plan normal au vecteur $\vec{n}$ et passant par le point A.		
Exemples d'algorithmes	– Recherche de l'instant t auquel $d(\mathrm{A}_1, d_1) = d(\mathrm{A}_2, d_2)$ (exercice **85**). – Programmer des boucles imbriquées (exercice **94**).		
Approfondissements possibles	– Déterminer l'intersection de deux plans (exercice **103**). – Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires (exercice **104**). – Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon (exercice **105**). – Intersection d'une sphère et d'une droite (exercice **106**).		

Séquence 15 : 8 h	12. Fonctions sinus et cosinus	Capacités attendues	Histoire des mathématiques
Contenus	– Fonctions trigonométriques sinus et cosinus : dérivées, variations, courbes représentatives.	– Résoudre une équation du type $\cos(x) = a$, une inéquation de la forme $\cos(x) \leqslant a$ sur $[-\pi, \pi]$. – Dans le cadre de la résolution de problème, notamment géométrique, étudier une fonction simple définie à partir de fonctions trigonométriques, pour déterminer des variations, un optimum.	– Trigonométrie : Hipparque de Nicée, Ptolémée, Aryabhata, Rheticus, Viete, Girard (page 348). – Polynômes de Taylor (page 369).
Démonstration			
Exemples d'algorithmes	– Algorithme de balayage (exercices **12**, **13**, **14**).		
Approfondissements possibles	– Fonction tangente (exercices **100**, **101**). – Les polynômes de Taylor (exercice **102**).		

Séquence 16 : 14 h	14. Calcul intégral	Capacités attendues	Histoire des mathématiques
Contenus	– Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment $[a, b]$, comme aire sous la courbe représentative de f. Notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. – Théorème : si f est une fonction continue positive sur $[a, b]$, alors la fonction F_a définie sur $[a, b]$ par $\mathrm{F}_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en a. – Sous les hypothèses du théorème, relation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ où F est une primitive quelconque de f. Notation $[\mathrm{F}(x)]_a^b$. – Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. – Définition par les primitives de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant a et b. – Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles. – Valeur moyenne d'une fonction. – Intégration par parties.	– Estimer graphiquement ou encadrer une intégrale, une valeur moyenne. – Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive, à l'aide d'une intégration par parties. – Majorer (minorer) une intégrale à partir d'une majoration (minoration) d'une fonction par une autre fonction. – Calculer l'aire entre deux courbes. – Étudier une suite d'intégrales, vérifiant éventuellement une relation de récurrence. – Interpréter une intégrale, une valeur moyenne dans un contexte issu d'une autre discipline.	– Aire et intégrale : Archimède, Leibniz, Newton, Riemann, Lebesgue (page 398). – Approximation de Brouncker (page 420). – Méthode de Monte-Carlo (page 421).
Démonstrations	– Pour une fonction positive croissante f sur $[a, b]$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f. Pour toute primitive F de f, relation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$. – Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. – Relation de Chasles. – Intégration des inégalités. – Intégration par parties.		
Exemples d'algorithmes	– Méthode des rectangles (exercices **18**, **19**, **20**). – Algorithme de Brouncker (exercice **102**). – Méthode de Monte-Carlo (exercice **103**). – Méthode des milieux (exercice **111**). – Méthode des trapèzes (exercice **112**).		
Approfondissements possibles	– Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes (exercice **119**). – Encadrement de $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par des intégrales (exercice **120**). – La formule de Wallis (exercice **121**). – Irrationnalité du nombre e (exercice **122**).		

Séquence 17 : 8 h	**17. Concentration. Loi des grands nombres**	**Capacités attendues**	**Histoire des mathématiques**
Contenus	– Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V, et quel que soit le réel strictement positif δ : $$P(\lvert X-\mu\rvert \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$$ – Inégalité de concentration. Si M_n est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors pour tout $\delta > 0$, $P(\lvert M_n-\mu\rvert \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$. – Loi des grands nombres.	– Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.	– Loi des grands nombres : Bernoulli, Poisson (page 484). – Démonstration plus simple de la loi des grands nombres avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (page 484).
Démonstration	– Inégalité de concentration.		
Exemples d'algorithmes	– Simuler un échantillon de taille n d'une variable aléatoire. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (exercices **1**, **2**, **3**). – Calculer la probabilité de $(\lvert S_n - pn\rvert > \sqrt{n})$, où S_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (exercices **7**, **8**). – Simulation d'une marche aléatoire (exercice **33**). – Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart-type σ, Calculer l'écart-type s de la série des moyennes des échantillons observés, à comparer à $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (exercice **31**). Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks, ou à $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$, pour $k = 1, 2, 3$ (exercice **32**).		
Approfondissements possibles	– Estimation (exercice **44**). – Marche aléatoire (exercice **33**). – Exemples d'application issus d'autres disciplines pour diverses valeurs de n : sondage (par exemple $n = 1\,000$) (exercice **40**), étude du sex-ratio (par exemple $n = 10^6$) (exercice **45**).		

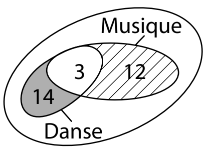
Progression 2 : alternée avec blocs d'un même thème

Période	Ordre dans l'année	Titre du chapitre du manuel	Numéro du chapitre du manuel	Domaine
Septembre – Octobre : 6 semaines	1	Dénombrement. Récurrence	1	**Algèbre et géométrie**
	2	Combinatoire et dénombrement	2	**Algèbre et géométrie**
	3	Limites des suites	6	**Analyse**
	4	Compléments sur les suites	7	**Analyse**
Novembre – Décembre : 7 semaines	5	Succession d'épreuves indépendantes. Schéma de Bernoulli	15	**Probabilités**
	6	Limites des fonctions	8	**Analyse**
	7	Compléments sur la dérivation	9	**Analyse**
	8	Continuité des fonctions d'une variable réelle	10	**Analyse**
	9	Fonction logarithme	11	**Analyse**
Janvier – mi-mars : 8 semaines	10	Somme de variables aléatoires	16	**Probabilités**
	11	Vecteurs, droites et plans de l'espace	3	**Algèbre et géométrie**
	12	Orthogonalité et distances dans l'espace	4	**Algèbre et géométrie**
	13	Représentations paramétriques et équations cartésiennes	5	**Algèbre et géométrie**
	14	Primitives. Équations différentielles	13	**Analyse**
Avril – Mai : 5 semaines	15	Fonctions sinus et cosinus	12	**Analyse**
	16	Calcul intégral	14	**Analyse**
	17	Concentration. Loi des grands nombres	16	**Probabilités**

1 Dénombrement. Récurrence

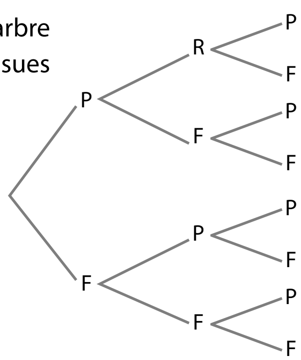
Questions-Tests

1 On représente la situation par le diagramme de Venn ci-contre : Celui-ci permet de répondre aux questions.



a) (3). En effet, la zone rayée contient 12 élèves.
b) (2). En effet, la zone grisée contient 14 élèves.
c) (1). En effet, le nombre d'élèves qui n'ont choisi aucune de ces options est égal à $32-(14+3+12)=3$

2 (3). En effet, d'après l'arbre ci-contre, il y a 8 issues possibles.



3 (3). En effet, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\frac{7(n+1)}{n+1+1}=\frac{7n+7}{n+2}$$

4 **a)** (2). En effet, $v_1=2v_0-4=0$ d'où $v_2=2v_1-4=-4$.
b) (1). En effet, l'algorithme va réaliser 10 boucles dans lesquelles les termes w_1 jusque w_{10} seront calculés successivement.

5 **a)** (3). En effet, pour tout entier naturel n, $v_n=v_0\times q^n=5\times 2^n$.
b) (2). En effet, pour tout entier naturel n, $w_n=w_0\times q^n=2\times 0{,}5^n$.
Ainsi, $w_3=2\times 0{,}5^3=0{,}25$.

6 (2). En effet, cette somme est égale à $\dfrac{1-2^{11}}{1-2}=2047$.

Découvrir

1 Nombre de parties d'un ensemble

1 **a)** Voici l'ensemble des parties de l'ensemble E : $\{a\,;b\,;c\}$, $\{a\,;b\}$, $\{a\,;c\}$, $\{a\}$, $\{b\,;c\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\varnothing$.
b) L'ensemble E possède donc 8 parties.

2 **a)** Il suffit d'ajouter à chaque fin de branche deux nouvelles possibilités (oui ou non) pour l'élément d.
b) On multiplie donc le nombre de parties de E par deux pour obtenir le nombre de parties de F. C'est-à-dire 16 parties.

3 Il semble que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments soit égal à 2^n.

2 Raisonnement par récurrence

1 $p_1=p_0+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{0+1}=\dfrac{3}{2}$.

$p_2=p_1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1+1}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{4}$. Ainsi, $p_2=\dfrac{15}{4}$.

2 **a)** $3\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^0-1\right)=3\times 0=0$. Ainsi $p_0=3\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^0-1\right)$ et la propriété $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

b) On suppose donc que pour un certain entier naturel k, $p_k=3\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^k-1\right)$.

c) On sait que $p_{k+1}=p_k+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k+1}$.

Donc $p_{k+1}=3\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^k-1\right)+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{k+1}$.

On en déduit que $p_{k+1}=3\left(\left(\dfrac{3}{2}\right)^k-1+\dfrac{3^k}{2^{k+1}}\right)$.

Soit $p_{k+1} = 3\left(\frac{3^k}{2^k} - 1 + \frac{3^k}{2^{k+1}}\right)$.

C'est-à-dire, $p_{k+1} = 3\left(\frac{2 \times 3^k}{2^{k+1}} - 1 + \frac{3^k}{2^{k+1}}\right)$

ou $p_{k+1} = 3\left(\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} - 1\right) = 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1\right)$.

Ainsi, la propriété $P(k+1)$ est vraie.

Savoir-faire

3 **a)** A est l'ensemble des personnes du centre pratiquant le football. B est l'ensemble des personnes pratiquant le hand-ball.

Ainsi, $\text{Card}(A) = 24$, $\text{Card}(B) = 15$ et $\text{Card}(A \cap B) = 6$.

$A \cup B$ est l'ensemble des personnes du centre pratiquant au moins l'un des deux sports.

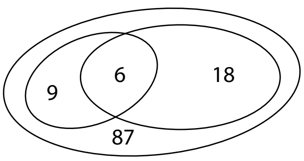
$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

$\text{Card}(A \cup B) = 24 + 15 - 6 = 33$.

33 personnes du centre pratiquent au moins l'un des deux sports.

b) $120 - 33 = 87$ donc 87 personnes du centre ne pratiquent aucun des deux sports.

c) D'après le diagramme de Venn ci-dessous, $18 + 9 = 27$ personnes pratiquent un seul de ces deux sports.



4 **a)** E peut-être l'ensemble constitué des 5 ordinateurs et F l'ensemble constitué des 10 pochettes.

b) $5 \times 10 = 50$ ainsi, Jeanne a 50 possibilités.

7 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $v_n = n(n+1)$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $v_0 = 0$ et $0(0+1) = 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_k = k(k+1)$ (hypothèse de récurrence).

Or $v_{k+1} = v_k + 2k + 2$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $v_{k+1} = k(k+1) + 2k + 2$

d'où $v_{k+1} = (k+1)(k+2)$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $v_n = n(n+1)$.

8 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $w_n = 3(1 - 2^n)$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $w_0 = 0$ et $3(1 - 2^0) = 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $w_k = 3(1 - 2^k)$ (hypothèse de récurrence).

Or $w_{k+1} = 2w_k - 3$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $w_{k+1} = 2 \times 3(1 - 2^k) - 3$

d'où $w_{k+1} = 3(2 - 2^{k+1} - 1) = 3(1 - 2^{k+1})$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $w_n = 3(1 - 2^n)$.

9 **a)** $(0 ; 3 ; 3 ; 7)$ est un 4-uplet de E.

b) L'ensemble E contient 10 éléments.

Ainsi, le nombre d'éléments de E^4 est 10^4 soit 10 000.

On peut écrire 10 000 numéros de 4 chiffres.

10 E est l'ensemble constitué des 3 symboles. Chaque code secret est un 6-uplet de E. Or le nombre d'éléments de E^6 est 3^6 soit 729.

Il existe donc 729 codes secrets différents.

13 **Situation 1** : le nombre d'éléments de E est 2^8 soit 256.

Situation 2 : chacun des 8 lancers pris dans l'ensemble $\{P ; F\}$ est un 8-uplet de $\{P ; F\}$.

On convient que l'obtention de P (resp. F) en i-ème position, avec $1 \leqslant i \leqslant 8$ signifie la présence (resp. l'absence) de x_i dans la partie de E correspondante. Par exemple, à la série (P ; P ; P ; F ; F) correspond la partie $(x_1 ; x_2 ; x_3)$.

Il y a donc autant de parties de E que de séries de 8 lancers possibles.

14 E est l'ensemble constitué du nom des 5 surprises. Chaque lot est une partie de E.

On peut donc réaliser 2^5, soit 32 lots de surprises.

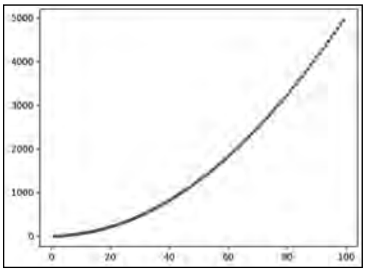
16 **a)** Les deux termes suivants sont $u_4 = 6$ et $u_5 = 10$.

b) À l'étape $n+1$, on ajoute un sommet à la base à partir duquel on peut construire les triangles formés par le sommet A et chacun des n premiers sommets, c'est-à-dire n triangles supplémentaires. On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = u_n + n$.

c) Voici la fonction **U** écrite en langage Python qui prend en paramètre un nombre entier naturel n et qui affiche les n premiers points de la suite (u_n).

```
from pylab import *

def U(n):
    u=1
    plot(1,u,'r.')
    for i in range(2,n):
        u=u+i
        print(u)
        plot(i,u,'r.')
    show()
```

On exécute **U**(100) et on obtient le graphique ci-dessous. L'allure de la courbe permet de conjecturer que u_n est de la forme $an^2 + bn + c$.



d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $\frac{1}{2}2^2 - \frac{1}{2}2 = 1$. La propriété $P(2)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 2$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = u_k + k$.

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence,

$u_{k+1} = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k$.

Or $\frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{2}(k+1) = \frac{1}{2}k^2 + k + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}$.

On en déduit que $\frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{2}(k+1) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k$.

Ainsi $u_{k+1} = \frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{2}(k+1)$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

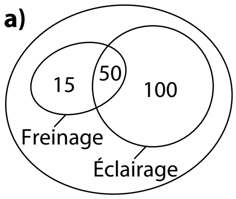
$$u_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n.$$

Acquérir des automatismes

17 (1). En effet,
$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$.
Or $E \cap F = \{3\}$ donc $\text{Card}(E \cup F) = 3 + 2 - 1 = 4$.

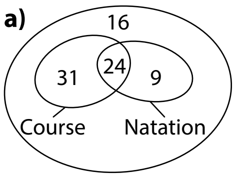
18 (2). En effet, D'après le principe multiplicatif, Luc a le choix entre $4 \times 5 \times 7 = 140$ repas.

19 **a)**



b) $500 - (100 + 15 + 50) = 335$. Ainsi 335 véhicules ne présentent aucun des deux défauts.

20 **a)**



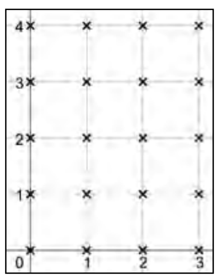
b) E est l'ensemble des adhérents pratiquant la course à pied et F celui des adhérents pratiquant la natation. Ainsi, $\text{Card}(E \cup F) = 80 - 16 = 64$, $\text{Card}(E) = 55$ et $\text{Card}(F) = 33$.
Or, $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$.
Donc $64 = 88 - \text{Card}(E \cap F)$ d'où $\text{Card}(E \cap F) = 24$.
24 adhérents pratiquent donc les deux sports à la fois.

21 **a)** E possède 2 éléments et F en possède 3. Ainsi, le nombre d'éléments du produit cartésien $E \times F$ est égal à $2 \times 3 = 6$.

b) Voici les éléments de $E \times F$: $(a\,;1)$, $(a\,;2)$, $(a\,;3)$, $(b\,;1)$, $(b\,;2)$, $(b\,;3)$

22 **a)** G est le produit cartésien $E \times F$, il possède donc $4 \times 5 = 20$ éléments.

b)



23 D'après le principe multiplicatif, Alix peut effectuer $5 \times 3 \times 10 = 150$ emprunts possibles.

24 Il existe 2 routes pour se rendre de A à B, 3 routes pour se rendre de B à C et 4 routes pour se rendre de C à D.

D'après le principe multiplicatif, il existe $2 \times 3 \times 4 = 24$ parcours possibles reliant A à D.

25 Il existe 23^2 possibilités pour les deux premières lettres, puis 10^3 pour les 3 chiffres suivants et enfin 23^2 pour les deux dernières lettres. D'après le principe multiplicatif, il existe $23^2 \times 10^3 \times 23^2 = 279\,841\,000$ immatriculations différentes.

26 D'après le principe multiplicatif, il existe

a) $26^4 = 456\,976$ codes composés de 4 lettres ;

b) $26^4 \times 10^3 = 456\,976\,000$ codes composés de 4 lettres suivies de 3 chiffres ;

c) $26^4 \times 10^2 = 45\,697\,600$ codes composés de 4 lettres suivies de 3 chiffres et se terminant par 0.

27 **a)** Un 6-uplet d'éléments de E est $(a\,;a\,;f\,;d\,;e\,;a)$.

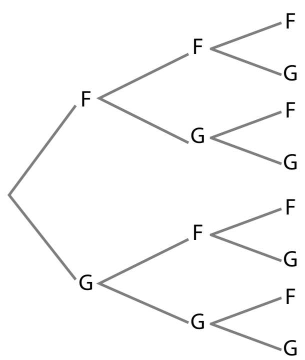
b) L'ensemble E possède 7 éléments donc le nombre d'éléments de E^6 est égal à $7^6 = 117\,649$.

28 **a)** Un triplet d'éléments de E est (S ; A ; M).

b) L'ensemble E possède 5 éléments donc le nombre d'éléments de E^3 est égal à $5^3 = 125$.

29 **a)** À l'aide de l'arbre ci-dessous, les triplets d'éléments de E sont : (F ; F ; F), (F ; F ; G), (F ; G ; F), (F ; G ; G), (G ; F ; F), (G ; F ; G), (G ; G ; F) et (G ; G ; G).

b) Il y a donc 8 compositions différentes de familles à trois enfants. En effet, l'ensemble E possède 2 éléments donc le nombre d'éléments de E^3 est égal à $2^3 = 8$.



30 **a)** Un 8-uplet d'éléments de E, c'est-à-dire un octet, est (0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 0 ; 1 ; 0 ; 0).

b) L'ensemble E possède 2 éléments donc le nombre d'éléments de E^8 est égal à $2^8 = 256$.

31 E est l'ensemble formé des 10 chiffres de 0 à 9. Un code est un triplet d'éléments de E. Le nombre d'éléments de E^3 est égal à $10^3 = 1000$.

Il existe donc 1 000 codes différents.

32 E est l'ensemble formé des 3 couleurs. Un quadrillage peut être vu comme un 30-uplet d'éléments de E. Le nombre d'éléments de E^{30} est égal à 3^{30}. Il existe donc 3^{30} coloriages différents.

33 E est l'ensemble formé des 26 lettres de l'alphabet. Un identifiant est un couple d'éléments de E. Le nombre d'éléments de E^2 est égal à $26^2 = 676$.

Or $676 < 700$, il est donc impossible que chaque élève ait un identifiant différent.

34 **a)** Vraie.

En effet, $0^2 + 3 = 3$ qui est divisible par 3.

b) Fausse.

En effet, $1^2 + 3 = 4$ qui n'est pas divisible par 3.

c) Fausse. En effet, la propriété est fausse pour $n = 1$.

35 (2). En effet, $u_{k+1} = 3u_k + 2$

donc $u_{k+1} = 3(2 \times 3^k - 1) + 2$.

Donc $u_{k+1} = 2 \times 3^{k+1} - 3 + 2 = 2 \times 3^{k+1} - 1$.

Donc la propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.

36 **a)** Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $0 \leqslant 0 \leqslant 2$. Donc la propriété $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

b) On suppose que pour un nombre entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_k \leqslant 2$.

Ainsi $0 \leqslant u_k + 2 \leqslant 4$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a $0 \leqslant \sqrt{u_k + 2} \leqslant 2$ soit $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

c) Ainsi, la propriété est vraie initialement et est héréditaire. Donc pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie soit $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

37 **a)** On suppose que pour un nombre entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $4^k + 1$ est un multiple de 3.

Ainsi, il existe un entier naturel p tel que $4^k + 1 = 3p$.

Or $4^{k+1} + 1 = 4 \times 4^k + 1$

donc $4^{k+1} + 1 = 4(3p - 1) + 1 = 3(4p - 1)$.

Ainsi $4^{k+1} + 1$ est un multiple de 3.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

b) Pour $n=0$, $4^0+1=2$ qui n'est pas un multiple de 3. Donc la propriété $P(0)$ n'est pas vraie.
c) Ainsi, la propriété est héréditaire mais n'est pas vraie initialement. Donc on ne peut pas affirmer que pour tout entier naturel n, 4^n+1 est un multiple de 3.

38 **a)** Si u_k est pair alors il existe un entier naturel p tel que $u_k=2p$.
Or $u_{k+1}=u_k+6k$ donc $u_{k+1}=2p+6k=2(p+3k)$.
Ainsi u_{k+1} est pair.
b) Si u_k est un multiple de 3 alors il existe un entier naturel p tel que $u_k=3p$.
Or $u_{k+1}=u_k+6k$ donc $u_{k+1}=3p+6k=3(p+2k)$.
Ainsi u_{k+1} est un multiple de 3.
c) Les propriétés sont héréditaires. Elles seront vraies pour tout entier naturel n si elles sont vraies initialement. Ainsi les termes de la suite (u_n) sont :
- pairs si u_0 est pair ;
- des multiples de 3 si u_0 est un multiple de 3.

39 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n=70\times1{,}14^n+50$ ».
- **Initialisation** : pour $n=0$, $u_0=120$ et $70\times1{,}14^0+50=120$.
La propriété $P(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$u_k=70\times1{,}14^k+50$ (hypothèse de récurrence).
Or $u_{k+1}=1{,}14\times u_k-7$
donc $u_{k+1}=1{,}14\times(70\times1{,}14^k+50)-7$.
On en déduit que $u_{k+1}=70\times1{,}14^{k+1}+50$.
La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n=70\times1{,}14^n+50$.

40 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $v_n=n^2+n-1$ ».
- **Initialisation** : pour $n=0$, $v_0=-1$ et $0^2+0-1=-1$.
La propriété $P(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$v_k=k^2+k-1$ (hypothèse de récurrence).
Or $v_{k+1}=v_k+2k+2$
donc $v_{k+1}=k^2+k-1+2k+2$.
On en déduit que $v_{k+1}=k^2+3k+1$.
Or $(k+1)^2+(k+1)-1=k^2+2k+1+k$.
D'où $(k+1)^2+(k+1)-1=k^2+3k+1$.
On en déduit que $v_{k+1}=(k+1)^2+(k+1)-1$.
La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $v_n=n^2+n-1$.

41 Pour tout entier naturel $n\geqslant1$, $P(n)$ est la propriété : « $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ».
- **Initialisation** : pour $n=1$, $\dfrac{1(1+1)}{2}=1$.
La propriété $P(1)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k\geqslant1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$1+2+3+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$
(hypothèse de récurrence). Or :
$1+2+3+\ldots+(k+1)=1+2+3+\ldots+k+(k+1)$.
Donc $1+2+3+\ldots+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+k+1$.
On en déduit que
$1+2+3+\ldots+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+\dfrac{2(k+1)}{2}$,
soit $1+2+3+\ldots+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.
La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : pour tout entier naturel $n\geqslant1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n\geqslant1$, $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

42 Pour tout entier naturel $n\geqslant1$, $P(n)$ est la propriété : « $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
- **Initialisation** : pour $n=1$,
$$\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=1.$$
La propriété $P(1)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k\geqslant1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
(hypothèse de récurrence). Or :
$1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2$
$=1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$.
Donc $1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2$
$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$.
On en déduit que $1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2$
$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\dfrac{6(k+1)^2}{6}$
soit $1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2$
$=\dfrac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$.
C'est-à-dire $1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2$
$=\dfrac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}$.

Or $k(2k+1)+6(k+1)=2k^2+7k+6$ et
$(k+2)(2(k+1)+1)=(k+2(2k+3)=2k^2+7k+6$.

Ainsi $\quad 1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

43 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ ».

• **Initialisation** : pour $n=1$, $1=1^2$.
La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie
c'est-à-dire que $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$
(hypothèse de récurrence).

Or $1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1)$
$=1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)$.

Donc $1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1)=k^2+2k+1$.

On en déduit que
$1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

44 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$ ».

• **Initialisation** : pour $n=1$, $\dfrac{1}{3}\times 1\times(4\times 1^2-1)=1$ et $1^2=1$.
La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2=\dfrac{1}{3}k(4k^2-1)$
(hypothèse de récurrence).

Or $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2(k+1)-1)^2$
$=1^2+3^2+5^2+\ldots+(2k-1)^2+(2(k+1)-1)^2$.

Donc $\quad 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2(k+1)-1)^2$

$$=\frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2$$

$$=\frac{1}{3}(k(4k^2-1)+3(2k+1)^2)$$

$$=\frac{1}{3}(4k^3-k+3(4k^2+4k+1))$$

$$=\frac{1}{3}(4k^3+12k^2+11k+3)$$

De plus, $\dfrac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1)$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(4k^2+8k+3)$$

$$=\frac{1}{3}(4k^3+8k^2+3k+4k^2+8k+3)$$

$$=\frac{1}{3}(4k^3+12k^2+11k+3)$$

D'où $\quad 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2(k+1)-1)^2$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(4(k+1)^2-1).$$

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$.

45 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété :
« $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$ ».

• **Initialisation** : pour $n=2$,

$$1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\times 2}.$$

La propriété $\mathrm{P}(2)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 2$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)=\dfrac{k+1}{2k}$
(hypothèse de récurrence).

Or $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)$

$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Donc $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)$

$$=\frac{k+1}{2k}\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

Or $\dfrac{k+1}{2k}\times\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=\dfrac{k+1}{2k}\times\left(\dfrac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)$.

Donc $\dfrac{k+1}{2k}\times\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=\dfrac{(k+1)^2-1}{2k(k+1)}$.

D'où $\dfrac{k+1}{2k}\times\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=\dfrac{k(k+2)}{2k(k+1)}$

soit $\dfrac{k+1}{2k}\times\left(1-\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=\dfrac{k+2}{2(k+1)}$

Ainsi

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}.$$

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

46 **a)** $4n > 2(n+1)$ est équivalent à $2n > 2$, soit $n > 1$. L'inégalité est donc vérifiée pour tous les entiers naturels $n \geqslant 2$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $2^n > 2n$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 3$, $2^3 = 8$ et $2 \times 3 = 6$ donc $2^3 > 2 \times 3$.

La propriété $\mathrm{P}(3)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 3$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $2^k > 2k$ (hypothèse de récurrence).

Or $2^{k+1} = 2^k \times 2$ donc $2^{k+1} > 2k \times 2$ soit $2^{k+1} > 4k$.

Comme $k \geqslant 3$, alors $k \geqslant 2$ donc, d'après **a)**, $4k \geqslant 2(k+1)$.

Ainsi $2^{k+1} > 2(k+1)$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $2^n > 2n$.

47 **a)** Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $0 \leqslant w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant 7$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $w_0 = 2$ et $w_1 = \sqrt{7w_0} = \sqrt{14}$ et $0 \leqslant w_0 \leqslant w_1 \leqslant 7$.

La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leqslant w_k \leqslant w_{k+1} \leqslant 7$ (hypothèse de récurrence).

Ainsi, $0 \leqslant 7w_k \leqslant 7w_{k+1} \leqslant 49$ et, comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$,

$0 \leqslant \sqrt{7w_k} \leqslant \sqrt{7w_{k+1}} \leqslant \sqrt{49}$.

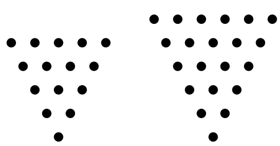
Donc $0 \leqslant w_{k+1} \leqslant w_{k+2} \leqslant 7$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant 7$.

b) On en déduit que la suite (w_n) est croissante.

48 **1.**



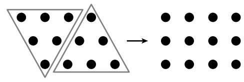
$\mathrm{T}_5 = 15$ $\mathrm{T}_6 = 21$

2. a) À l'étape $n+1$, on ajoute une ligne de $n+1$ points. Ainsi $\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n + n + 1$.

b) $2\mathrm{T}_1 = 2 = 1 \times 2$, $2\mathrm{T}_2 = 6 = 2 \times 3$, $2\mathrm{T}_3 = 12 = 3 \times 4$, $2\mathrm{T}_4 = 20 = 4 \times 5$.

On conjecture que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $2\mathrm{T}_n = n(n+1)$.

Cette formule peut également se voir graphiquement en joignant un triangle retourné à un autre. Par exemple :



On conjecture que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{T}_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété :

$$« \ \mathrm{T}_n = \frac{n(n+1)}{2} \ ».$$

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $\mathrm{T}_1 = 1$ et $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$.

La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $\mathrm{T}_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ (hypothèse de récurrence).

Or $\mathrm{T}_{k+1} = \mathrm{T}_k + k + 1 = \dfrac{k(k+1)}{2} + k + 1$.

Donc $\mathrm{T}_{k+1} = \dfrac{k(k+1)}{2} + \dfrac{2(k+1)}{2}$

soit $\mathrm{T}_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{T}_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque : On aurait pu aussi voir T_n comme la somme $1 + 2 + \ldots + n$ qui vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

49 Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $4^n - 1$ est divisible par 3 ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 0$ est divisible par 3.

La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $4^k - 1$ est divisible par 3 (hypothèse de récurrence).

Donc, il existe un entier naturel p tel que $4^k - 1 = 3p$.

Or $4^{k+1} - 1 = 4 \times 4^k - 1$.

Donc $4^{k+1} - 1 = 4 \times (3p+1) - 1 = 3(4p+1)$.

Ainsi $4^{k+1} - 1$ est divisible par 3.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

50 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9 ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $4^0 - 1 - 3 \times 0 = 0$ est divisible par 9.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $4^k - 1 - 3k$ est divisible par 9 (hypothèse de récurrence).

Donc, il existe un entier naturel p tel que $4^k - 1 - 3k = 9p$.

Or $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 4 \times 4^k - 3k - 4$.

Donc $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 4 \times (9p + 1 + 3k) - 3k - 4$.

D'où $4^{k+1} - 1 - 3(k+1) = 9(4p + k)$.

Ainsi $4^{k+1} - 1 - 3(k+1)$ est divisible par 9.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $4^n - 1 - 3n$ est divisible par 9.

51 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11 ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $7 \times 3^{5\times 0} + 4 = 11$ est divisible par 11.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $7 \times 3^{5k} + 4$ est divisible par 11 (hypothèse de récurrence).

Donc, il existe un entier naturel p tel que $7 \times 3^{5k} + 4 = 11p$.

Or $7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 3^5 \times 7 \times 3^{5k} + 4$.

Donc $7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 3^5(11p - 4) + 4$.

D'où $7 \times 3^{5(k+1)} + 4 = 11 \times (3^5 p - 88)$.

Ainsi $7 \times 3^{5(k+1)} + 4$ est divisible par 11.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $7 \times 3^{5n} + 4$ est divisible par 11.

52 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $v_n = 0{,}25$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $v_0 = 0{,}25$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_k = 0{,}25$ (hypothèse de récurrence).

Or $v_{k+1} = 5v_k - 1 = 5 \times 0{,}25 - 1 = 0{,}25$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $v_n = 0{,}25$.

53 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $OA_n = \sqrt{4n+1}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $OA_0 = 1$ et $\sqrt{4 \times 0 + 1} = 1$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $OA_k = \sqrt{4k+1}$ (hypothèse de récurrence).

Dans le triangle OA_kA_{k+1} rectangle en A_k, le théorème de Pythagore donne : $OA_{k+1}^2 = OA_k^2 + 2^2$.

Donc $OA_{k+1}^2 = 4k + 1 + 4 = 4(k+1) + 1$.

Ainsi OA $OA_{k+1} = \sqrt{4(k+1)+1}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $OA_n = \sqrt{4n+1}$.

54 **a)** Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 280$ et $-140 \times 0{,}9^0 + 420 = 280$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = -140 \times 0{,}9^k + 420$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = 0{,}9u_k + 42$

donc $u_{k+1} = 0{,}9(-140 \times 0{,}9^k + 420) + 42$.

On en déduit que $u_{k+1} = -140 \times 0{,}9^{k+1} + 378 + 42$, soit $u_{k+1} = -140 \times 0{,}9^{k+1} + 420$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = -140 \times 0{,}9^n + 420$.

b) À l'aide de la calculatrice, on trouve $u_{18} \approx 399$ et $u_{19} \approx 401$. Ainsi le nombre de voitures louées dépassera 400 à partir du mois d'août 2020.

55 **a)** Voici le résultat affiché lorsqu'on saisit $n = 5$:

```
5
0 1 1.0
1 0.7071067811865475 2.0000000000000004
2 0.5773502691896257 3.0
3 0.5 4.0
4 0.4472135954999579 5.0
5 0.408248290463863 6.0
```

b) On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{u_n^2} = n + 1$, soit $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. En effet, on peut démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

c) Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{0+1}} = 1$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = \dfrac{u_k}{\sqrt{u_k^2 + 1}}$

donc $u_{k+1} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{k+1} + 1}} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}}{\sqrt{\dfrac{k+2}{k+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{k+2}}$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

56 **a)** On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $u_n + 1 = 5^n$ soit $u_n = 5^n - 1$.

b) Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_n = 5^n - 1$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $5^0 - 1 = 0$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = 5^k - 1$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = 4 + 5u_k$

donc $u_{k+1} = 4 + 5(5^k - 1) = 5^{k+1} - 1$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = 5^n - 1$.

57 **a)** La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 10u_n - 18$.

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = 5 \times 10^n + 2.$$

b) On peut conjecturer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 5 \times 10^n + 2.$$

Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété :

$$\text{« } u_n = 5 \times 10^n + 2 \text{ ».}$$

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 7$ et $5 \times 10^0 + 2 = 7$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = 5 \times 10^k + 2$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = 10u_k - 18$, donc

$u_{k+1} = 10(5 \times 10^k + 2) - 18$.

On en déduit que $u_{k+1} = 5 \times 10^{k+1} + 2$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = 5 \times 10^n + 2$.

58 **a)** La suite (u_n) est définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n.$$

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = \dfrac{n}{2^n}$.

b)

```
>>> Comparaison(15)
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
```

c) On peut conjecturer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$.
La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = \dfrac{k}{2^k}$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{2k} u_k$, donc $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{2k} \times \dfrac{k}{2^k}$.

On en déduit que $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{2^{k+1}}$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

```
>>> Comparaison(30)
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Vrai
  Faux
  Faux
  Faux
  Faux
  Faux
```

d) Pour $n = 30$, le programme fini par afficher « Faux » alors qu'il devrait toujours afficher « Vrai ». Ceci est dû aux arrondis dans les calculs du programme Python, ainsi deux nombres égaux sont différents pour le programme.

59 (3). En effet, il s'agit d'un ensemble puisqu'il possède des accolades et chaque élément est un élément de E distinct des autres.

60 Alice a tort. L'ensemble E possède 5 éléments donc le nombre de parties de E est égal à $2^5 = 32$.

61 **a)** L'ensemble E possède 2 éléments donc le nombre de parties de E est égal à $2^2 = 4$.
b) Les parties de E sont : $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0;1\}$.

62 **a)** L'ensemble E possède 4 éléments donc le nombre de parties de E est égal à $2^4 = 16$.
b) Les parties de E sont :
$\varnothing$,
$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$
$\{a\,;b\}$, $\{a\,;c\}$, $\{a\,;d\}$, $\{b\,;c\}$, $\{b\,;d\}$, $\{c\,;d\}$
$\{a\,;b\,;c\}$, $\{a\,;b\,;d\}$, $\{a\,;c\,;d\}$, $\{b\,;c\,;d\}$
$\{a\,;b\,;c\,;d\}$.

63 **a)** L'ensemble E possède 3 éléments, donc le nombre de parties de E est égal à $2^3 = 8$.
b) Les parties de E sont :
$\varnothing$,
$\{-3\}$, $\{1\}$, $\{5\}$
$\{-3\,;1\}$, $\{-3\,;5\}$, $\{1\,;5\}$
$\{-3\,;1\,;5\}$.
c) Les gains possibles du client sont donc : 0 €, -3 €, 1 €, 5 €, -2 €, 2 €, 6 € et 3 €.

64 Chaque étage de l'arbre correspond à un élément de l'ensemble E. Si la branche est verte, l'élément appartient à la partie de E sinon l'élément n'appartient pas à cette partie.

65 **a)** $0 \in E$
b) $\{0\} \subset E$
c) $4 \notin E$
d) $\{4\} \not\subset E$
e) $\{0\,;1\,;2\} \subset E$
f) $\{0\,;1\,;5\} \not\subset E$

66 **a)** L'ensemble $G = E \times F$ est constitué des éléments : $(1\,;0)$ et $(2\,;0)$.
b) L'ensemble G a donc 2 éléments. L'ensemble G possède donc $2^2 = 4$ parties. Il s'agit de : $\varnothing$, $\{(1\,;0)\}$, $\{(2\,;0)\}$ et $\{(1\,;0)\,;(2\,;0)\}$
c) L'ensemble $H = F \times E$ est constitué des éléments : $(0\,;1)$ et $(0\,;2)$.

67 **a)** L'ensemble E possède 6 éléments, donc le nombre de parties de E est égal à $2^6 = 64$.
b) Si la correspondance s'effectue en conservant l'ordre alphabétique des éléments de E, la partie $\{u\,;w\,;z\}$ correspond au 6-uplet $(1\,;0\,;1\,;0\,;0\,;1)$.
c) Le 6-uplet $(1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;0)$ correspond à la partie $\{u\,;v\,;w\,;x\,;y\}$.

68 **a)** L'ensemble E possède 10 éléments donc le nombre de parties de E est égal à $2^{10} = 1024$.
b) Si la correspondance s'effectue en conservant l'ordre croissant des éléments de E, le 10-uplet $(0\,;1\,;0\,;1\,;0\,;1\,;0\,;1\,;0\,;1)$ correspond à la partie $\{1;3\,;5\,;7\,;9\}$.

69 **1. a)** L'ensemble E possède n éléments donc le nombre de parties de E est égal à 2^n.
b) Le nouvel ensemble E′ possède $n+1$ éléments, donc le nombre de parties de E′ est égal à 2^{n+1} c'est-à-dire le nombre de parties de E multiplié par 2.
2. a) Cadre rouge : <
Cadre vert : nb_parties*2
b) La commande Seuil$(10\,000)$ renvoie 14. Il faut donc un ensemble à 14 éléments pour qu'il ait au moins 10 000 parties. La commande Seuil$(1\,000\,000)$ renvoie 20. Il faut donc un ensemble à 20 éléments pour qu'il ait au moins 1 000 000 parties.

70 Un caractère braille peut être vu comme une partie d'un ensemble à 6 éléments correspondant à la position des points noirs. Ainsi, la partie $\{1\}$ correspond à la lettre A, la partie $\{1\,;2\,;4\,;5\}$ correspond à la lettre N et $\varnothing$ correspond à l'espace.
On en déduit qu'il existe $2^6 = 64$ caractères braille.

71 Chaque poignée piochée correspond à une partie de l'ensemble constitué des 10 jetons.
Il y en a donc $2^{10} = 1024$.

Pour se tester

72 **1.** B **2.** B **3.** C **4.** A **5.** D

73 **1.** B, C **2.** A, B, C **3.** C **4.** B, D **5.** B, D

74 **1.** Vrai. En effet, pour tout entier naturel n, P(n) est la propriété : « $u_n \leqslant 2$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 0$, $u_0 = 0 \leqslant 2$.
La propriété P(0) est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété P(k) est vraie, c'est-à-dire que $u_k \leqslant 2$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = 0{,}5u_k + 1$ donc $u_{k+1} \leqslant 0{,}5 \times 2 + 1$.
On en déduit que $u_{k+1} \leqslant 2$.
La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2$.
2. Faux. En effet, le nombre de 4-uplets d'éléments de l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ est égal à $4^4 = 256$.
3. Vrai. En effet, le nombre de parties de E et le nombre d'éléments de F^n sont égaux à 2^n.

S'entraîner

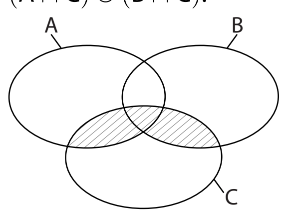
75 (1) **Initialisation** : $u_1 = 1$ donc la propriété $P(1)$ est vraie.
(2) **Hérédité** : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $\ldots$, $u_k = 1$.
On se propose de démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} = 1$.
$u_{k+1} = \dfrac{1}{k}(1+1+\ldots+1) = \dfrac{1}{k} \times k = 1.$
(3) **Conclusion** : On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 1$.

76 **a)** Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $4 \times 2^{0+1} - 7 \times 3^0 = 1$.
Donc $P(0)$ est vraie.
Pour $n = 1$, $u_1 = -5$ et $4 \times 2^{1+1} - 7 \times 3^1 = -5$.
Donc $P(1)$ est vraie.
b) On suppose que pour un entier naturel k, $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, c'est-à-dire que
$u_k = 4 \times 2^{k+1} - 7 \times 3^k$ et $u_{k+1} = 4 \times 2^{k+2} - 7 \times 3^{k+1}$.
Or $u_{k+2} = 5u_{k+1} - 6u_k$ donc
$u_{k+2} = 5(4 \times 2^{k+2} - 7 \times 3^{k+1}) - 6(4 \times 2^{k+1} - 7 \times 3^k)$.
Ainsi :
$u_{k+2} = 4(5 \times 2^{k+2} - 6 \times 2^{k+1}) - 7(5 \times 3^{k+1} - 6 \times 3^k)$.
C'est-à-dire :
$u_{k+2} = 4(5 \times 2^{k+2} - 3 \times 2^{k+2}) - 7(5 \times 3^{k+1} - 2 \times 3^{k+1})$.
On en déduit que $u_{k+2} = 4 \times 2^{k+3} - 7 \times 3^{k+2}$.
La propriété $P(k+2)$ est donc vraie.
c) On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété $P(n)$ est vraie ; c'est-à-dire, $u_n = 4 \times 2^{n+1} - 7 \times 3^n$.

77 **1.** Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $2^n \geqslant n+1$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 0$, $2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$.
La propriété $P(0)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $2^k \geqslant k+1$ (hypothèse de récurrence).
Or $2^{k+1} = 2^k \times 2$ donc $2^{k+1} \geqslant (k+1) \times 2$.
Or $(k+1) \times 2 = 2k + 2 = k + k + 2 \geqslant k + 2$.
Ainsi, $2^{k+1} \geqslant k + 2$.
La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant n+1$.
2. a) L'ensemble E est constitué de n éléments.
Parmi ses parties, il y a l'ensemble vide $\varnothing$ ainsi que les n ensembles à un élément $\{x_i\}$ où x_i est un élément de E, $1 \leqslant i \leqslant n$.
L'ensemble E possède donc au moins $n+1$ parties.
b) L'ensemble E est constitué de n éléments. Le nombre de parties de l'ensemble E est donc égal à 2^n.
c) On en déduit que pout tout entier naturel n, $2^n \geqslant n+1$.

78 **Parcours 1** :
Un code est un triplet de l'ensemble $E = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 9\}$.
Le nombre d'éléments de l'ensemble E^3 est égal à $10^3 = 1000$.
Ainsi, il existe 1 000 codes différents.
Parcours 2 :
a) Un mot est un 6-uplet de l'ensemble E constitué des 26 lettres de l'alphabet.
Un mot est donc un élément de l'ensemble E^6.
b) Le nombre d'éléments de l'ensemble E^6 est égal à $26^6 = 308\,915\,776$.
c) Ainsi, il existe 308 915 776 mots différents.

79 **a)** $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ donc $\text{Card}(A \cup B \cup C)$ $= \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cup B) \cap C)$.
Or, à l'aide du diagramme suivant,
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.



Donc $\text{Card}((A \cup B) \cap C)$
$= \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C) - \text{Card}(A \cap B \cap C)$.
Ainsi, $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$.

On en déduit que Card(A ∪ B ∪ C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) − Card(A ∩ B) − Card(A ∩ C) − Card(B ∩ C) + Card(A ∩ B ∩ C).

b) E est l'ensemble des 36 élèves. M (resp. SP et SVT) est l'ensemble des élèves ayant choisi la spécialité M (resp. SP et SVT).

Ainsi Card(M ∪ SP ∪ SVT) = Card(M) + Card(SP) + Card(SVT) − Card(M ∩ SP) − Card(M ∩ SVT) − Card(SP ∩ SVT) + Card(M ∩ SP ∩ SVT).

Donc Card(M ∪ SP ∪ SVT) = 13 + 10 + 7 − 6 − 2 − 3 + 2 = 21.

On en déduit que 36 − 21 = 15 élèves de la classe n'ont pris aucune de ces trois spécialités.

80 **a)** $A \times B = \{(1;3);(1;4);(2;3);(2;4);(4;3);(4;4)\}$.

$C \times D = \{(0;0);(0;3);(1;0);(1;3);(4;0);(4;3)\}$.

Ainsi, $(A \times B) \cap (C \times D) = \{(1;3);(4;3)\}$

b) $A \cap C = \{1;4\}$ et $B \cap D = \{3\}$.

Ainsi $(A \cap C) \times (B \cap D) = \{(1;3);(4;3)\}$

c) On peut conjecturer que :

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

d) $A \cap C = \{2\}$ et $B \cap D = \{11\}$.

Donc $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D) = \{(2;11)\}$.

81 Une grille de mots croisés peut être vue comme un 16-uplet de l'ensemble $E = \{0 ; 1\}$ où la présence du chiffre 1 indique que la case est noire. Ainsi, la grille donnée en exemple correspond au 16-uplet $(1;1;0;0;1;0;0;0;0;0;1;0;0;0;0;0)$.

Or le nombre d'éléments de E^{16} est égal à $2^{16} = 65\,536$.

Il existe donc 65 536 telles grilles de mots croisés différentes.

82 **a)** E est l'ensemble $\{0 ; 1\}$. Le nombre d'éléments de E^7 est égal à $2^7 = 128 > 95$. Il existe donc assez de codes différents pour coder les 95 caractères des anglophones. Le codage est adapté.

b) $2^7 = 128 < 191$ et $2^8 = 256 > 191$. Ainsi, pour qu'un caractère de la langue latine puisse être associé à un k-uplet de l'ensemble E, k doit au moins être égal à 8.

83 Un poème peut être vu comme un 14-uplet de l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; \dots ; 10\}$. Par exemple, le 14-uplet $(2;3;10;\dots;2)$ correspond au poème commençant par le vers n° 2 de la page 1, puis le vers n° 3 de la page 2, puis le vers n° 10 de la page 3, …, et finissant par le vers n° 2 de la page 14.

Le nombre d'éléments de E^{14} est égal à 10^{14} ce qui correspond bien à cent mille milliards. L'intitulé est exact.

84 **1. a)** Une séquence de longueur n peut être vue comme un n-uplet de l'ensemble $E = \{0 ; 1\}$ où 0 correspond à un point et 1 à un trait.

Le nombre d'éléments de E^n est égal à 2^n. Ainsi, il existe 2^n séquences de longueur n.

b) On cherche la valeur minimum de n telle que $2^n \geqslant 26$.

$2^4 = 16$ et $2^5 = 32$. Donc $n = 5$.

c) $32 - 26 = 6$. Il y a donc 6 séquences inutilisées.

2. a) Le nombre de séquences de longueur au plus n est égal à la somme : $2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$.

Or $1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1$.

Ainsi le nombre de séquences de longueur au plus n est égal $2^{n+1} - 2$.

b) On cherche la valeur minimum de n telle que $2^{n+1} - 2 \geqslant 26$ soit $2^{n+1} \geqslant 28$.

$2^{3+1} = 16$ et $2^{4+1} = 32$. Donc $n = 4$.

c) $2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$ et $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$.

Donc 4 séquences de longueur 4 ne sont pas utilisées.

3. **a)** $2^5 = 32$ donc 22 séquences de longueur 5 ne sont pas utilisées.

b)

0 : _ _ _ _ _
1 : ● _ _ _ _
2 : ● ● _ _ _
3 : ● ● ● _ _
4 : ● ● ● ● _
5 : ● ● ● ● ●
6 : _ ● ● ● ●
7 : _ _ ● ● ●
8 : _ _ _ ● ●
9 : _ _ _ _ ●

85 **Parcours 1** :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $u_1 = 2$ et $\dfrac{1+1}{1} = 2$.

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = \dfrac{k+1}{k}$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = u_k - \dfrac{1}{k^2+k}$ donc $u_{k+1} = \dfrac{k+1}{k} - \dfrac{1}{k^2+k}$.

Ainsi, $u_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2}{k(k+1)} - \dfrac{1}{k^2+k}$.

D'où $u_{k+1} = \dfrac{(k+1)^2-1}{k(k+1)}$.

On en déduit que $u_{k+1} = \dfrac{k(k+2)}{k(k+1)} = \dfrac{k+2}{k+1}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Parcours 2 :

a) Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 8$.

Donc la propriété $P(0)$ est vraie.

b) On suppose que pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_k \leqslant 8$.

Ainsi, comme la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, $0 \leqslant u_k^2 \leqslant 64$.

Donc, comme la fonction $x \mapsto 0{,}5x + 8$ est croissante, $8 \leqslant 0{,}5u_k^2 + 8 \leqslant 40$.

Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \sqrt{40}$.

Or $\sqrt{40} < 8$. Donc la propriété $P(k+1)$ est vraie.

c) On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant 8$.

86 **a)** Lorsque $n = 2$, deux droites sécantes se coupent en un point. Il y a donc un point d'intersection.

Lorsque $n = 3$, les trois droites se coupent en trois points puisqu'elles ne sont pas concourantes.

Il y a donc 3 points d'intersection.

Lorsque $n = 4$, trois droites quelconques ne sont pas concourantes donc la quatrième droite coupe en 3 points les trois premières droites.

Il y a donc $3 + 3 = 6$ points d'intersection.

b) Trois droites quelconques ne sont pas concourantes donc la $(n+1)$-ième droite coupe en n points les n premières droites qui se coupent en u_n points.

Il y a donc $u_n + n$ points d'intersection.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 2$, $u_2 = 1$ et $\dfrac{2(2-1)}{2} = 1$.

La propriété $P(2)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 2$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = \dfrac{k(k-1)}{2}$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = u_k + k$ donc $u_{k+1} = \dfrac{k(k-1)}{2} + k$.

Ainsi, $u_{k+1} = \dfrac{k(k-1)}{2} + \dfrac{2k}{2} = \dfrac{(k+1)k}{2}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

87 **1. a)** $u_2 = 1 + 3 = 4$ et $u_3 = 1 + 3 + 5 = 9$.

b) D'un étage au suivant, on ajoute deux carrés. En notant v_n le nombre de carrés à la base d'une pyramide à n étages, on en déduit que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_1 = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

c) La pyramide à $(n+1)$ étages possède donc v_{n+1} carrés de plus que la pyramide à n étages. On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + 2(n+1) - 1 = u_n + 2n + 1$.

d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = n^2$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $u_1 = 1$ et $1^2 = 1$.

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = k^2$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = u_k + 2k + 1$

donc $u_{k+1} = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = n^2$.

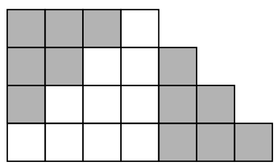
2. Le nombre de carrés nécessaires à la construction d'une pyramide à n étages est égal à $S = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$. Or

$S = v_1 + (v_1 + 2) + (v_1 + 2 \times 2) + \ldots + (v_1 + (n-1) \times 2)$

donc $S = nv_1 + 2 \times (1 + 2 + \ldots + (n-1))$.

On en déduit que $S = n + 2 \times \dfrac{(n-1)n}{2} = n^2$.

Remarque : On peut également remarquer qu'une pyramide à n étages est un carré de n carrés de côté.



$n = 4$

88 **1. a)**

n	3	4	5	6
d_n	0	2	5	9

b) Le nuage de points représentant la suite (d_n) semble parabolique.

c) $d_3 = 0$ donc $9a + 3b = 0$. $d_4 = 2$ donc $16a + 4b = 2$.

Ainsi $(a\,;b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 9a + 3b = 0 \\ 16a + 4b = 2 \end{cases}$$

ce qui équivaut à :

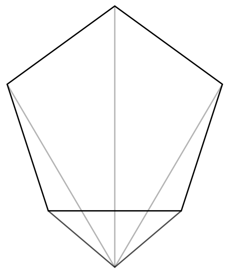
$$\begin{cases} 3a + b = 0\,(\ell_1) \\ 8a + 2b = 1\,(\ell_2) \end{cases}$$

$(\ell_2 - 2\ell_1)$ donne $2a = 1$ d'où $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{3}{2}$.

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$$d_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n.$$

2. a) Lors de l'ajout d'un nouveau sommet, chaque nouvelle diagonale rejoint le nouveau sommet aux sommets du polygone précédent sauf deux, de plus un des côtés devient une diagonale.



b) Donc un polygone convexe à $n+1$ sommets possède $(n-2)+1$ diagonales de plus qu'un polygone convexe à n sommets.

Ainsi pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$d_{n+1} = d_n + (n-2) + 1 = d_n + n - 1$.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $P(n)$ est la propriété :

« $d_n = \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{3}{2}n$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 3$, $d_3 = 0$ et $\dfrac{1}{2}3^2 - \dfrac{3}{2}3 = 0$.

La propriété $P(3)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 3$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $d_k = \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{3}{2}k$ (hypothèse de récurrence).

Or $d_{k+1} = d_k + k - 1$ donc $d_{k+1} = \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{3}{2}k + k - 1$.

Ainsi, $d_{k+1} = \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{1}{2}k - 1$.

Or $\dfrac{1}{2}(k+1)^2 - \dfrac{3}{2}(k+1) = \dfrac{1}{2}(k^2 + 2k + 1) - \dfrac{3}{2}k - \dfrac{3}{2}$

soit $\dfrac{1}{2}(k+1)^2 - \dfrac{3}{2}(k+1) = \dfrac{1}{2}k^2 - \dfrac{1}{2}k - 1$.

Donc $d_{k+1} = \dfrac{1}{2}(k+1)^2 - \dfrac{3}{2}(k+1)$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $d_n = \dfrac{1}{2}n^2 - \dfrac{3}{2}n$.

89 **a)** En séparant les figures en triangles, on obtient :

n	3	4	5	6
s_n	180	360	540	720

b) On peut conjecturer que pour tout entier $n \geqslant 3$, $s_n = 180(n-2)$

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $P(n)$ est la propriété :

« $s_n = 180(n-2)$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 3$, $s_3 = 180$ et $180(3-2) = 180$.

La propriété $P(3)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 3$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $s_k = 180(k-2)$ (hypothèse de récurrence).

Or lors de l'ajout d'un sommet, on ajoute à la figure un triangle dont la somme des angles vaut 180 degrés.

Ainsi $s_{k+1} = s_k + 180$.

Donc $s_{k+1} = 180(k-2) + 180 = 180(k-1)$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $s_n = 180(n-2)$.

Remarque : on peut également se servir de la formule d'une suite arithmétique.

90 **a)** $s_1 = s_0 + \dfrac{1}{4(0+1)^2 - 1} = \dfrac{1}{3}$

$s_2 = s_1 + \dfrac{1}{4(1+1)^2 - 1} = \dfrac{2}{5}$

$s_3 = s_2 + \dfrac{1}{4(2+1)^2 - 1} = \dfrac{3}{7}$

$s_4 = s_3 + \dfrac{1}{4(3+1)^2 - 1} = \dfrac{4}{9}$

b) On peut conjecturer que pour tout entier naturel n,

$s_n = \dfrac{n}{2n+1}$

$s_5 = s_4 + \dfrac{1}{4(4+1)^2 - 1} = \dfrac{5}{11}$ et $\dfrac{5}{2 \times 5 + 1} = \dfrac{5}{11}$.

c) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété :

« $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 0$, $s_0 = 0$ et $\dfrac{0}{2 \times 0 + 1} = 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $s_k = \dfrac{k}{2k+1}$ (hypothèse de récurrence).

Or $s_{k+1} = s_k + \dfrac{1}{4(k+1)^2 - 1}$

donc $s_{k+1} = \dfrac{k}{2k+1} + \dfrac{1}{4(k+1)^2 - 1}$

soit $s_{k+1} = \dfrac{k}{2k+1} + \dfrac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$

$= \dfrac{k}{2k+1} + \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \dfrac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$

Or $(k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1$

et $k(2k+3) + 1 = 2k^2 + 3k + 1$.

Donc $s_{k+1} = \dfrac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{k+1}{2k+3}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

91 **1.** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(n)$ est la propriété : « $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\times(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$,

$\dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{k\times(k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$ (hypothèse de récurrence). Or

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)\times(k+2)}$$
$$= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{k\times(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\times(k+2)}$$
$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\times(k+2)}.$$

Ainsi $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{(k+1)\times(k+2)}$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)\times(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\times(k+2)}$$
$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)\times(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$,

$\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1-k}{k\times(k+1)} = \dfrac{1}{k\times(k+1)}$.

Ainsi, $\dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\times(n+1)}$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

92 **a)** D'après l'énoncé, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 2a_n - (n+1) = 2a_n - n - 1$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(n)$ est la propriété : « $a_n = 2^n + n + 2$ ».

• **Initialisation** : pour $n = 1$, $a_1 = 5$ et $2^1 + 1 + 2 = 5$.

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $a_k = 2^k + k + 2$ (hypothèse de récurrence).

Or $a_{k+1} = 2a_k - k - 1$

donc $a_{k+1} = 2(2^k + k + 2) - k - 1$.

Ainsi $a_{k+1} = 2^{k+1} + 2k + 4 - k - 1$

soit $a_{k+1} = 2^{k+1} + (k+1) + 2$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = 2^n + n + 2$.

c) $a_{10} = 2^{10} + 10 + 2 = 1036$ donc le 10e ministre recevra 1 036 pièces d'or.

93 **a)** Cadre rouge : u

Cadre vert : u-uprecedent/4

b)

```
n=int(input())
uprecedent=-1
v=-1
print(v)
u=1
v=2
print(v)
for i in range(2,n):
    temp=u
    u=u-uprecedent/4
    uprecedent=temp
    v=2**i*u
    print(v)
```

c) On peut conjecturer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier $v_0 = -1$.

d) Selon cette conjecture, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = v_0 + 3n = 3n - 1$ et $u_n = \dfrac{3n-1}{2^n}$.

2. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = \dfrac{3n-1}{2^n}$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 0$, $u_0 = -1$ et $\dfrac{3\times 0 - 1}{2^0} = -1$.

Pour $n = 1$, $u_1 = 1$ et $\dfrac{3\times 1 - 1}{2^1} = 1$.

Les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont donc vraies.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, les propriétés $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_k = \dfrac{3k-1}{2^k}$ et $u_{k+1} = \dfrac{3k+2}{2^{k+1}}$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+2} = u_{k+1} - \dfrac{u_k}{4}$.

Donc $u_{k+2} = \dfrac{3k+2}{2^{k+1}} - \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3k-1}{2^k}$.

Ainsi, $u_{k+2} = \dfrac{2(3k+2) - (3k-1)}{2^{k+2}} = \dfrac{3k+5}{2^{k+2}}$.

On en déduit que $u_{k+2} = \dfrac{3(k+2)-1}{2^{k+2}}$.

La propriété $P(k+2)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n1, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3n-1}{2^n}$.

94 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « u_n est un entier naturel ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ est un entier naturel.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que u_k est un entier naturel (hypothèse de récurrence).

On a $u_{k+1} = \dfrac{(k+1)((k+1)^2+5)}{6}$

donc $u_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k^2+2k+1+5)}{6}$.

Ainsi $u_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k^2+5)+(k+1)(2k+1)}{6}$

soit $u_{k+1} = \dfrac{k(k^2+5)+k^2+5+(k+1)(2k+1)}{6}$.

Donc $u_{k+1} = \dfrac{k(k^2+5)+3k^2+3k+6}{6}$.

On en déduit que $u_{k+1} = \dfrac{k(k^2+5)}{6} + \dfrac{k^2+k}{2} + 1$.

Or

• $\dfrac{k(k^2+5)}{6}$ est un entier.

• $\dfrac{k^2+k}{2} = \dfrac{k(k+1)}{2}$ est un entier car k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs et l'un des deux est donc pair.

• 1 est un entier.

Donc u_{k+1} est un entier.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

95 **a)** $u_2 = 4u_1 - 3u_0 = 4$ et $u_3 = 4u_2 - 3u_1 = 13$.

b) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\dfrac{3 \times 0 - 1}{2} = 0$.

Pour $n = 1$, $u_1 = 1$ et $\dfrac{3 \times 1 - 1}{2} = 1$.

Les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont donc vraies.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, les propriétés $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_k = \dfrac{3^k - 1}{2}$ et $u_{k+1} = \dfrac{3^{k+1} - 1}{2}$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+2} = 4u_{k+1} - 3u_k$.

Donc $u_{k+2} = 4\dfrac{3^{k+1}-1}{2} - 3\dfrac{3^k - 1}{2}$.

Ainsi, $u_{k+2} = \dfrac{4(3^{k+1}-1) - 3(3^k - 1)}{2} = \dfrac{3^{k+2}-1}{2}$.

La propriété $P(k+2)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$.

96 **a)** $F_2 = F_1 + F_0 = 2$ et $F_3 = F_2 + F_1 = 3$.

b) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $F_n \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 0$, $F_0 = 1 \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^0$.

Pour $n = 1$, $F_1 = 1 \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^1$.

Les propriétés $P(0)$ et $P(1)$ sont donc vraies.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, les propriétés $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, c'est-à-dire que $F_k \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^k$ et $F_{k+1} \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^{k+1}$ (hypothèse de récurrence).

Or $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$.

Donc $F_{k+2} \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^{k+1} + \left(\dfrac{5}{3}\right)^k$.

Or $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{k+1} + \left(\dfrac{5}{3}\right)^k = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{k+2}\left(\dfrac{3}{5} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right)$.

Et $\left(\dfrac{3}{5} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right) = 0{,}96 < 1$.

Ainsi $F_{k+2} \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^{k+2}$.

La propriété $P(k+2)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $F_n \leqslant \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

c) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $F_0^2 = 1$ et $F_0 \times F_1 = 1$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_k^2 = F_k \times F_{k+1}$ (hypothèse de récurrence).

Or $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_{k+1}^2 = F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_k^2 + F_{k+1}^2$.

Ainsi $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_{k+1}^2 = F_k \times F_{k+1} + F_{k+1}^2$.

Or $F_k \times F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) = F_{k+1}F_{k+2}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$.

97 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n \leqslant 2^n$ ».

• **Initialisation** : Pour $n=0$, $u_0=1\leqslant 2^0$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, les propriétés $\mathrm{P}(0)$, $\mathrm{P}(1)$, …, $\mathrm{P}(k)$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_0\leqslant 2^0$, $u_1\leqslant 2^1$, …, $u_k\leqslant 2^k$ (hypothèse de récurrence).
Or $u_{k+1}=u_0+u_1+\ldots+u_k$.
Donc $u_{k+1}\leqslant 2^0+2^1+\ldots+2^k$.
Or $2^0+2^1+\ldots+2^k=\dfrac{1-2^{k+1}}{1-2}=2^{k+1}-1$.
Ainsi $u_{k+1}\leqslant 2^{k+1}$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 2^n$.

98 **a)** $\mathrm{E}=\{0;1\}$ et $\mathrm{F}=\{1;2\}$. Ainsi $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}=\{0;1;2\}$.
• Les parties de l'ensemble E sont : $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0;1\}$.
• Les parties de l'ensemble F sont : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1;2\}$.
Ainsi $\mathcal{P}(\mathrm{E})\cup\mathcal{P}(\mathrm{F})$ est constitué de :
$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0;1\}$, $\{1;2\}$.
• Les parties de l'ensemble $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$ sont :
$\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0;1\}$, $\{0;2\}$, $\{1;2\}$, $\{0;1;2\}$.
Ainsi, les parties $\{0;2\}$ et $\{0;1;2\}$ de l'ensemble $\mathrm{E}\cup\mathrm{F}$ n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathcal{P}(\mathrm{E})\cup\mathcal{P}(\mathrm{F})$.
On en déduit que $\mathcal{P}(\mathrm{E}\cup\mathrm{F})$ n'est pas inclus dans $\mathcal{P}(\mathrm{E})\cup\mathcal{P}(\mathrm{F})$.
b) Si le nombre d'éléments de F est 3 alors le nombre d'éléments de E est 6. Ainsi le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(\mathrm{F})$ est $2^3=8$ et celui de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ est $2^6=64$.
Or $64\neq 2\times 8$.

99 **a)** La négation de cette affirmation est :
Il existe un entier naturel n tel que la propriété $\mathrm{P}(n)$: « n^2-2 est positif » est fausse. Cette négation est vraie. En effet, pour $n=1$, $1^2-2=-1$ est négatif, donc $\mathrm{P}(1)$ est fausse.
b) La négation de cette affirmation est :
Pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$: « n^3-n est un multiple de 3 » est vraie. Cette négation est vraie. En effet, on le démontre par récurrence :
• **Initialisation** : Pour $n=0$, $0^3-0=0$ est un multiple de 3.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel p tel que $k^3-k=3p$ (hypothèse de récurrence).
Or $(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k+1-k-1$.
Donc $(k+1)^3-(k+1)=k^3+3k^2+3k-k$.
Ainsi $(k+1)^3-(k+1)=3p+3k^2+3k$.
On en déduit que $(k+1)^3-(k+1)$ est un multiple de 3.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

100 **1.** Passage au binaire
a)

Entier	Entier en binaire	n-uplet associé	Partie associée
14	01110	$(0;1;1;1;0)$	$\{b;c;d\}$
25	11001	$(1;1;0;0;1)$	$\{a;b;e\}$
13	01101	$(0;1;1;0;1)$	$\{b;c;e\}$
0	00000	$(0;0;0;0;0)$	$\varnothing$
2^5-1	11111	$(1;1;1;1;1)$	E

b) Le nombre de parties de l'ensemble E est égal à 2^5, ainsi les nombres de 0 à 2^5-1 convertis en binaire correspondront à chaque partie de l'ensemble E.
2. Codage en Python
b) Cadre rouge : 2**n
Cadre vert : bin(i)[2 :].zfill(n)
d) Cadre rouge : ℓ
Cadre vert : =="1"
e)

```
def Traduction(code,E):
    partie=[]
    l=len(code)
    for i in range(l):
        if code[i]=="1":
            partie.append(E[i])
    return partie


def Parties(E):
    n=len(E)
    P=[]
    for i in range(2**n):
        code=bin(i)[2:].zfill(n)
        partie=Traduction(code,E)
        P.append(partie)
    return P
```

f) La commande Parties([0,1]) retourne : [[],[1],[0],[0,1]]
La commande Parties([0,1,2]) retourne :
[[],[2],[1],[1,2],[0],[0,2],[0,1],[0,1,2]]
3. Application : Algorithme glouton
a) La commande Parties([200,250,600,1250,1650]) retourne :
[[],[1650],[1250],[1250,1650],[600],[600,1650],
[600,1250],[600,1250,1650],[250],[250,1650],
[250,1250],[250,1250,1650],[250,600],
[250,600,1650],[250,600,1250],[250,600,1250,1650],
[200],[200,1650],[200,1250],[200,1250,1650],
[200,600],[200,600,1650],[200,600,1250],
[200,600,1250,1650],[200,250],[200,250,1650],
[200,250,1250],[200,250,1250,1650],[200,250,600],
[200,250,600,1650],[200,250,600,1250],
[200,250,600,1250,1650]]

b) La partie $\{200 ; 600 ; 1250\}$ correspond à un poids égal à $200 + 600 + 1\,250 = 2\,050$ g.

c) Cadre rouge : poids

d) Il suffit de remplacer P.append(partie) par P.append(Poids(partie))

```
def Traduction(code,E):
    partie=[]
    l=len(code)
    for i in range(l):
        if code[i]=="1":
            partie.append(E[i])
    return partie

def Poids(partie):
    somme=0
    for poids in partie:
        somme=somme+poids
    return somme

def Parties(E):
    n=len(E)
    P=[]
    for i in range(2**n):
        code=bin(i)[2:].zfill(n)
        partie=Traduction(code,E)
        P.append(Poids(partie))
    return P
```

e) La commande Parties([200,250,600,1250,1650]) retourne alors :

[0,1650,1250,2900,600,2250,1850,3500,250, 1900,1500,3150,850,2500,2100,3750,200,1850, 1450,3100,800,2450,2050,3700,450,2100,1700, 3350,1050,2700,2300,3950]

Le premier rang étant le rang 0, les rangs pour lesquels le poids est égal à 2 100 g sont les rangs : 14 et 25.

D'après le tableau de la question **1.**, les parties correspondantes sont $\{250 ; 600 ; 1\,250\}$ et $\{200 ; 250 ; 1\,650\}$.

f) Alice peut mettre dans son sac :

• les livres de 250, 600 et 1 250 g ;

• ou les livres de 200, 250 et 1 650 g.

101 **1. a)** $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $v_1 = \dfrac{v_0 + u_1}{2} = \dfrac{5}{4}$.

b) $u_1 + 2v_1 = 4$ et $u_1 - v_1 = \dfrac{1}{4}$.

c)

n	0	1	2	3	4
u_n	2	1,5	1,375	1,34375	1,3359375
v_n	1	1,25	1,3125	1,328125	1,33203125
$u_n + 2v_n$	4	4	4	4	4
$u_n - v_n$	1	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{64}$	$\dfrac{1}{256}$

2. a) Cadre rouge : u+2*v

Cadre vert : (u+v)/2

Cadre bleu : (u+v)/2

b) Pour $n = 10$, le programme affiche 10 fois le nombre 4.

c) On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $t_n = 4$ soit $u_n + 2v_n = 4$.

d) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n + 2v_n = 4$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 + 2v_0 = 4$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k + 2v_k = 4$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} + 2v_{k+1} = \dfrac{u_k + v_k}{2} + 2\dfrac{v_k + u_{k+1}}{2}$.

Donc $u_{k+1} + 2v_{k+1} = \dfrac{u_k + v_k}{2} + v_k + \dfrac{u_k + v_k}{2}$.

Ainsi, $u_{k+1} + 2v_{k+1} = u_k + 2v_k = 4$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n + 2v_n = 4$.

3. a)

```
n=int(input())
u=2
v=1
for i in range(1,n+1):
    w=u-v
    print(w)
    u=(u+v)/2
    v=(u+v)/2
```

b) Pour $n = 10$, le programme affiche :

```
1
0.25
0.0625
0.015625
0.00390625
0.0009765625
0.000244140625
6.103515625e-05
1.52587890625e-05
3.814697265625e-06
```

c) On peut conjecturer que la suite (w_n) est une géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = 1$.

d) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $w_{n+1} = \dfrac{1}{4}w_n$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $w_1 = \dfrac{1}{4}$ et $w_0 = 1$ donc $w_1 = \dfrac{1}{4}w_0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $w_{k+1} = \dfrac{1}{4}w_k$ (hypothèse de récurrence).

Or $w_{k+1} = u_{k+1} - v_{k+1} = \dfrac{u_k + v_k}{2} - \dfrac{v_k + u_{k+1}}{2}$.

Ainsi $w_{k+1} = \dfrac{u_k - u_{k+1}}{2}$.

Donc $w_{k+1} = \dfrac{u_k - \dfrac{u_k + v_k}{2}}{2} = \dfrac{u_k - v_k}{4} = \dfrac{1}{4}w_k$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \dfrac{1}{4} w_n$.

On en déduit que la suite (w_n) est une géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n - v_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

4. a) On considère le système :

$$\begin{cases} a + 2b = 4 & (\ell_1) \\ a - b = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n & (\ell_2) \end{cases}$$

$(\ell_1 - \ell_2)$ donne $3b = 4 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ d'où $b = \dfrac{1}{3}\left(4 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$

et $a = \dfrac{1}{3}\left(4 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right) + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \dfrac{1}{3}\left(4 + 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$.

b) Pour tout entier naturel n, d'après les questions **2. d)** et **3. d)**, $(u_n\,; v_n)$ est solution de ce système.

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$u_n = \dfrac{1}{3}\left(4 + 2\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{3}\left(4 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)$.

102 E est un ensemble à n éléments.

Le nombre de parties de E est égal à 2^n.

Le nombre de 5-uplets de E est égal à n^5.

Ainsi, n vérifie $2^n \geqslant 1000$ et $n^5 \leqslant 250\,000$.

À l'aide de la calculatrice, n peut valoir 10, 11 ou 12.

103 **a)** $b_1 = \dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

$b_2 = b_1 \times \varphi = \dfrac{1}{\varphi} \times \varphi = 1$

$b_3 = b_2 \varphi = \varphi = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

$b_4 = b_3 \times \varphi = \varphi^2 = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5}$

$b_5 = b_4 \varphi = \varphi^3 = 2 + \sqrt{5}$

$b_6 = b_5 \varphi = \varphi^4 = \left(\varphi^2\right)^2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

$b_7 = b_6 \varphi = \varphi^4 \times \varphi = \dfrac{11}{2} + \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$.

b) $b_1 + b_2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5} = b_3$

$b_2 + b_3 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5} = b_4$

$b_3 + b_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} = b_5$

$b_5 + b_6 = 2\sqrt{5} + \dfrac{7}{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{5} = \dfrac{11}{2} + \dfrac{5}{2}\sqrt{5} = b_7$

$b_8 = b_6 + b_7 = 9 + 4\sqrt{5}$

$b_9 = b_7 + b_8 = \dfrac{29}{2} + \dfrac{13}{2}\sqrt{5}$

$b_{10} = b_8 + b_9 = \dfrac{47}{2} + \dfrac{21}{2}\sqrt{5}$

c) $\dfrac{1}{\varphi} + 1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5} + 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{5} = \varphi$

For any positive integer n,

$\varphi^{n+1}\left(\dfrac{1}{\varphi} + 1\right) = \varphi^{n+1} \times \varphi$

so $\varphi^n + \varphi^{n+1} = \varphi^{n+2}$.

d) $b_1 + b_2 = \varphi^2 - 1$

$b_1 + b_2 + b_3 = \varphi^3 - 1$

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = \varphi^4 - 1$

A possible formula :

$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \varphi^n - 1$.

$\mathrm{P}(n)$ is the proposition $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \varphi^n - 1$.

• Stape one :

$b_1 = \dfrac{1}{\varphi} = \varphi - 1 = \varphi^1 - 1$

$\mathrm{P}(1)$ is true.

• Stape two :

Let k an integer as $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = \varphi^k - 1$

and we prove that $b_1 + b_2 + \ldots + b_{k+1} = \varphi^{k+1} - 1$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_k + b_{k+1} = \varphi^k - 1 + b_{k+1}$

$b_{k+1} = b_1 \times \varphi^k = \dfrac{1}{\varphi} \times \varphi^k = \varphi^{k-1}$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_k + b_{k+1} = \varphi^k - 1 + \varphi^{k-1}$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_k + b_{k+1} = \underbrace{\varphi^k + \varphi^{k-1}}_{\varphi^{k+1}} - 1$

Conclusion : for all integer $n \geqslant 1$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = \varphi^n - 1$.

104 Voici un extrait d'une feuille de calcul afin de calculer les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et $(v_n - 3)$.

	A	B	C	D
1	n	U n	V n	V n-3
2	0	2	10	7
3	1	4	17	14
4	2	9	31	28
5	3	24	59	56
6	4	63	115	112

On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $v_n = 3 + 7 \times 2^n$.

On le démontre par récurrence.

Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $v_n = 3 + 7 \times 2^n$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $v_0 = u_0 + 8 = 10$ et $3 + 7 \times 2^0 = 10$.

La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_k = 3 + 7 \times 2^k$ (hypothèse de récurrence).

Or $v_{k+1} = u_{k+1} + 2(k+1)^2 + 3(k+1) + 8$.
Donc
$v_{k+1} = 2u_k + 2k^2 - k + 2(k^2 + 2k + 1) + 3k + 11$.
Ainsi $v_{k+1} = 2(u_k + 2k^2 + 3k + 8) - 3$.
Donc
$v_{k+1} = 2v_k - 3 = 2(3 + 7 \times 2^k) - 3 = 3 + 7 \times 2^{k+1}$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 + 7 \times 2^n$.

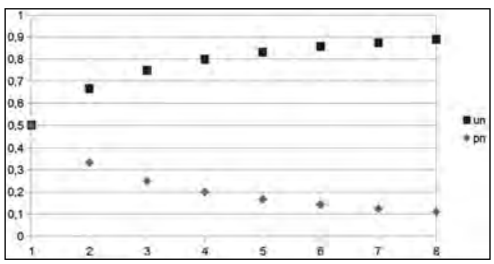
105 Cela revient à démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.
On le démontre par récurrence.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $2^n \geqslant n^2$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$.
La propriété $\mathrm{P}(4)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 4$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $2^k \geqslant k^2$ (hypothèse de récurrence).
Or $2^{k+1} = 2^k \times 2$.
Donc $2^{k+1} \geqslant k^2 \times 2$.
On doit donc établir que :
si $k \geqslant 4$, alors $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
Or $2k^2 \geqslant (k+1)^2$ équivaut à $k^2 - 2k - 1 \geqslant 0$.
Le discriminant du trinôme $x^2 - 2x - 1$ vaut 8 donc celui-ci admet deux racines distinctes : $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.
Il est donc positif pour $x \leqslant 1 - \sqrt{2}$ et pour $x \geqslant 1 + \sqrt{2}$.
Comme $1 + \sqrt{2} \leqslant 4$, on en déduit que si $k \geqslant 4$, alors $k^2 - 2k - 1 \geqslant 0$ soit $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
Ainsi $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

106 **a)** On s'intéresse tout d'abord à la largeur de tels rectangles.
Nombre de largeurs possibles égales à 1 : n.
Nombre de largeurs possibles égales à 2 : $n - 1$.
Nombre de largeurs possibles égales à 3 : $n - 2$.
…
Nombre de largeurs possibles égales à n : 1.
Ainsi le nombre de largeurs possibles est égal à $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
De même, le nombre de longueurs possibles est égal à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
D'après le principe multiplicatif, le nombre de rectangles possibles est donc égal à $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
b) On démontre par récurrence que ce nombre est égal à la somme de n premiers entiers au cube.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété :
« $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 1$, $1^3 = 1$ et $\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$.
La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

(hypothèse de récurrence). Or
$1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3$.
Donc $1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$.
Ainsi :
$1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^2(k+1)}{4}$.
On en déduit que :
$1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$,
soit $1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \dfrac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.
Finalement, $1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \left(\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

107 **Partie A.**
a)


L'allure des nuages de points ressemble à la représentation graphique de fonctions rationnelles.

b)
```
n=int(input())
U=0.5
P=0.5
for k in range(n):
    print(U,P)
    U=1/(2-U)
    P=P*U
```

Pour $n=10$, le programme affiche :

```
0.5 0.5
0.6666666666666666 0.3333333333333333
0.7499999999999999 0.24999999999999994
0.8 0.19999999999999996
0.8333333333333334 0.16666666666666663
0.8571428571428572 0.14285714285714285
0.875 0.125
0.8888888888888888 0.1111111111111111
0.8999999999999999 0.09999999999999998
0.9090909090909091 0.09090909090909088
```

c) On peut conjecturer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{n}{n+1} \text{ et } P_n = \frac{1}{n+1}.$$

Partie B.

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = \frac{n}{n+1}$ ».

• **Initialisation** : pour $n=1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = \frac{k}{k+1}$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = \frac{1}{2-u_k}$.

Donc $u_{k+1} = \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{k+2}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

2. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$P_{n+1} = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n \times u_{n+1} = P_n \times u_{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $Q(n)$ est la propriété : « $P_n = \frac{1}{n+1}$ ».

• **Initialisation** : pour $n=1$, $P_1 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.
La propriété $Q(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $Q(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $P_k = \frac{1}{k+1}$ (hypothèse de récurrence).

Or $P_{k+1} = P_k \times u_{k+1}$.

Donc $P_{k+1} = \frac{1}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$.

La propriété $Q(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $Q(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P_n = \frac{1}{n+1}$.

Objectif BAC

108 **Partie A**

L'affirmation est fausse. En effet, $P(1)$ est fausse :

$$V_1 = \frac{1}{3}\sqrt{V_0^2+8} = \frac{\sqrt{8}}{3} \text{ et } 1 - \frac{1}{9^0} = \frac{8}{9}.$$

En fait, on peut démontrer que pour tout naturel n, $V_n = \sqrt{1-\frac{1}{9^n}}$.

Partie B

1. $U_1 = \frac{2U_0}{1+U_0} = \frac{2}{3}$..

2. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $U_n = \frac{2^n}{1+2^n}$ ».

• **Initialisation** : Pour $n=0$, $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{2^0}{1+2^0} = \frac{1}{2}$.
La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $U_k = \frac{2^k}{1+2^k}$ (hypothèse de récurrence).

Or $U_{k+1} = \frac{2U_k}{1+U_k}$.

Donc $U_{k+1} = \dfrac{2\frac{2^k}{1+2^k}}{1+\frac{2^k}{1+2^k}}$.

Ainsi, $U_{k+1} = \dfrac{\frac{2^{k+1}}{1+2^k}}{\frac{1+2^k+2^k}{1+2^k}} = \frac{2^{k+1}}{1+2^{k+1}}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

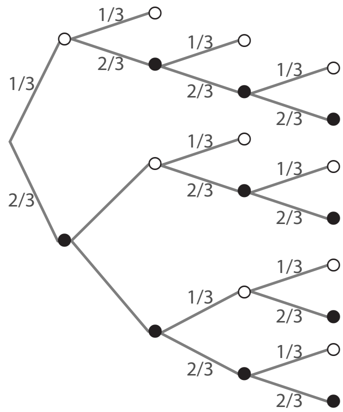
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n,

$$U_n = \frac{2^n}{1+2^n}.$$

3. Dans l'algorithme 2, le nombre i varie entre 0 et n donc prend $n+1$ valeurs; la valeur de u en sortie est donc U_{n+1}.
L'algorithme 2 ne convient donc pas.

109 **1.** À chaque tirage la probabilité de tirer une boule blanche est égale à $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, donc celle de tirer une boule noire est égale à $\frac{2}{3}$.

On peut construire le début de l'arbre en arrêtant la branche dès qu'il y a eu tirage de deux boules blanches.



On a donc :

• $p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$,

• $p_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times 2$

$= \frac{4}{27}$,

• $p_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3$

$= \frac{4}{27}$.

2. a) Les tirages sont avec remise donc pour tout entier naturel n, $P(B_n) = \frac{1}{3}$.

b) U_n est réalisé si dans les $(n-1)$ premiers tirages il y a exactement le tirage d'une boule blanche. Ce tirage peut se produire au premier, au deuxième, …, ou au $(n-1)$-ème tirage, c'est-à-dire de $n-1$ façons ; on a donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$P(U_n) = (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

c) Les tirages sont indépendants donc :

$$p_n = P(U_n) \times P(B_n).$$

Ainsi, $p_n = (n-1) \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3}$.

On en déduit que : $p_n = (n-1)\frac{2^{n-2}}{3^n} = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

3. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété :

« $p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 2$, $p_2 = \frac{1}{9}$ et $1 - \left(\frac{2}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

La propriété $P(2)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 2$, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1 - \left(\frac{k}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

(hypothèse de récurrence).

Or $p_2 + p_3 + \ldots + p_{k+1} = p_2 + p_3 + \ldots + p_k + p_{k+1}$.

Donc :

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_{k+1} = 1 - \left(\frac{k}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{k}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}.$$

On en déduit que :

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_{k+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{k}{2} + 1\right) - \frac{k}{4}\right),$$

soit $p_2 + p_3 + \ldots + p_{k+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2}\right)$.

Ainsi, $p_2 + p_3 + \ldots + p_{k+1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{k+1}{2} + 1\right)$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n,

$$p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

110 Partie A

La valeur stockée dans la variable U à la fin de l'exécution de l'algorithme est 29.

Partie B

1. $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3$

et $u_2 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 10$.

2. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n \geqslant n$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 0 \geqslant 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k \geqslant k$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = 3u_k - 2k + 3$.

Donc $u_{k+1} \geqslant 3k - 2k + 3$.

Ainsi $u_{k+1} \geqslant k + 3 \geqslant k$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

3. Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = 3^n + n - 1$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $3^0 + 0 - 1 = 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = 3^k + k - 1$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = 3u_k - 2k + 3$.

Donc $u_{k+1} = 3(3^k + k - 1) - 2k + 3 = 3^{k+1} + k$.

Ainsi $u_{k+1} = 3^{k+1} + (k+1) - 1$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

4. a) $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$ donc $n = 3p$ est une valeur de n telle que $u_n \geqslant 10^p$; n_0 étant la plus petite de ces valeurs, on a donc $n_0 \leqslant 3p$.

b) $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ donc pour la valeur $p = 3$; $n_0 = 7$.

c)

```
p=int(input())
u=0
n=0
while u<10**p:
    u=3*u-2*n+3
    n=n+1
print(n)
```

111 **1.**

n	u	v	a	b
0			4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2. **a)** Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».

• **Initialisation** :
Pour $n = 0$, $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k > 0$ et $v_k > 0$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = \dfrac{u_k + v_k}{2}$ donc $u_{k+1} > 0$.

Et $v_{k+1} = \sqrt{\dfrac{u_k^2 + v_k^2}{2}}$ donc $v_{k+1} > 0$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 &= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2}{4} \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{4} \\ &= \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}^2 \leqslant v_{n+1}^2$.
Or d'après la question **2. a)**, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$.
Or $u_0 < v_0$ donc pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n$.

113 **a)** L'algorithme ci-dessous permet de déterminer les n premiers termes de la suite (u_n).

```
n=int(input())
u=1
print(u)
for i in range(n-1):
    u=u+2*i+3
    print(u)
```

On trouve : $u_0 = 1$ $\quad u_5 = 36$
$u_1 = 4$ $\quad u_6 = 49$
$u_2 = 9$ $\quad u_7 = 64$
$u_3 = 16$ $\quad u_8 = 81$
$u_4 = 25$ $\quad u_9 = 100$

b) On peut conjecturer que pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

c) Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_n = (n+1)^2$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = (k+1)^2$ (hypothèse de récurrence).
Or $u_{k+1} = u_k + 2k + 3$.
Donc $u_{k+1} = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4$.
Ainsi $u_{k+1} = (k+2)^2$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

114 **a)** Vrai. En effet, l'ensemble $\{1\,;2\,;3\}$ est inclus dans E.
b) Faux. Un élément de E^5 est un 5-uplet d'éléments de E, par exemple, $(1\,;1\,;a\,;3\,;b)$.
Il ne s'agit pas d'un ensemble d'éléments de E.
c) Vrai. L'ensemble E possède 5 éléments.
d) Faux. Le nombre de parties de E est égal à $2^5 = 32$.
Or $224 + 32 = 256 = 2^8$. Le nombre d'éléments de E doit donc être égal 8. Il suffit donc de lui en ajouter 3.

Pour aller plus loin

115 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_n \geqslant \dfrac{n}{4}$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 1$, $u_1 = 1 \geqslant \dfrac{1}{4}$.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, les propriétés $\mathrm{P}(1)$, $\mathrm{P}(2)$, …, $\mathrm{P}(k)$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_1 \geqslant \dfrac{1}{4}$, $u_2 \geqslant \dfrac{2}{4}$, …, $u_k \geqslant \dfrac{k}{4}$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1}^2 = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$.

Donc $u_{k+1}^2 \geqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} + \ldots + \dfrac{k}{4}$.

Ainsi $u_{k+1}^2 \geqslant \dfrac{1}{4}(1 + 2 + \ldots + k)$.

Soit $u_{k+1}^2 \geqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)$.

Or $k \geqslant 1$, donc $2k \geqslant k+1$, soit $k \geqslant \dfrac{k+1}{2}$.

Donc $u_{k+1}^2 \geqslant \frac{(k+1)^2}{16}$.

Comme les termes de la suite (u_n) sont positifs, on en déduit que $u_{k+1} \geqslant \frac{k+1}{4}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \frac{n}{4}$.

116 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(n)$ est la propriété : « $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n=1$, $u_1 = 1$ et $1 \leqslant u_1 \leqslant 1^2$.

Pour $n=2$, $u_2 = 2$ et $1 \leqslant u_2 \leqslant 2^2$.

Les propriétés $P(1)$ et $P(2)$ sont donc vraies.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, les propriétés $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_k \leqslant k^2$ et $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant (k+1)^2$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+2} = u_{k+1} + \frac{2}{k+2} u_k$.

Donc $1 + \frac{2}{k+2} \leqslant u_{k+2} \leqslant (k+1)^2 + \frac{2}{k+2} k^2$.

Or d'une part, $1 \leqslant 1 + \frac{2}{k+2}$.

Et d'autre part, comme $k \leqslant k+1 \leqslant k+2$,

$$(k+1)^2 + \frac{2}{k+2} k^2 \leqslant (k+1)^2 + \frac{2}{k+1}(k+1)^2$$

c'est-à-dire $(k+1)^2 + \frac{2}{k+2} k^2 \leqslant (k+1)^2 + 2(k+1)$

soit

$$(k+1)^2 + \frac{2}{k+2} k^2 \leqslant k^2 + 4k + 3 \leqslant k^2 + 4k + 4.$$

Ainsi $(k+1)^2 + \frac{2}{k+2} k^2 \leqslant (k+2)^2$.

On en déduit donc que : $1 \leqslant u_{k+2} \leqslant (k+2)^2$.

La propriété $P(k+2)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.

117 Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $2\cos\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right) = 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$u_k = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} = \sqrt{2 + u_k}$.

Donc $u_{k+1} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)}$.

Ainsi $u_{k+1} = \sqrt{2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)\right)}$.

On en déduit d'après la formule donnée que :

$$u_{k+1} = \sqrt{2\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)\right)}.$$

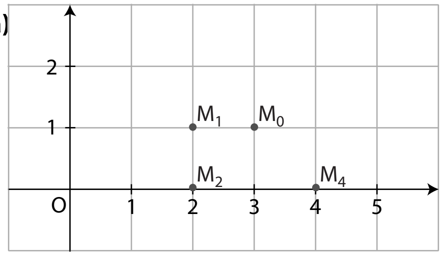
Or, pour tout entier naturel k, $\frac{\pi}{2^{k+2}}$ appartient à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$ est positif.

Ainsi $u_{k+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

118 **a)**



b) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $v_n = \frac{1}{3}(-2)^n + \frac{8}{3}$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 0$, $v_0 = x_0 = 3$ et $\frac{1}{3}(-2)^0 + \frac{8}{3} = 3$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$v_k = \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{8}{3}$ (hypothèse de récurrence).

Or $v_{k+1} = x_{2(k+1)} = x_{2k+2} = x_{2k+1+1}$.

Donc $v_{k+1} = 4 - 2y_{2k+1}$.

Ainsi $v_{k+1} = 4 - 2(x_{2k} - 2) = 8 - 2x_{2k}$.

On en déduit que $v_{k+1} = 8 - 2v_k$

d'où $v_{k+1} = 8 - 2\left(\frac{1}{3}(-2)^k + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}(-2)^{k+1} + \frac{8}{3}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1}{3}(-2)^n + \frac{8}{3}$.

c) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $w_n = -\frac{2}{3}(-2)^n + \frac{8}{3}$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 0$, $w_0 = x_1 = 2$ et $-\frac{2}{3}(-2)^0 + \frac{8}{3} = 2$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$w_k = -\frac{2}{3}(-2)^k + \frac{8}{3}$ (hypothèse de récurrence).

Or $w_{k+1} = x_{2(k+1)+1} = x_{2k+3} = x_{2k+2+1}$.

Donc $w_{k+1} = 4 - 2y_{2k+2} = 4 - 2y_{2k+1+1}$.

Ainsi $w_{k+1} = 4 - 2(x_{2k+1} - 2) = 8 - 2x_{2k+1}$.

On en déduit que $w_{k+1} = 8 - 2w_k$ d'où

$w_{k+1} = 8 - 2\left(-\frac{2}{3}(-2)^k + \frac{8}{3}\right) = -\frac{2}{3}(-2)^{k+1} + \frac{8}{3}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n,

$$w_n = -\frac{2}{3}(-2)^n + \frac{8}{3}.$$

d) • Pour tout entier naturel n, $M_{2n}(x_{2n} ; y_{2n})$.

Or $x_{2n+1} = 4 - 2y_{2n}$ donc $y_{2n} = 2 - \frac{x_{2n+1}}{2}$.

Ainsi $M_{2n}\left(v_n ; 2 - \frac{w_n}{2}\right)$, c'est-à-dire

$M_{2n}\left(\frac{1}{3}(-2)^n + \frac{8}{3} ; 2 + \frac{1}{3}(-2)^n - \frac{4}{3}\right)$ soit

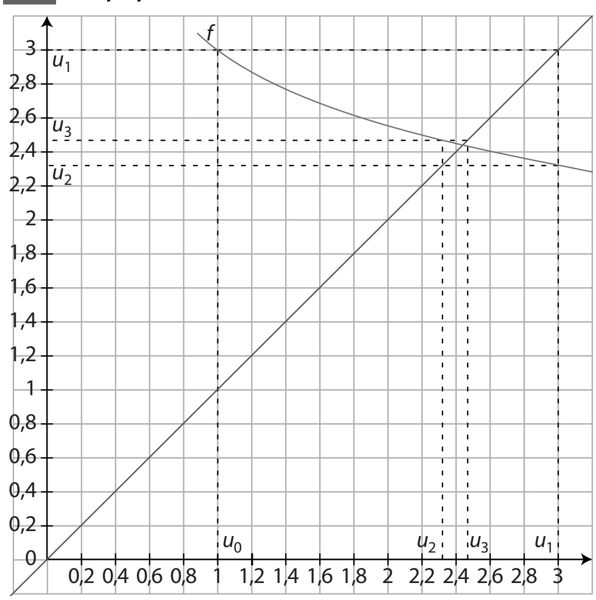
$M_{2n}\left(\frac{1}{3}(-2)^n + \frac{8}{3} ; \frac{1}{3}(-2)^n + \frac{2}{3}\right)$.

• Pour tout entier naturel n, $M_{2n+1}(x_{2n+1} ; y_{2n+1})$.

Or $y_{2n+1} = x_{2n} - 2$. Ainsi $M_{2n+1}(w_n ; v_n - 2)$.

soit $M_{2n+1}\left(-\frac{2}{3}(-2)^n + \frac{8}{3} ; \frac{1}{3}(-2)^n + \frac{2}{3}\right)$.

119 **1. a) b)**



c) Il semble que la suite (u_{2n}) soit croissante et que la suite (u_{2n+1}) soit décroissante.

2. a) $f(x) = x$ équivaut à $2 + \frac{1}{x} = x$, soit $2x + 1 = x^2$ puisque $x \neq 0$.

Ainsi $f(x) = x$ équivaut à $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Ce trinôme admet comme discriminant 8 et admet donc deux racines distinctes qui sont $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

L'équation $f(x) = x$ admet donc une unique solution sur $]0 ; +\infty[$ qui est $1 + \sqrt{2}$.

b) Pour tout réel $x > 0$,

$g(x) = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} = 2 + \frac{x}{2x+1} = \frac{5x+2}{2x+1}$.

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$.

Ainsi la fonction g est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

On remarque que pour tout entier naturel n, $u_{2n+2} = g(u_{2n})$.

c) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $0 \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_2 = g(u_0) = \frac{7}{3}$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$0 \leqslant u_{2k} \leqslant u_{2k+2}$ (hypothèse de récurrence).

Donc $g(0) \leqslant g(u_{2k}) \leqslant g(u_{2k+2})$ car g est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Ainsi, comme $g(0) = 2$, $0 \leqslant u_{2k+2} \leqslant u_{2k+4}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$.

Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_{2n} \leqslant 1 + \sqrt{2}$ ».

• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \leqslant 1 + \sqrt{2}$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$u_{2k} \leqslant 1 + \sqrt{2}$ (hypothèse de récurrence).

Donc $g(u_{2k}) \leqslant g(1 + \sqrt{2})$ car g est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Ainsi, comme $g(1 + \sqrt{2}) = f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$, $u_{2k+2} \leqslant 1 + \sqrt{2}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_{2n} \leqslant 1 + \sqrt{2}$.

d) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3}$ ».

• **Initialisation** :

Pour $n = 0$, $u_1 = 3$ et $u_3 = g(u_1) = \frac{17}{7}$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$0 \leqslant u_{2k+1} \leqslant u_{2k+3}$ (hypothèse de récurrence).
Donc $g(0) \leqslant g(u_{2k+1}) \leqslant g(u_{2k+3})$ car g est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Ainsi, comme $g(0) = 2$, $0 \leqslant u_{2k+3} \leqslant u_{2k+5}$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3}$.
Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_{2n+1} \geqslant 1+\sqrt{2}$ ».
• **Initialisation** : Pour $n = 1$, $u_1 = 3 \geqslant 1+\sqrt{2}$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$u_{2k+1} \geqslant 1+\sqrt{2}$ (hypothèse de récurrence).
Donc $g(u_{2k+1}) \geqslant g(1+\sqrt{2})$ car g est croissante sur $]0\,;+\infty[$.
Ainsi, $u_{2k+3} \geqslant 1+\sqrt{2}$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_{2n+1} \geqslant 1+\sqrt{2}$.

120 **1.** $u_1 = 1$

$u_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$u_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

$u_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{25}{12}$

$u_5 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \frac{137}{60}$

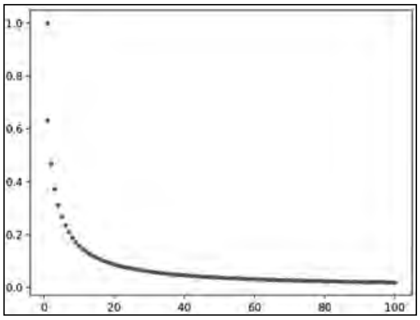
2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} > 0.$$
Ainsi la suite (u_n) est croissante.
3. a) Cadre rouge : 2,n+1
Cadre vert : u+1/i
b) L(10**8) renvoie 18.997896413852555.
L(1+10**8) renvoie 18.997896423852556.
c) On peut conjecturer que la suite se stabilise à 19.
4. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$ ».
• **Initialisation** : Pour $n = 1$, $u_2 - u_1 = \frac{1}{2}$.
La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{2k} - u_k \geqslant \frac{1}{2}$ (hypothèse de récurrence).
$u_{2k+2} - u_{k+1} = u_{2k} - u_k + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$.
Ainsi, $u_{2k+2} - u_{k+1} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$.
Or $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$ donc $u_{2k+2} - u_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
b) Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_{2^n} \geqslant 1+\frac{n}{2}$ ».
• **Initialisation** : Pour $n = 0$, $u_{2^0} = u_1 = \frac{1}{2} \geqslant 1+\frac{0}{2}$.
La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$u_{2^k} \geqslant 1+\frac{k}{2}$ (hypothèse de récurrence).
$u_{2^{k+1}} = u_{2\times 2^k}$.
Ainsi, d'après la question précédente, $u_{2^{k+1}} \geqslant u_{2^k} + \frac{1}{2}$.
On en déduit que $u_{2^{k+1}} \geq 1+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}$,
soit $u_{2^{k+1}} \geqslant 1+\frac{k+1}{2}$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_{2^n} \geqslant 1+\frac{n}{2}$.
c) Pour un réel A positif, il existe un entier naturel k tel que $1+\frac{k}{2} \geqslant \mathrm{A}$. Il suffit pour cela de prendre un entier k tel que $k \geqslant 2\mathrm{A} - 1$.
Ainsi, comme $u_{2^k} \geqslant 1+\frac{k}{2}$, $u_{2^k} \geqslant \mathrm{A}$.
L'entier $p = 2^k$ convient.
d) La conjecture est fausse. La suite ne se stabilise pas.

121 **1. a)** La fonction g est dérivable et pour tout réel x, $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
$g'(x) \geqslant 0$ équivaut à $\mathrm{e}^x \geqslant 1$ soit $x \geqslant 0$.
Ainsi la fonction g est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
b) La fonction g admet donc $g(0) = 0$ comme minimum global.
Donc pour tout réel x, $g(x) = 0$ soit $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.
De plus, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution qui est 0. Ainsi $g(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
On en déduit que $\mathrm{e}^x = x+1$ si, et seulement si, $x = 0$.
c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_n > 0$ ».

• **Initialisation** : Pour $n=1$, $u_1=1>0$.
La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k>0$ (hypothèse de récurrence).
$u_{k+1}=f(u_k)$.
Comme $u_k>0$, $f(u_k)=1-\mathrm{e}^{-u_k}$.
$-u_k<0$ donc $\mathrm{e}^{-u_k}<1$.
Ainsi $-\mathrm{e}^{-u_k}>-1$ et $f(u_k)>0$.
On en déduit que $u_{k+1}>0$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n>0$.

2. a) Cadre rouge : 1-exp(-u)

b)



c) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante.

d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$u_{n+1}=f(u_n)=1-\mathrm{e}^{-u_n}$.
Or d'après la question **1. b)**, $\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant -u_n+1$.
Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $1-\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant u_n$.
Ainsi pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
On en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

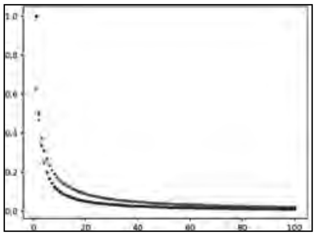
3. a) D'après la question **1. b)**, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant u_n+1$ soit $\mathrm{e}^{-u_n} \leqslant \dfrac{1}{1+u_n}$.
On en déduit que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $-\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant -\dfrac{1}{1+u_n}$.
Ainsi pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$1-\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 1-\dfrac{1}{1+u_n}$ soit $u_{n+1} \geqslant \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n>0$ donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant \dfrac{1+u_n}{u_n}$ soit $\dfrac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1+\dfrac{1}{u_n}$.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ ».
• **Initialisation** : Pour $n=1$, $u_1=1 \geqslant \dfrac{1}{1}$.
La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k \geqslant \dfrac{1}{k}$ (hypothèse de récurrence).
Donc $\dfrac{1}{u_k} \leqslant k$.
Or, d'après la question précédente, $\dfrac{1}{u_{k+1}} \leqslant 1+\dfrac{1}{u_k}$
donc $\dfrac{1}{u_{k+1}} \leqslant 1+k$.
Ainsi $u_{k+1} \geqslant \dfrac{1}{k+1}$.
La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

d)

```
from pylab import *
from math import *

def U(n):
    u=1
    plot(1,u,'r.')
    for i in range(1,n+1):
        u=1-exp(-u)
        plot(i,u,'r.')
        plot(i,1/i,'b.')
    show()
```



On remarque qu'on a bien pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

122 **a)** Si pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n=n$ alors $u_1^3+u_2^3+\ldots+u_n^3=1^3+2^3+\ldots+n^3$ et $(u_1+u_2+\ldots+u_n)^2=(1+2+\ldots+n)^2=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
Démontrons donc que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété :
« $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ».
• **Initialisation** : Pour $n=1$, $1^3=1$ et $\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2=1$.
La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que
$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$
(hypothèse de récurrence). Or :
$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3$.
Donc $1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3$.

Ainsi :

$$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^2(k+1)}{4}.$$

On en déduit que :

$$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}$$

soit $1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

Finalement,

$$1^3+2^3+\ldots+(k+1)^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

b) La réciproque de cette implication est :
si pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$u_1^3+u_2^3+\ldots+u_n^3=(u_1+u_2+\ldots+u_n)^2$,
alors pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n=n$.
On démontre ce résultat par récurrence forte.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(n)$ est la propriété : « $u_n=n$ ».

• **Initialisation** : Pour $n=1$, $u_1^3=u_1^2$.
Comme $u_1 \neq 0$, $u_1=1$. La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, les propriétés $P(1)$, $P(2)$, …, $P(k)$ sont vraies (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire que :
$u_1=1$, $u_2=2$, …, $u_k=k$. Or
$u_1^3+u_2^3+\ldots+u_k^3+u_{k+1}^3=(u_1+u_2+\ldots+u_k+u_{k+1})^2$
donc :
$1^3+2^3+\ldots+k^3+u_{k+1}^3=(1+2+\ldots+k+u_{k+1})^2$.

Ainsi $\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+u_{k+1}^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}+u_{k+1}\right)^2$.

On en déduit que :
$u_{k+1}^3=k(k+1)u_{k+1}+u_{k+1}^2$.
Comme $u_{k+1} \neq 0$, $u_{k+1}^2=k(k+1)+u_{k+1}$
Donc $u_{k+1}^2-u_{k+1}-k(k+1)=0$
Le trinôme $x^2-x-k(k+1)=0$ admet comme discriminant :
$1+4k(k+1)=4k^2+4k+1=(2k+1)^2>0$
et admet donc deux racines distinctes :

$$x_1=\frac{1-(2k+1)}{2}=-k \text{ et } x_2=\frac{1+(2k+1)}{2}=k+1.$$

Or, $u_{k+1}>0$ donc $u_{k+1}=k+1$.
La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n=n$.

123 **1. a)** La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}\times x-e^{-x}\times 1}{x^2}=\frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2}.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $-x-1$ qui est négatif sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que la fonction est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_n>0$ ».

• **Initialisation** : Pour $n=0$, $u_0=1>0$.
La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k>0$ (hypothèse de récurrence).

$$u_{k+1}=f(u_k)=\frac{e^{-u_k}}{u_k}.$$

Comme $u_k>0$, on en déduit que $u_{k+1}>0$.
La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

2. a) $u_0=1$
$u_1 \approx 0{,}37$
$u_2 \approx 1{,}88$
$u_3 \approx 0{,}08$
Ainsi $u_2>u_0$ et $u_3<u_1$.

b) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété : « $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$ ».

• **Initialisation** :
D'après la question précédente, $u_0<u_2$.
La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{2k} \geqslant u_{2k+2}$ (hypothèse de récurrence).
Or f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ et les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs donc :
$f(u_{2k}) \leqslant f(u_{2k+2})$.
Ainsi $u_{2k+1} \leqslant u_{2k+3}$.
En appliquant f une seconde fois, on a :
$f(u_{2k+1}) \geqslant f(u_{2k+3})$.
C'est-à-dire $u_{2k+2} \geqslant u_{2k+4}$.
La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_{2n} \leqslant u_{2n+2}$.
On en déduit que la suite (u_{2n}) est croissante.
Comme pour tout entier naturel n, $u_{2n} \geqslant u_{2n+2}$, on a :
pour tout entier naturel n, $f(u_{2n}) \leqslant f(u_{2n+2})$, soit pour tout entier naturel n, $u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3}$.
On en déduit que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

124 **a)** L'équation $x_0 + x_1 = n$ admet comme solutions les couples : $(0\,;n),(1\,;n-1),\ldots,(n\,;0)$, il y en a donc $n+1$.

b) Si $x_2 = 0$, l'équation devient $x_0 + x_1 = n$ et il y a $n+1$ solutions : les triplets de la forme $(x_0\,;x_1\,;0)$.

Si $x_2 = 1$, l'équation devient $x_0 + x_1 = n-1$ et il y a n solutions : les triplets de la forme $(x_0\,;x_1\,;1)$.

Et ainsi de suite.

Si $x_2 = n$, l'équation devient $x_0 + x_1 = 0$ et il y a 1 solution : le triplet $(0\,;0\,;n)$.

Au total, il y a $1+2+\ldots+(n+1)$ solutions, soit $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

125 **a)** Dans le cas où $u_0 = -\dfrac{3}{5}$, la suite (u_n) n'est pas définie. En effet, $u_4 = 0$. Ainsi u_5 n'est pas défini.

b) Dans le cas où $u_0 = 2$, démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant 2.$$

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1+\dfrac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

f est dérivable $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, donc f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ ».

• **Initialisation** : $u_0 = 2$ donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_k \leqslant 2$ (hypothèse de récurrence).

f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc :

$f(1) \geqslant f(u_k) \geqslant f(2)$, soit $2 \geqslant u_{k+1} \geqslant 1{,}5 \geqslant 1$.

On en déduit que $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Ainsi les termes de la suite (u_n) sont non nuls et la suite est définie.

126 On démontre par récurrence forte.

Pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété : « $f(n) = n$ ».

• **Initialisation** : $n = 0$,

$f(2\times 0) = f(2)\times f(0) = 2\times f(0)$, donc $f(0) = 2\times f(0)$.

Ainsi $f(0) = 0$.

La propriété $\mathrm{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, les propriétés $\mathrm{P}(0)$, $\mathrm{P}(1)$, …, $\mathrm{P}(k)$ sont vraies (hypothèse de récurrence).

• Si $k+1$ est pair, alors il existe un entier naturel q tel que $k+1 = 2q$.

Ainsi $f(k+1) = f(2q) = f(2)\times f(q)$.

Or $f(2) = 2$ et $q = \dfrac{k+1}{2} < k$ donc la propriété $\mathrm{P}(q)$ est vraie d'où $f(q) = q$.

Ainsi, $f(k+1) = 2q = k+1$.

• Si $k+1$ est impair, alors il existe un entier naturel q tel que $k+1 = 2q+1$.

Donc $2q < k+1 < 2q+2$.

Comme f est strictement croissante,

$f(2q) < f(k+1) < f(2q+2)$.

D'une part, $k = 2q$ donc $\mathrm{P}(2q)$ est vraie.

D'où $f(2q) = 2q$.

D'autre part,

$f(2q+2) = f(2(q+1)) = f(2)f(q+1) = 2f(q+1)$.

Comme $q+1 < 2q$, $\mathrm{P}(q+1)$ est vraie donc $f(q+1) = q+1$.

Ainsi $f(2q+2) = 2(q+1) = 2q+2$.

On en déduit que $2q < f(k+1) < 2q+2$.

Comme f est à valeurs entières,

$f(k+1) = 2q+1 = k+1$.

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $f(n) = n$.

127 Résultat préliminaire : pour tour réel $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

En effet, si $x > 0$ alors $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ équivaut à $x^2 + 1 \geqslant 2x$ soit $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$ c'est-à-dire $(x-1)^2 \geqslant 0$.

Ensuite, on démontre le résultat par récurrence.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(n)$ est la propriété :

« $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}\right) \geqslant n^2$ ».

• **Initialisation** : $u_1 \times \dfrac{1}{u_1} = 1 \geqslant 1^2$.

La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $(u_1 + u_2 + \ldots + u_k)\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_k}\right) \geqslant k^2$ (hypothèse de récurrence).

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_k + u_{k+1})\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_k} + \frac{1}{u_{k+1}}\right)$$

$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_k)\times\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_k}\right)$$

$$+ u_{k+1}\times\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_k}\right)$$

$$+ \frac{1}{u_{k+1}}\times(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) + 1$$

Or : • $(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) \times \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_k}\right) \geqslant k^2$

• pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $\frac{u_{k+1}}{u_i} + \frac{u_i}{u_{k+1}} = \frac{u_{k+1}}{u_i} + \frac{1}{\frac{u_{k+1}}{u_i}} \geqslant 2$

d'après le résultat préliminaire.

On en déduit que :

$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{k+1})\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_{k+1}}\right)$

$\geqslant k^2 + 2k + 1.$

C'est-à-dire :

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{k+1})\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_{k+1}}\right) \geqslant (k+1)^2.$$

La propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion** : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \ldots + \frac{1}{u_n}\right) \geqslant n^2.$$

2 Combinatoire et dénombrement

Questions-Tests

1 **a)** (2) **b)** (2)

2 **a)** (3) **b)** (2)

3 **a)** (1) **b)** (3)

4 **a)** (1) **b)** (3)

5 (3)

6 **a)** (1) **b)** (3) **c)** (2)

Découvrir

1 Permutations d'un ensemble fini

1 MLG, MGL, LMG, LGM, GML, GLM

2 **a)** Trois choix possibles pour la place 1.
b) Dans chaque cas, il y a deux choix possibles pour la place 2. Il y a donc $3 \times 2 = 6$ façons de remplir les places 1 et 2.
c) Quand les places 1 et 2 ont été remplies, il n'y a plus qu'une possibilité pour remplir la place 3.
d) Il y a donc 6 dispositions différentes.

3 Le nombre de dispositions différentes est alors $4 \times 3 \times 2 = 24$.

2 Combinaisons d'éléments d'un ensemble fini

1 **a)** Il y a cinq choix possibles pour le premier film.
b) Pour chacun de ces choix, il y a quatre choix possibles pour le deuxième film.
c) Il reste ensuite trois choix possibles pour le dernier film.
d) Le nombre total de façons de choisir ces films est donc $5 \times 4 \times 3 = 60$.

2 **a)** $(1 ; 3 ; 5)$ $(1 ; 5 ; 3)$ $(3 ; 1 ; 5)$ $(3 ; 5 ; 1)$ $(5 ; 1 ; 3)$ $(5 ; 3 ; 1)$: il y a donc six choix avec les films 1, 3 et 5.
b) Six choix donnent le même ensemble de films.
c) Le nombre de façons de choisir ces films est donc $\frac{60}{6} = 10$.

Savoir-faire

3 L'ordre est important, donc il s'agit de dénombrer les 5-uplets d'un ensemble à 10 éléments.

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240$$

Donc il y a 30 240 rangements différents.

4 Dans une playlist, l'ordre des chansons est important, donc il s'agit de dénombrer les 10-uplets d'un ensemble à 75 éléments.

$$75 \times 74 \times 73 \times \ldots \times 66 \approx 3 \times 10^{18}$$

Donc il y a environ 3×10^{18} listes différentes.

5 Il s'agit d'ordonner les cinq devoirs, c'est-à-dire de dénombrer les permutations d'un ensemble à 5 éléments. Le nombre de façons de s'organiser est donc

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

6 Il s'agit d'ordonner les 14 lettres de ce mot, c'est-à-dire de dénombrer les permutations d'un ensemble à 14 éléments.
Le nombre de façons d'organiser ces lettres est donc

$$14! = 14 \times 13 \times 12 \times ... \times 1 = 87178291200$$

8 **a)** On tire les boules simultanément, donc l'ordre n'intervient pas. On modélise donc un tirage de 6 boules par une combinaison de 6 boules parmi les 12 que contient l'urne.

Le nombre de tirages différents est donc $\binom{12}{6} = 924.$

b) Le nombre de tirages de 3 boules parmi les 4 boules rouges est $\binom{4}{3} = 4.$

Pour chacun de ces tirages, on complète avec 3 boules parmi les 8 boules qui ne sont pas rouges.

Le nombre de possibilités pour cela est $\binom{8}{3} = 56.$

Le nombre total de tirages de ce type est donc :

$$\binom{4}{3} \times \binom{8}{3} = 4 \times 56 = 224.$$

c) Le contraire de « au moins une boule rouge » est « aucune boule rouge ». Le nombre de tirages ne comportant aucune boule rouge est $\binom{8}{6} = 28.$

Le nombre de tirages en comportant au moins une est donc $924 - 28 = 896.$

9 **a)** Raphaël choisit les livres simultanément, donc l'ordre n'intervient pas. On modélise donc le choix de 4 livres par une combinaison de 4 livres parmi les 10 disponibles.

Le nombre de choix possibles est donc $\binom{10}{4} = 210.$

b) Le nombre de choix de 2 livres parmi les 4 romans de fantasy est $\binom{4}{2} = 6.$ Pour chacun de ces choix, on complète avec 2 livres parmi les 6 qui ne sont pas des romans de fantasy.

Le nombre de possibilités pour cela est $\binom{6}{2} = 15.$

Le nombre total de choix de ce type est donc :

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{2} = 6 \times 15 = 90.$$

c) Le contraire de « au moins une biographie » est « aucune briographie ». Le nombre de choix ne comportant aucune biographie est $\binom{7}{4} = 35.$

Le nombre de tirages en comportant au moins une est donc :

$$210 - 35 = 175.$$

12 **a)** D'après la relation de Pascal,

$$\binom{11}{2} = \binom{10}{1} + \binom{10}{2} = 10 + 45 = 55.$$

b) Par symétrie des nombres de combinaisons,

$$\binom{11}{9} = \binom{11}{11-9} = \binom{11}{2} = 55.$$

13 Ces lignes utilisent la symétrie des nombres de combinaisons et réduisent ainsi le nombre d'itérations dans la boucle.

16

```python
def Parties(L):
    P=[0,0,0]
    n=len(L)
    for i in range(0,n-2):
        P[0]=L[i]
        for k in range(i+1,n-1):
            P[1]=L[k]
            for j in range(k+1,n):
                P[2]=L[j]
                print(P)
```

17 On peut par exemple obtenir

```
>>> L=[1,2,3,4,5]
>>> Parties(L)
[1, 2, 3]
[1, 2, 4]
[1, 2, 5]
[1, 3, 4]
[1, 3, 5]
[1, 4, 5]
[2, 3, 4]
[2, 3, 5]
[2, 4, 5]
[3, 4, 5]
```

Acquérir des automatismes

18 Des 4-uplets d'éléments distincts de E sont donnés aux numéros **(2)**, **(6)** et **(8).**

19 **a)** Le plus petit est 12, le plus grand est 54.

b) Le plus petit est 123, le plus grand est 543.

20 Le nombre de couples d'éléments distincts de E est $12 \times 11 = 132.$

21 **a)** On assimile un train à un couple d'éléments distincts d'un ensemble à 5 éléments.

Il y a donc $5 \times 4 = 20.$ possibilités.

b) Il faut alors dénombrer les triplets d'éléments distincts d'un ensemble à 5 éléments. Il y en a $5 \times 4 \times 3 = 30,$ ce qui est bien trois fois plus que le nombre de couples. Noam a donc raison.

22 **a)** On assimile un championnat à un 4-uplet d'éléments distincts d'un ensemble à 48 éléments. Le nombre de championnats possible est donc :

$$48 \times 47 \times 46 \times 45 = 4669920.$$

b) Il s'agit alors de dénombrer les 8-uplets.
Le nombre de tels championnats est donc :

$$48 \times 47 \times \ldots \times 41 \approx 1{,}52 \times 10^{13}.$$

23 **a)** On assimile un mot de 3 lettres à un triplet d'éléments distincts d'un ensemble à 7 éléments.
Le nombre de tels mots est donc :

$$7 \times 6 \times 5 = 210.$$

b) On assimile un mot de 5 lettres à un 5-uplet d'éléments distincts d'un ensemble à 7 éléments.
Le nombre de tels mots est donc :

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520.$$

24 **a)** Il s'agit de dénombrer les couples d'éléments distincts d'un ensemble à 18 éléments.
Le nombre de tels algorithmes est donc :

$$18 \times 17 = 306.$$

b) Il s'agit maintenant de dénombrer les 4-uplets d'éléments distincts. Le nombre de tels algorithmes est donc :

$$18 \times 17 \times 16 \times 15 = 73440.$$

25 **a)** Il s'agit de dénombrer les 5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 7 éléments.
Le nombre de tels codes est donc :

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520.$$

b) Un code qui se termine par 0 commence par 4 autres chiffres distincts choisis parmi 6.
Le nombre de tels codes est donc :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$$

26 **a)** Il s'agit de dénombrer les triplets d'éléments distincts d'un ensemble à 5 éléments.
Le nombre de tels mots est donc :

$$5 \times 4 \times 3 = 60.$$

b) Puisque la lettre M est utilisée en deuxième position, le nombre de tels mots est :

$$4 \times 1 \times 3 = 12.$$

c) Le contraire de « le mot contient la lettre S » est « le mot ne contient pas la lettre S ».
Le nombre de mots qui ne contiennent pas la lettre S est le nombre de triplets d'éléments distincts d'un ensemble à 4 éléments, qui est égal à $4 \times 3 \times 2 = 24$.
Le nombre de mots qui contiennent la lettre S est donc $60 - 24 = 36$.

27 **a)** Il s'agit de dénombrer les couples d'éléments distincts d'un ensemble à 4 éléments.
Le nombre de telles séquences est donc :

$$4 \times 3 = 12.$$

b) AC, AG, AT, CA, CG, CT,
GA, GC, GT, TA, TC, TG
c) Trois nucléotides :
ACG, ACT, AGC, AGT, ATC, ATG,
CAG, CAT, CGA, CGT, CTA, CTG
GAC, GAT, GCA, GCT, GTA, GTC
TAC, TAG, TCA, TCG, TGA, TGC
Quatre nucléotides :
ACGT, ACTG, AGCT, AGTC, ATCG, ATGC,
CAGT, CATG, CGAT, CGTA, CTAG, CTGA
GACT, GATC, GCAT, GCTA, GTAC, GTCA
TACG, TAGC, TCAG, TCGA, TGAC, TGCA

28 **a)** Plus petit : 123789. Plus grand : 987321.
b) Le nombre total de permutations de E est $6! = 720$.

29 **a)** Il s'agit de déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments. Ce nombre est $3! = 6$.
b) Le seul drapeau existant correspondant à l'une de ces permutations est celui de la France.

30 **a)** Il s'agit de déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 4 éléments. Ce nombre est $4! = 24$.
b) Après avoir tiré le jeton 50 en premier, le nombre de tirages possibles est le nombre de permutations d'un ensemble à 3 éléments. Ce nombre est $3! = 6$.

31 **a)** Le nombre d'anagrammes du mot DIJON est le nombre de permutations d'un ensemble à 5 éléments. Ce nombre est $5! = 120$.
b) Le nombre d'anagrammes qui commencent par la lettre D est le nombre de permutations d'un ensemble à 4 éléments (les 4 autres lettres). Ce nombre est $4! = 24$.
c) Il y a trois possibilités pour commencer par une consonne : D, J ou N. Dans chacun de ces cas, il y 24 possibilités pour les 4 autres lettres. Le nombre total de telles anagrammes est donc $3 \times 24 = 72$.

32 **a)** Il s'agit de déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 8 éléments.
Ce nombre est $8! = 40320$.
b) Le premier symbole étant fixé, le nombre de possibilité pour les 7 autres symboles est $7! = 5040$.
c) Le premier symbole et le dernier symbole étant fixés, le nombre de possibilités pour les 6 autres symboles est $6! = 720$.

33 **a)** Il s'agit de déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à 12 éléments.

Ce nombre est $12! = 479\,001\,600$.

b) Le nombre de façons de ranger, tout d'abord, les copies des 7 filles, est $7!$. Pour chacune de ces façons de les ranger, il y a $5!$ façons de ranger les copies des 5 garçons. Le nombre total de telles façons de ranger les 12 copies est donc $7! \times 5! = 604\,800$.

c) Si on commence par les copies des garçons, le nombre de façons de ranger les 12 copies est $5! \times 7!$, ce qui donne le même résultat qu'à la question précédente.

34 La combinaison de 2 éléments est l'ensemble numéroté **(2)**.

35 **a)** Oui : $8 = 3 + 5$.

b) Non : aucune somme de 2 chiffres distincts ne vaut 18.

c) Oui : $13 = 6 + 7$.

d) Oui : $1 = 0 + 1$.

e) Non : aucune somme de 2 chiffres distincts ne vaut 0.

f) Oui : $4 = 1 + 3$.

36 **a)** $\binom{2}{0} = 1$ car il a un seul chemin avec aucun A.

b) $\binom{2}{1} = 2$ car il a deux chemins avec exactement un A.

c) $\binom{2}{2} = 1$ car il a un seul chemin avec deux A.

37 **a)** Les cinq livres doivent être différents et l'ordre n'intervient pas, donc il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 8.

Ce nombre est $\binom{8}{5} = 56$.

b) Il s'agit alors de déterminer le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 7.

Ce nombre est $\binom{7}{5} = 21$.

38 **a)** Lorenz doit choisir des cartes différentes et l'ordre n'intervient pas, donc il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 10.

Ce nombre est $\binom{10}{5} = 252$.

b) Il s'agit alors de déterminer le nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 10.

Ce nombre est $\binom{10}{4} = 210$.

39 **a)** La ligne 4 teste si le reste de la division euclidienne du terme de la liste est 0, c'est-à-dire si ce terme est pair. Si c'est le cas, la ligne ajoute 1 au nombre m d'entiers pairs rencontrés jusque-là.

b) Il s'agit de dénombrer les façons de choisir 2 éléments parmi 20, c'est-à-dire de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 20.

Ce nombre est $\binom{20}{2} = 190$.

b) Il s'agit alors de déterminer le nombre de combinaisons de 10 éléments parmi 20.

Ce nombre est $\binom{20}{10} = 184\,756$.

40 **1. a)** On effectue 6 lancers, donc il y aurait $2^6 = 64$ chemins dans l'arbre.

b) Il y aurait un seul chemin contenant six fois Pile et un seul chemin contenant six fois Face.

c) $k = 1$, une fois Pile : $\binom{6}{1} = 6$.

$k = 2$, deux fois Pile : $\binom{6}{2} = 15$.

$k = 3$, trois fois Pile : $\binom{6}{3} = 20$.

$k = 4$, quatre fois Pile : $\binom{6}{4} = 15$.

$k = 5$, cinq fois Pile : $\binom{6}{5} = 6$.

2. a) Obtenir Pile au 4^{e} lancer permet d'obtenir n'importe quel côté pour les 5 autres lancers. Le nombre de chemins de ce type est donc $2^5 = 32$.

b) Obtenir Pile au 2^{e} lancer et Face au 5^{e} lancer permet d'obtenir n'importe quel côté pour les 4 autres lancers. Le nombre de chemins de ce type est donc $2^4 = 16$.

41 **1. a)** On assimile un comité à une combinaison de trois éléments parmi 36. Le nombre de tels comités est donc $\binom{36}{3} = 7\,140$.

b) Pour qu'il y ait davantage de filles que de garçons, il faut qu'il y ait trois filles et pas de garçons ou bien deux filles et un garçon.

Le nombre de comités constitués de trois filles est $\binom{20}{3} = 1140$. Le nombre de comités constitué de deux filles et un garçon est $\binom{20}{2} \times \binom{16}{1} = 190 \times 16$ $= 3\,040$.Le nombre total de comités avec davantage de filles que de garçons est donc $1140 + 3\,040 = 4\,180$.

2. a) Dans ce cas, l'ordre est important, mais il ne peut pas y avoir de répétitions (une personne ne peut pas occuper deux postes). Le nombre de tels comités est donc $36 \times 35 \times 34 = 42\,840$.

b) Le nombre de comités de trois filles est alors $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$.

Pour les comités de deux filles et un garçon, il y d'abord 3 choix pour le poste occupé par le garçon. Pour chacun de ces choix, on a le choix entre 20 garçons, ce qui fait 60 possibilités.

Pour chacune de ces possibilités, le nombre de façons de choisir les filles est $20 \times 19 = 380$, ce qui donne en tout $60 \times 380 = 22\,800$ comités de ce type.

Le nombre total de comités avec davantage de filles que de garçons est donc $6\,840 + 22\,800 = 29\,640$.

42 **a)** Un accord de deux notes distinctes est une combinaison de deux éléments parmi sept.

Le nombre de tels accords est donc $\binom{7}{2} = 21$.

Un accord de trois notes distinctes est une combinaison de trois éléments parmi sept.

Le nombre de tels accords est donc $\binom{7}{3} = 35$.

b) Si un accord de trois notes distinctes contient la note Do, il faut choisir les deux autres notes parmi les six restantes. Le nombre de tels accords est donc $\binom{6}{2} = 15$.

43 **a)** Un tirage de sept dominos est une combinaison de sept éléments parmi 28.

Le nombre de tels tirages est donc :

$$\binom{28}{7} = 1\,184\,040.$$

b) Pour deux joueurs, on tire 14 dominos.

Le nombre de tels tirages est donc :

$$\binom{28}{14} = 40\,116\,600.$$

44 **a)** Un raccourci de deux touches est une combinaison de deux éléments parmi 29.

Le nombre de tels raccourcis est $\binom{29}{2} = 406$.

b) Pour un raccourci de trois touches qui contient la touche Ctrl, il faut choisir les deux autres touches parmi les 28 restantes.

Le nombre de tels raccourcis est $\binom{28}{2} = 378$.

c) Un raccourci de trois touches est une combinaison de trois éléments parmi 29.

Le nombre de tels raccourcis est $\binom{29}{3} = 3\,654$.

45 **1.** Une main est une combinaison de cinq cartes parmi 52. Le nombre total de mains est donc $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$.

2. a) Une couleur en cœur est une combinaison de cinq cartes parmi les 13 cartes de cœur. Le nombre de mains de ce type est $\binom{13}{5} = 1287$.

b) Il y a quatre familles donc le nombre total de « couleurs » est $1287 \times 4 = 5\,148$.

3. a) Pour un carré de 10, la cinquième carte peut être n'importe laquelle des 48 cartes restantes.

Il y a donc 48 mains de ce type.

b) Il y a 13 possibilités pour la carte qui sera répétée quatre fois dans le carré, et dans chacun de ces cas 48 possibilités pour la cinquième carte. Le nombre total de carrés est donc $13 \times 48 = 624$.

46 **a)** Le nombre de tirages possible est $\binom{12}{3} = 220$.

b) Un tirage constitué de trois boules de couleurs différentes est forcément constitué d'une boule de chaque couleur. Le nombre de tels tirages est donc :

$$\binom{6}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{1} = 6 \times 2 \times 4 = 48.$$

c) Un tirage constitué de trois boules de la même couleur est constitué de trois boules noires ou de trois boules rouges.

Le nombre de tels tirages est donc $\binom{6}{3} + \binom{4}{3} = 24$.

47 **1.** Le nombre de choix possibles est $\binom{42}{10} = 1\,471\,442\,973$.

2. a) Le nombre d'équipes qui ne comportent que des filles est $\binom{22}{10} = 646\,646$.

b) Le nombre d'équipes qui comportent un seul garçon est $\binom{22}{9} \times \binom{20}{1} = 9\,948\,400$.

c) Le nombre d'équipes qui comportent autant de garçons que de filles est

$$\binom{22}{5} \times \binom{20}{5} = 408\,282\,336.$$

d) Le seul cas où il y a deux garçons de plus que de filles est six garçons et quatre filles. Le nombre d'équipes de ce type est

$$\binom{22}{4} \times \binom{20}{6} = 283\,529\,400.$$

48 **a)** On note n le nombre de semaines. Le nombre de chemins avec exactement un G est $\binom{n}{1}$, donc $\binom{n}{1} = 12$, c'est-à-dire $n = 12$.

b) Il y a exactement autant de F que de G quand il y a six G. Le nombre de tels chemins est donc $\binom{12}{6} = 924$.

c) Il y a strictement plus de filles que de garçons dans les cas suivants :

- 5 garçons : $\binom{12}{5} = 792$;
- 4 garçons : $\binom{12}{4} = 495$;
- 3 garçons : $\binom{12}{3} = 220$;
- 2 garçons : $\binom{12}{2} = 66$;
- 1 garçon : $\binom{12}{1} = 12$;
- pas de garçon : $\binom{12}{0} = 1$

Le nombre total de tels chemins est donc 1 586.

49 **a)** $\binom{150}{0} = 1$ **b)** $\binom{150}{1} = 150$

c) $\binom{150}{149} = 150$ **d)** $\binom{150}{150} = 1$

50 Par symétrie des nombres de combinaisons,

$$\binom{12}{7} = \binom{12}{12-7} = \binom{12}{5} = 792.$$

51 D'après la relation de Pascal,

$$\binom{11}{4} = \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 120 + 210 = 330.$$

52 **a)** Le deuxième nombre de la ligne n est toujours n, donc $n = 6$

b) Par symétrie, le nombre manquant est 6.

c) D'après la relation de Pascal, la ligne suivante est :

1 7 21 35 35 21 7 1.

53 On utilise la relation de Pascal, en faisant des additions pour la troisième ligne et des soustractions pour la première.

Troisième ligne :

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

Première ligne :

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

54 **1. a)** $1 = 1$

$1 + 1 = 2$

$1 + 2 + 1 = 4$

$1 + 3 + 3 + 1 = 8$

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$

b) Asia a pu remarquer que l'on obtient les puissances successives de 2.

2. a) $\binom{n}{0}$ est le nombre de parties de E à 0 éléments.

$\binom{n}{1}$ est le nombre de parties à 1 élément.

$\binom{n}{2}$ est le nombre de parties à 2 éléments.

$\binom{n}{n}$ est le nombre de parties à n éléments.

b) Le nombre total de parties de E est 2^n.

c) Quel que soit l'entier naturel n, le nombre de parties de E est donc égal d'une part à 2^n et d'autre part à $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$.

Par conséquent, $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$, ce qui prouve la conjecture.

Pour se tester

55 **1.** C **2.** C **3.** A **4.** B **5.** A

56 **1.** A, C **2.** A, B **3.** B, D **4.** A, C **5.** B, C, D

57 **1. Faux.** En effet, le nombre de 7-uplets est $8 \times 7 \times 6 \times \ldots \times 2$ et le nombre de permutations est $8! = 8 \times 7 \times 6 \times \ldots \times 2 \times 1$ et ces deux nombres sont égaux.

2. Faux. En effet, le nombre d'alignements possibles est 10!, qui n'est pas égal à 10.

3. Faux. En effet, $\binom{8}{5} = 56$, donc la propriété n'est pas vraie pour $n = 5$.

4. Vrai. En effet, le nombre de façons de choisir les 5 messages parmi les 20 reçus est $\binom{20}{5} = 15\,504$, qui est bien supérieur à dix-mille.

S'entraîner

58 **1. (1)** $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

(2) $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

(3) On constate bien que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. a) La notation $\binom{n-1}{k}$ n'a pas de sens si k est supérieur à $n-1$.

On doit donc préciser $k \leqslant n-1$.

b) On doit mettre les deux fractions de la première ligne sur le même dénominateur. Pour cela, on multiplie le numérateur et le dénominateur de la première fraction par k, et ceux de la deuxième fraction par $n-k$.

On simplifie ensuite les dénominateurs en notant que $(k-1)! \times k = k!$ et que $(n-1-k)! \times (n-k) = (n-k)!$ et on additionne les numérateurs.

Puis, on simplifie le numérateur :

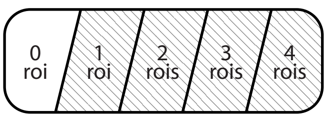
$k(n-1)! + (n-k)(n-1)! = (k+n-k)(n-1)!$

$k(n-1)! + (n-k)(n-1)! = n(n-1)!$

$k(n-1)! + (n-k)(n-1)! = n!$

59 **a)** Cette main est comptée une première fois quand le Roi de pique est la première carte mentionnée par Ambra et le Roi de trèfle une des autres cartes, et une deuxième fois quand la première carte est le Roi de trèfle.

b)



c) Le nombre total de mains possibles est $\binom{32}{5} = 201376$.

28 cartes ne sont pas des rois, donc le nombre de mains sans roi est $\binom{28}{5} = 98280$. Donc le nombre de mains avec au moins un roi est $201376 - 98280 = 103096$.

60 **Parcours 1**

Le nombre total de tirages de deux boules dans l'urne A est $\binom{10}{2} = 45$.

Pour chacun de ces tirages, le nombre de tirages de trois boules dans l'urne B est $\binom{6}{3} = 20$. Donc le nombre total de tirages possibles est $45 \times 20 = 900$.

Pour tirer une boule de chaque couleur de l'urne B, il faut avoir tiré une boule verte et une boule rouge de l'urne A.

Le nombre de tirages d'une boule verte et une boule rouge de l'urne A est $2 \times 5 = 10$.

Après avoir tiré une boule verte et une boule rouge de l'urne A, le nombre de tirages d'une boule de chaque couleur est $1 \times 1 \times 4 = 4$. Le nombre total de tirages qui comportent une boule de chaque couleur est donc $10 \times 4 = 40$.

Parcours 2

a) Le nombre de choix d'un mâle gracilis est $\binom{2}{1} = 2$.

Le nombre de choix d'une femelle pygargus est $\binom{3}{1} = 3$.

b) Il reste à choisir 2 gerbilles, parmi les 5 qui sont des femelles gracilis ou des mâles pygargus.

Le nombre de choix est $\binom{5}{2} = 10$.

c) Le nombre total de choix possibles est donc $2 \times 3 \times 10 = 60$.

61 **1.** Comme les maillots sont indiscernables, on ne tient pas compte de l'ordre. Dans cette situation, on va donc calculer des nombres de combinaisons.

a) $\binom{12}{5} = 792$

b) $\binom{12}{12} = 1$ (il faut prendre tous les maillots).

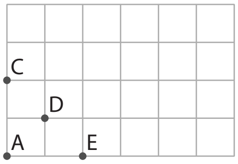
2. Comme les maillots sont numérotés, on tient compte de l'ordre. Dans cette situation, on va donc calculer des nombres de n-uplets.

a) $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040$

b) $12! = 479001600$.

3. Cette affirmation est vraie. Pour un seul maillot, il y a 12 façons de le choisir dans les deux cas. Pour deux maillots, il y a $\binom{12}{2} = 66$ façons pour des maillots non numérotés et $12 \times 11 = 132$, donc le double, pour des maillots numérotés. Ensuite, la différence augmente quand le nombre de maillots augmente.

62 **a)** Les points qui se trouvent à deux unités de A sont les points C, D et E sur la figure suivante :



Il y a un chemin de A à C, deux chemins de A à D et un chemin de A à E.

b) Pour aller de A à M, il faut effectuer cinq mouvements, dont exactement deux mouvements verticaux. Le nombre de chemins de A à M est donc $\binom{5}{2} = 10$.

Pour aller de A à P, il faut effectuer six mouvements, dont exactement deux mouvements verticaux. Le nombre de chemins de A à P est donc $\binom{6}{2} = 15$.

Pour aller de A à Q, il faut effectuer six mouvements, dont exactement 3 mouvements verticaux.

Le nombre de chemins de A à Q est donc $\binom{6}{3} = 20$.

c) Pour aller de A à B, il faut effectuer 14 mouvements, dont exactement quatre mouvements verticaux. Le nombre de chemins de A à B est donc $\binom{14}{4} = 1001$.

63 **a)** Le nombre de façons de choisir les livres d'astronomie est $\binom{4}{3} = 4$.

b) Le nombre de façons de choisir les livres de mathématiques est $\binom{5}{2} = 10$.

c) Il s'agit de déterminer le nombre de permutations de ces 5 livres. Ce nombre est $5! = 120$.

d) Le nombre total de choix possibles est donc $4 \times 10 \times 120 = 4800$.

64 **a)** Il ne peut pas y avoir de répétitions et on ne tient pas compte de l'ordre, donc le nombre de choix possibles est $\binom{30}{5} = 142\,506$.

b) Il ne peut pas y avoir de répétitions, mais on tient compte de l'ordre. Le nombre de choix différents est donc $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$.

c) Le choix étant imposé pour la première chanson, le nombre de choix possibles est alors $1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24$.

65 Le nombre de façons de choisir les trois étapes avec ravitaillement est $\binom{6}{3} = 20$.

Le nombre de façons de choisir les quatre autres étapes est $\binom{10}{4} = 210$.

Donc le nombre de façons de choisir les sept étapes est $20 \times 210 = 4200$.

Pour chacun de ces choix, il faut ensuite choisir dans quel ordre auront lieu les étapes. Le nombre de choix possibles pour cela est le nombre de permutations des sept étapes, qui est égal à $7! = 5040$.

Le nombre total de façons de concevoir la croisière est donc :

$$4200 \times 5040 = 21\,168\,000.$$

66 **a)** Si les chaises sont numérotées, alors on compte d'abord le nombre de permutations de ces 10 personnes. Ce nombre est $10! = 3\,628\,800$.

Il faut ensuite choisir le numéro de la chaise où va s'installer la première personne : il y a 10 choix possibles pour cela. Le nombre total de façons de ranger ces personnes est donc 36288000.

b) Si les chaises ne sont pas numérotées, alors le nombre total de façons de ranger ces personnes est $10! = 3628800$.

67 Dans un polygone convexe, les diagonales sont les segments qui relient deux sommets et qui ne sont pas des côtés du polygone. Le nombre de segments qui relient deux sommets quelconques est le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi n, $\binom{n}{2}$.

Il faut ensuite soustraire les n côtés du polygone.

Le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés est donc $\binom{n}{2} - n$.

On peut aussi écrire le résultat sous la forme $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$.

68 **a)** $A = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$.

b) $B = \frac{(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

c) $C = \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)}$.

69 **a)** L'équation $\binom{n}{5} = 17\binom{n}{4}$ équivaut à

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$
$$= 17 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\times\frac{4!}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$$
$= 17.$

$\frac{(n-4)}{5} = 17.$

$n - 4 = 85.$

$n = 89.$

b) $\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{3} = 387n$

$$2n+\frac{2n(2n-1)}{2}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 387n$$

$$2n+\frac{4n^2-2n}{2}+\frac{8n^3-12n^2+4n}{6} = 387n$$

$$\frac{12n+12n^2-6n+8n^3-12n^2+4n}{6} = 387n$$

$$\frac{8n^3+10n}{6} = 387n$$

$8n^3+10n = 2322n$

$8n^3-2312n = 0$

$8n(n^2-289) = 0$

$8n(n-17)(n+17) = 0$

Cette dernière équation admet trois solutions, 0, 17 et − 17, mais seul 17 est une solution valable pour l'équation initiale.

70 **a)** Le nombre de tirages possibles est $\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{2n(2n-1(2n-2)\ldots(n+1)}{n!}.$

b) S'il y a exactement p boules blanches, alors il y exactement *n* - *p* boules rouges.

Le nombre de tirages de ce type est donc $\binom{n}{p}\times\binom{n}{n-p}$.

Or par symétrie des nombres de combinaisons, $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$.

Donc le nombre de tirages avec *p* boules blanches est $\binom{n}{p}^2$.

c) Un tirage peut comporter entre 0 et *n* boules blanches.

Donc la somme $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2$ est égale au nombre total de tirages, c'est-à-dire $\binom{2n}{n}$.

71 **Parcours 1**

Le nombre total de tirages possibles est $\binom{8}{2} = 28.$

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

L'événement $\{X = 0\}$ est réalisé quand le tirage comporte deux boules rouges.

Le nombre de tels tirages est $\binom{3}{2} = 3.$

Ainsi, $P(X = 0) = \frac{3}{28}.$

L'événement $\{X = 1\}$ est réalisé quand le tirage comporte une boule verte et une boule rouge. Le nombre de tels tirages est $\binom{5}{1}\times\binom{3}{1} = 15.$

Ainsi, $P(X = 1) = \frac{15}{28}.$

L'événement $\{X = 2\}$ est réalisé quand le tirage comporte deux boules vertes.

Le nombre de tels tirages est $\binom{5}{2} = 10.$

Ainsi, $P(X = 2) = \frac{10}{28}.$

Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{28}$

Parcours 2

a) Le nombre total de tirages possibles est $\binom{4}{2} = 6.$

b) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

c) $\{X = 0\}$: « Le tirage ne comporte aucune boule dont le numéro est divisible par 4. »

Cet événement est réalisé quand on a tiré les boules numérotées 10 et 30.

Ainsi, $P(X = 0) = \frac{1}{6}.$

d) L'événement $\{X = 2\}$ est réalisé quand on a tiré les boules numérotées 20 et 40.

Ainsi, $P(X = 2) = \frac{1}{6}.$

L'événement $\{X = 1\}$ est réalisé quand le tirage comporte une boule numérotée 10 ou 30 et une boule numérotée 20 ou 40.

Le nombre de tels tirages est $\binom{2}{1}\times\binom{2}{1} = 4.$

Ainsi, $P(X = 1) = \frac{4}{6}.$

e) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
$P(X = a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

72 Le nombre de façons de constituer le groupe A est le nombre de combinaisons de 16 éléments parmi 32 : $\binom{32}{16} = 601\,080\,390.$

Le nombre de groupes possibles qui comportent exactement autant de filles que de garçons est $\binom{20}{8}\times\binom{12}{8}=62\,355\,150$. Ce n'est pas la moitié du nombre total de groupes possibles, donc Marina a tort.

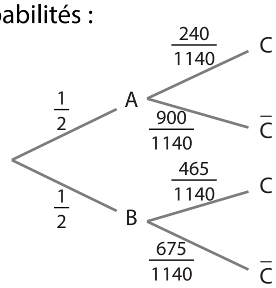
73 **a)** Le nombre d'empilements de cinq cubes possibles est $26\times25\times24\times23\times22=7893600$.
La probabilité qu'il empile les lettres du mots PRIME, dans cet ordre, est donc $\frac{1}{7893600}$.
b) Le nombre de permutations des lettres du mot CIBLE est $5!=120$.

Donc la probabilité qu'il empile les lettres de ce mot, éventuellement dans le désordre est $\frac{120}{7893600}$.
c) Le nombre de 5-uplets de lettres du mot ABDOMEN est $7\times6\times5\times4\times3=2520$. Donc la probabilité qu'il empile des lettres de ce mot, éventuellement dans le désordre est $\frac{2520}{7893600}$.

74 Le nombre de façons de tirer les deux chaussures est $\binom{6}{2}=15$.
Il y a trois tirages où les deux chaussures appartiennent à la même paire, par conséquent $P(A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.
Le nombre de tirages qui consistent d'un pied droit et un pied gauche est $\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}=9$, par conséquent $P(B)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

75 Le nombre de tirages différents possibles est 2^{100}. Parmi ces tirages, le nombre de tirages qui comportent exactement 5 fois Pile est $\binom{100}{5}$.
La probabilité d'obtenir exactement 5 Pile est donc $\frac{\binom{100}{5}}{2^{100}}$, ce qui donne $P(X=5)\approx5{,}94\times10^{-23}$.

76 **1. a)** Le nombre de tirages possibles est $\binom{20}{3}=1140$.
b) Le nombre de tirages avec trois boules bleues est $\binom{10}{3}=120$. Donc la probabilité d'un tel tirage est $\frac{120}{1140}$.
Puisqu'il y a autant de boules bleues que de boules rouges, la probabilité d'obtenir trois boules rouges est aussi $\frac{120}{1140}$.
c) On obtient trois boules de la même couleur si on obtient trois boules rouges ou trois boules bleues. La probabilité de cet événement est donc $\frac{120}{1140}+\frac{120}{1140}=\frac{240}{1140}$.
2. Le nombre de tirages possibles est le même que pour l'urne A : $\binom{20}{3}=1140$.
Le nombre de tirages avec trois boules bleues est $\binom{5}{3}=10$. Donc la probabilité d'un tel tirage est $\frac{10}{1140}$.
Le nombre de tirages avec trois boules rouges est $\binom{15}{3}=455$. Donc la probabilité d'un tel tirage est $\frac{455}{1140}$.
La probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur est donc $\frac{10}{1140}+\frac{455}{1140}=\frac{465}{1140}$.
3. a) On note C l'événement : « on obtient trois boules de la même couleur ».
Arbre de probabilités :



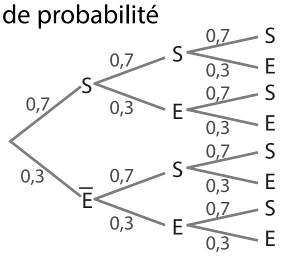
b) $P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{240}{1140}+\frac{1}{2}\times\frac{465}{1140}=\frac{705}{2280}$

77 **a)** Le nombre de tirages possibles est $\binom{5}{3}=10$.
b) L'un des nombres tirés au sort étant 0, il reste à choisir deux nombres parmi les quatre restants.
Le nombre de tirages de ce type est donc $\binom{4}{2}=6$.
c) On a trouvé à la question précédente le nombre de tirages dans lesquels le 0 a été tiré au sort.
Le nombre de tirages dans lesquels le 0 n'a pas été tiré est donc $10-6=4$.
d) Voici les tirages possibles et les valeurs de X correspondantes :
0 ; 1 ; 2 : $X=3$
0 ; 1 ; 3 : $X=4$
0 ; 1 ; 4 : $X=5$
0 ; 2 ; 3 : $X=5$
0 ; 2 ; 4 : $X=6$
0 ; 3 ; 4 : $X=7$
1 ; 2 ; 3 : $X=6$
1 ; 2 ; 4 : $X=7$
1 ; 3 ; 4 : $X=8$
2 ; 3 ; 4 : $X=9$

Les valeurs prises par X sont deux 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
d) La liste de tous les tirages nous permet aussi d'établir la loi de probabilité de X :

a	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = a)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

78 **1.** Arbre de probabilité



2. La probabilité qu'elle réussisse trois fois est $0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}343$.
3. a) Il y a 3 chemins dans lesquels elle réussit une fois exactement.
b) La probabilité le long d'un de ces chemins est $0{,}7 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}147$.
c) La probabilité qu'elle réussisse exactement une fois est donc $3 \times 0{,}147 = 0{,}441$.
4. Il y a 3 chemins dans lesquels elle réussit deux fois exactement.
La probabilité le long d'un de ces chemins est $0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}063$.
La probabilité qu'elle réussisse exactement deux fois est donc $3 \times 0{,}147 = 0{,}189$.
5. Il ne reste plus qu'à trouver la probabilité qu'elle ne réussisse jamais, qui est égale à $0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}027$.
On en déduit la loi de probabilité de X :

a	0	1	2	3
$P(X = a)$	0,027	0,441	0,189	0,343

79 **a)** Si un ensemble a 8 éléments, alors le nombre de permutations de cet ensemble est 8! = 40 320.
b) Si n et n' sont deux nombres naturels avec $n \leqslant n'$, alors il y a moins de triplets d'un ensemble à n éléments que de triplets d'un ensemble à n' éléments.
c) Si n et k sont deux nombres entiers naturels égaux, alors le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est égal à 1.
d) Si n et m sont deux nombres entiers naturels tels que $n = 2m$ et si E et F sont des ensembles à n et m éléments respectivement, alors le nombre de parties de l'ensemble E est égal au carré du nombre de parties de l'ensemble F.

80 **a)** « Il n'existe pas de nombres entiers naturels n et k tel que $\binom{n}{k} = 7$. »

Faux. En effet, $\binom{7}{1} = 7$ donc $n = 7$ et $k = 1$ conviennent.

b) « Il existe un entier naturel n supérieur ou égal à 3 tel que $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \neq \binom{n}{3}$. »

Vrai. En effet, c'est le cas pour $n = 3$, car $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$ et $\binom{3}{3} = 1$.

81 **1. a)** Constituer un carré, c'est placer les nombres de 1 à 9 dans un tableau de 9 cases. Le nombre de carrés possibles est donc le nombre de permutations de neuf éléments : $9! = 362\,880$.

b) Contrainte 1 : Il reste à placer huit nombres dans huit emplacements, donc le nombre de carrés de ce type est $8! = 40\,320$.

Contrainte 2 : Le nombre de façons de placer les quatre nombres pairs dans les quatre coins est $4! = 24$. Dans chacun de ces cas, il y cinq façons de placer les nombres impairs dans les cases restantes, ce qui donne $5! = 120$.

Le nombre total est donc $24 \times 120 = 2\,880$.

Contrainte 3 : Le nombre de façons de placer les quatre nombres impairs différents de 5 aux milieux des côtés des carrés est $4! = 24$. Dans chacun de ces cas, il y a cinq façons de placer les cinq autres nombres dans les cases restantes, ce qui donne $5! = 120$.

Le nombre total est donc $24 \times 120 = 2\,880$.

2. a) La somme des nombres de 1 à 9 est 45. Pour trouver la « somme magique », il faut diviser ce nombre par 3 (car il y a trois lignes). On obtient 15.

b) Le placement du 5 est imposé. Il y a ensuite 24 façons de placer les nombres pairs dans les coins et 24 façons de placer les nombres impairs différents de 5 aux milieux des côtés. Le nombre total de carrés qui vérifient ces trois contraintes est donc $24 \times 24 = 576$.

Voici les huit possibilités :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

c) Tous ces carrés sont symétriques les uns aux autres, par des symétries axiales ou centrales.

3. a) On considère deux carrés magiques d'ordre 3 :

a	b	c
d	e	f
g	h	i

a'	b'	c'
d'	e'	f'
g'	h'	i'

Puisque ce sont des carrés magiques, alors les sommes des lignes sont égales, c'est-à-dire $a + b + c = d + e + f = g + h + i$ et de même $a' + b' + c' = d' + e' + f' = g' + h' + i'$.

En additionnant case par case ces deux carrés, on obtient le carré :

$a + a'$	$b + b'$	$c + c'$
$d + d'$	$e + e'$	$f + f'$
$g + g'$	$h + h'$	$i + i'$

Les sommes des lignes de ce carré sont :

$a + a' + b + b' + c + c' = a + b + c + a' + b' + c'$

$d + d' + e + e' + f + f' = d + e + f + d' + e' + f'$

$g + g' + h + h' + i + i' = g + h + i + g' + h' + i'$

On constate que ces sommes sont bien égales.

On démontre de la même façon que les sommes des colonnes et des diagonales sont bien égales, entre elles et avec les sommes des lignes, puis de même pour le carré obtenu en soustrayant deux carrés.

La somme magique est modifiée. Par exemple, en additionnant deux carrés magiques avec les nombres de 1 à 9, la somme magique est 30, et en les soustrayant la somme magique est 0.

b) Il y a huit carrés magiques de 1 à 9.

Donc en en additionnant deux on peut obtenir $8 \times 8 = 64$ carrés magiques différents, et en en additionnant trois on peut en obtenir $8 \times 8 \times 8 = 512$.

82 **1. a)** Il y a une seule partition de cet ensemble en une partie, c'est l'ensemble lui-même. Ainsi $S_2^1 = 1$.

Il y a une seule partition de cet ensemble en deux parties : $\{a\}$ et $\{b\}$. Ainsi $S_2^2 = 1$.

b) Voici les trois partitions de cet ensemble en 2 parties :

$\{a\}$ et $\{b ; c\}$, $\{b\}$ et $\{a ; c\}$, $\{c\}$ et $\{a ; b\}$.

c) Il y a une seule partition de E en une partie, donc $S_3^1 = 1$.

On a vu qu'il y a trois partitions de E en deux parties, donc $S_3^2 = 3$.

Il y a une seule partition de E en trois parties : $\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c\}$. Donc $S_3^3 = 1$.

d) Pour tout entier naturel n, il y a une unique partition de E en une partie, c'est l'ensemble E lui-même, et une unique partition de E en n parties, celle constituée de n parties à 1 élément.

Donc pour tout entier naturel n, $S_n^1 = 1$ et $S_n^n = 1$.

2. a) La notation S_4^2 représente le nombre de partitions d'un ensemble à 4 éléments en deux parties.

Prenons par exemple l'ensemble $E = \{a ; b ; c ; d\}$.

Voici ses partitions en deux parties :

$\{a\}$ et $\{b ; c ; d\}$

$\{b\}$ et $\{a ; c ; d\}$

$\{c\}$ et $\{a ; b ; d\}$

$\{d\}$ et $\{a ; b ; c\}$

$\{a ; b\}$ et $\{c ; d\}$

$\{a ; c\}$ et $\{b ; d\}$

$\{a ; d\}$ et $\{b ; c\}$

Ainsi, $S_4^2 = 7$.

b) Voici les partitions de $E = \{a ; b ; c ; d\}$ en trois parties :

$\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c ; d\}$

$\{a\}$, $\{c\}$ et $\{b ; d\}$

$\{a\}$, $\{d\}$ et $\{b ; c\}$

$\{b\}$, $\{c\}$ et $\{a ; d\}$

$\{b\}$, $\{d\}$ et $\{a ; c\}$

$\{c\}$, $\{d\}$ et $\{a ; b\}$

Ainsi, $S_4^3 = 6$.

On pose $F = \{a ; b ; c ; d ; e\}$

Voici les partitions de F en trois parties :

$\{a\}$, $\{b\}$ et $\{c ; d ; e\}$

$\{a\}$, $\{c\}$ et $\{b ; d ; e\}$

$\{a\}$, $\{d\}$ et $\{b ; c ; e\}$

$\{a\}$, $\{e\}$ et $\{b ; c ; d\}$

$\{b\}$, $\{c\}$ et $\{a ; d ; e\}$

$\{b\}$, $\{d\}$ et $\{a ; c ; e\}$

$\{b\}$, $\{e\}$ et $\{a ; c ; d\}$

$\{c\}$, $\{d\}$ et $\{a ; b ; e\}$

$\{c\}$, $\{e\}$ et $\{a ; b ; d\}$

$\{d\}$, $\{e\}$ et $\{a ; b ; c\}$

$\{a ; b\}$, $\{c ; d\}$ et $\{e\}$

$\{a ; b\}$, $\{c ; e\}$ et $\{d\}$

$\{a ; b\}$, $\{d ; e\}$ et $\{c\}$

$\{a ; c\}$, $\{b ; d\}$ et $\{e\}$

$\{a ; c\}$, $\{b ; e\}$ et $\{d\}$

$\{a ; c\}$, $\{d ; e\}$ et $\{b\}$

$\{a ; d\}$, $\{b ; c\}$ et $\{e\}$

$\{a ; d\}$, $\{b ; e\}$ et $\{c\}$

$\{a ; d\}$, $\{c ; e\}$ et $\{b\}$

$\{a ; e\}$, $\{b ; c\}$ et $\{e\}$

$\{a ; e\}$, $\{b ; e\}$ et $\{c\}$

$\{a ; e\}$, $\{c ; e\}$ et $\{b\}$

$\{b ; c\}$, $\{d ; e\}$ et $\{a\}$

$\{b ; d\}$, $\{c ; e\}$ et $\{a\}$

$\{b ; e\}$, $\{c ; d\}$ et $\{a\}$

Ainsi, $S_5^3 = 25$.

c) $S_4^2 = 7$ et $S_3^1 + 2S_3^2 = 1 + 2 \times 3 = 7$

donc $S_4^2 = S_3^1 + 2S_3^2$.

$S_4^3 = 6$ et $S_3^2 + 3S_3^3 = 3 + 3 \times 1 = 6$

donc $S_4^3 = S_3^2 + 3S_3^3$.

d) On conjecture que $S_5^3 = S_4^2 + 3S_4^3$.

$S_5^3 = 25$ et $S_4^2 + 3S_4^3 = 7 + 3 \times 6 = 25$ donc cette relation est vraie.

e) On peut conjecturer que, pour tous nombres entiers naturels non nuls n et p, avec $p \leqslant n$, $S_n^p = S_{n-1}^{p-1} + pS_{n-1}^p$.

3. a) Si une des parties est $\{x\}$, alors les $p - 1$ autres parties forment une partition d'un ensemble à $n - 1$ éléments.

Le nombre de telles partitions de E est donc S_{n-1}^{p-1}.

b) Si aucune des parties n'est $\{x\}$, alors il faut que les p parties constituent une partition de l'ensemble des $n - 1$ autres éléments. Le nombre de telles partitions est S_{n-1}^p. Puis, il faut choisir dans laquelle de ces p parties on met l'élément x – il y a p façons de faire ce choix.

Le nombre total de telles partitions est donc pS_{n-1}^p.

c) Les partitions de l'ensemble E sont de deux types : celles dont une partie est $\{x\}$, et celles dont ce n'est pas une partie. D'après la question précédente, on a donc bien $S_n^p = S_{n-1}^{p-1} + pS_{n-1}^p$.

d) Voici le triangle que l'on obtient en utilisant la relation démontrée à la question précédente.

1					
1	1				
1	3	1			
1	7	6	1		
1	15	25	10	1	
1	31	90	65	15	1

4. a) Le programme n'est pas correct. Il faut écrire

S=Part(n-1,p-1)+p*Part(n-1,p).

b) On retrouve bien les mêmes valeurs.

83 Le verbe « ranger » sous-entend que l'ordre est important.

Le nombre de rangements qui commencent par les livres de mathématiques (M), puis les livres physique-chimie (P), puis les livres de sciences de la vie et de la Terre est $5! \times 3! \times 4!$. Il faut multiplier ce nombre par le nombre de façons de classer les lettres MPS, c'est-à-dire de placer les trois groupes. Ce nombre est 3!.

Le nombre total de rangements où les livres de chaque matière sont côte à côte est donc $5! \times 3! \times 4! \times 3!$.

84 Il y a quatre façons de placer la lettre N. Pour chacune de ces façons, il faut ordonner trois lettres parmi les six autres lettres du mot MOULINS. Le nombre de façons de faire cela est $6 \times 5 \times 4 = 120$. Donc le nombre de mots vérifiant cette contrainte est $120 \times 4 = 480$.

85 **1. a)** Il y a un seul tirage de ce type : les boules numérotées 1, 2, 3.

b) Pour obtenir un tirage de ce type, il faut tirer 3 boules parmi les trois boules numérotées 1, 2, 3, 4.

Le nombre de tels tirages est donc $\binom{4}{2} = 46$.

2. Pour chaque valeur de k, il faut tirer la boule k et tirer deux boules parmi les boules numérotées de 1 à $k - 1$.

Le nombre de tels tirages est donc $\binom{k-1}{2}$ ce qui donne, dans l'ordre des valeurs de k, $\binom{2}{2}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{6}{2}$.

3. Dans la question précédente, on a étudié toutes les façons de tirer trois boules parmi 7. Donc la somme des nombres de tirages trouvés est égale au nombre total de tirages possibles, $\binom{7}{3}$.

Par conséquent, les nombres $n = 7$ et $p = 3$ vérifient

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{n}{p}.$$

e) En utilisant plusieurs fois la relation de Pascal, on obtient :

$$\binom{7}{3} = \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$

$$\binom{7}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$$

$$\binom{7}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$$

$$\binom{7}{3} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$$

$$\binom{7}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2}$$

Car $\binom{3}{3} = 1 = \binom{2}{2}$.

86 Il faut tout d'abord choisir les emplacements des deux chiffres 5.

Le nombre de façons de faire ce choix est $\binom{n}{2}$.

Il faut ensuite compléter les $n - 2$ emplacements libres dans le nombre en utilisant les neuf chiffres différents de 5.

Le nombre de façons de faire ce choix est 9^{n-2}, ce qui donne en tout $\binom{n}{2} \times 9^{n-2}$ nombres.

Puis il faut soustraire les nombres qui commencent par le chiffre 0, qui n'ont en fait que $n-1$ chiffres.

Il y en a $\binom{n-1}{2} \times 9^{n-3}$.

Finalement, le nombre total de nombres de ce type est

$$\binom{n}{2} \times 9^{n-2} - \binom{n-1}{2} \times 9^{n-3}$$

que l'on peut simplifier en $(4n^2 - 3n - 1) \times 9^{n-2}$.

87 **a)** Sans tenir compte de la contrainte, le nombre de cartes possibles serait $\binom{7}{3} = 35$.

b) Il faut d'abord choisir un symbole parmi les trois présents sur cette carte (3 choix possibles).

Pour chacun de ces choix, il faut compléter la carte par 2 symboles parmi les 4 qui ne sont pas sur la carte.

Il y a donc $3 \times \binom{4}{2} = 18$ cartes possibles.

c) Il faut d'abord choisir un symbole parmi les cinq présents sur ces deux cartes (5 choix possibles).

Si le symbole choisi est le cœur, il faut compléter la carte par 2 symboles qui ne sont sur aucune de ces deux cartes. Or il ne reste plus que 2 tels symboles.

Il y a donc seulement 1 carte de ce type, la carte Cœur-Ruban-Trèfle.

Si le symbole choisi n'est pas le cœur, alors il faut compléter la carte avec un symbole de l'autre carte, différent du cœur, puis avec un symbole qui n'est sur aucune de des cartes. Il y a donc $2 \times 2 \times 2 = 8$ cartes de ce type.

Il y a donc en tout 9 cartes qui ont un symbole en commun avec chacune des deux cartes.

Cependant, parmi ces 9 cartes, certaines ont deux symboles en commun et d'autres n'en ont aucun.

En listant toutes ces cartes, on constate qu'il faut en éliminer 4. Le nombre total de cartes de ce jeu est donc $2 + 9 - 4 = 7$.

Il y a donc 7 cartes en tout.

d) Les cartes qui sont sur une ligne de même couleur portent le même symbole. Par exemple, les cartes sur la ligne rouge portent un cœur. Le schéma est construit de sorte que deux cartes quelconques sont toujours sur une unique même ligne, ce qui assure qu'elles ont un unique symbole en commun.

88 Le nombre de triplets de E^3 est n^3. Le nombre de couples d'éléments distincts de E est $n(n-1)$.

On peut alors utiliser un tableur pour observer les valeurs successives de ces deux nombres.

	A	B	C	D
1	n	n^3	n(n-1)	Différence
2	2	8	2	6
3	3	27	6	21
24	24	13824	552	13272
25	25	15625	600	15025
26	26	17576	650	16926
27	27	19683	702	18981
28	28	21952	756	21196
29	29	24389	812	23577

On observe que la propriété demandée est vraie à partir de $n = 25$.

89 **a)** Il ne peut pas y avoir de répétitions et l'ordre n'est pas pris en compte, donc sans aucune restriction, le nombre de choix possibles est $\binom{10}{3} = 120$.

b) Il faut tout d'abord choisir deux spécialités parmi dix ce qui donne $\binom{10}{2} = 45$ choix possibles. (On peut toutefois se demander si certaines de ces possibilités ne sont pas les mêmes, mais les données de l'énoncé ne permettent pas de le dire).

c) Ces deux organisations consommeraient $10 \times 4 + 16 = 40 + 16 = 56$ h, soit plus de 10 h par jour de classe.

Objectif BAC

90 **Partie A**

1. a) Le nombre de façons de choisir ces 5 musées est $\binom{11}{5} = 462$.

b) Le nombre de façons de choisir ces musées de sorte qu'il y ait exactement 2 musées d'art et d'histoire est $\binom{7}{2} \times \binom{4}{3} = 84$.

c) Le nombre de façons de choisir ces musées de sorte qu'il n'y ait aucun musée scientifique est $\binom{7}{5} = 21$.

Le nombre de façons de les choisir de sorte qu'il y ait au moins un tel musée est donc $462 - 21 = 441$.

2. a) Il s'agit de dénombrer les permutations d'un ensemble à cinq éléments : $5! = 120$.

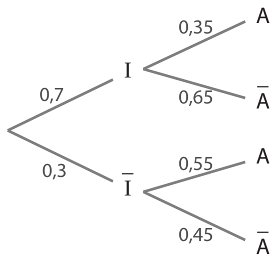
b) Il faut d'abord choisir les deux musées qui seront visités le même jour. Il y a $\binom{5}{2} = 10$ choix possibles.

Puis, il faut ordonner les quatre groupes d'un ou deux musées. Il y a $4! = 24$ choix possibles.

Le nombre total de choix possible est donc $10 \times 24 = 240$.

Partie A

1. Voici l'arbre de probabilités, dans lequel on a noté I l'événement « le client achète le billet par Internet » et A l'événement « le client choisit une visite avec audioguide ».



2. La probabilité que le client choisisse une visite avec audioguide est :

$P(A) = P(A \cap I) + P(A \cap \overline{I})$

$P(A) = 0{,}7 \times 0{,}35 + 0{,}3 \times 0{,}55$

$P(A) = 0{,}41$

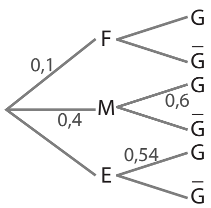
3. On doit calculer la probabilité qu'un client ait acheté son billet par Internet sachant qu'il a choisit une visite avec audioguide. Cette probabilité est :

$P_A(I) = \dfrac{P(A \cap I)}{P(A)} = \dfrac{0{,}7 \times 0{,}35}{0{,}41} = \dfrac{0{,}245}{0{,}41}$

Ainsi $P_A(I) \approx 0{,}59$, ce qui correspond à plus de la moitié des clients.

Le directeur devrait donc décider de proposer la location de l'audioguide sur le site Internet.

91 **1.** Arbre de probabilités incomplet :



2. $P(M \cap G) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.

3. a) On sait que $P(G) = 0{,}58$.

D'autre part, $P(G) = P(F \cap G) + P(M \cap G) + P(E \cap G)$

Or $P(M \cap G) = 0{,}24$ et

$P(E \cap G) = (1 - 0{,}1 - 0{,}4) \times 0{,}54 = 0{,}27$.

Par conséquent,

$$P(F \cap G) = 0{,}58 - 0{,}24 - 0{,}27 = 0{,}07.$$

b) En déduire $P_F(G) = \dfrac{P(F \cap G)}{P(Fx} = \dfrac{0{,}07}{0{,}1} = 0{,}7$.

c) La probabilité que l'équipe adulte féminine gagne un match est 0,47. La probabilité que cette équipe gagne sachant que Claire assiste au match est 0,7. Il semble donc que la présence de Claire favorise la victoire de l'équipe.

2. On doit calculer la probabilité que Claire ait assisté à un match de l'équipe féminine sachant qu'elle a assisté à une victoire. Cette probabilité est :

$$P_G(F) = \frac{P(F \cap G)}{P(G)} = \frac{0{,}07}{0{,}58} = \frac{7}{58}.$$

Partie B

1. Il ne peut pas y avoir de répétitions et on ne tient pas compte de l'ordre, donc le nombre de façons de tirer au sort les 14 membres de l'équipe est $\binom{22}{14} = 319770$.

2. Le nombre de tirages pour lesquels tous les membres de l'équipe ont moins de 21 ans est $\binom{16}{14} = 120$ donc la probabilité d'un tel tirage est $\dfrac{120}{319770} = \dfrac{4}{10659}$.

3. On va compter les tirages pour lesquels 2 membres de l'équipe ou moins ont plus de 21 ans.

- Aucun membre de l'équipe : $\binom{16}{14} = 120$.
- Un membre de l'équipe : $\binom{16}{13} \times \binom{6}{1} = 3360$.
- Deux membres de l'équipe : $\binom{16}{12} \times \binom{6}{2} = 27300$.

$27300 + 3360 + 120 = 30780$, donc le nombre d'équipes avec au moins trois plus de 21 ans est $319770 - 30780 = 288990$.

92 **1. a)** La probabilité qu'un ruban soit défectueux est :

$P(D) = 0{,}2 \times 0{,}05 + 0{,}8 \times 0{,}0625$

$P(D) = 0{,}06$

b) $P(D \cap E) = 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01$

$P(D) = 0{,}06$ et $P(E) = 0{,}2$

donc $P(D) \times P(E) = 0{,}06 \times 0{,}2 = 0{,}012$.

On observe que $P(D \cap E) \neq P(D) \times P(E)$, donc les événements D et E ne sont pas indépendants.

2. a) Le nombre total de tirages possibles est $\binom{10}{5} = 252$.

La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1 et 2. Voici les nombres de cas et les probabilités correspondantes :

$X = 0$: $\binom{8}{5} = 56$ donc $P(X = 0) = \dfrac{56}{252}$.

$X = 1$: $\binom{8}{4} \times \binom{2}{1} = 140$ donc $P(X = 1) = \dfrac{140}{252}$.

$X = 2 : \binom{8}{3} \times \binom{2}{2} = 56$ donc $P(X = 2) = \frac{56}{252}$.

b) La probabilité qu'au moins un des rubans soit défectueux est $\frac{140}{252} + \frac{56}{252} = \frac{196}{252} = \frac{7}{9}$.

93 **a)** Si on pioche les boules une par une avec remise, on utilise des puissances.
Si on pioche sans remise, dans un certain ordre, on utilise les nombres de n-uplets.
Si on pioche plusieurs boules simultanément, on utilise les nombres de combinaisons.

94 **a)** Si on peut utiliser plusieurs fois la même lettre, le nombre total de possibilités est $26^3 = 17576$.
b) Si on ne peut pas utiliser deux fois la même lettre, le nombre total de possibilités est $\binom{26}{3} = 2600$.

95 **a)** Vrai. En effet, le nombre de façons d'ordonner cinq nombres distincts est $5! = 120$.
b) Faux. En effet, il s'agit de compter le nombre des combinaisons de trois éléments parmi cinq, et ce nombre est $\binom{5}{3} = 10$.
c) Vrai. En effet, il y a cinq choix possibles pour a, puis quatre choix possibles pour n, ce qui fait bien $5 \times 4 = 20$ possibilités, qui sont toutes différentes puisqu'on utilise des nombres premiers distincts.
d) Faux. En effet, le nombre de valeurs possibles est $5^4 = 625$, et ces valeurs sont toutes différentes puisque ce sont des produits différents de nombres premiers.

Pour aller plus loin

96 **Partie A**

1. aaa aab aac abb acc
abc bbb bbc bcc ccc.

2. aaa aab aac aad abb
acc add abc acd abd
bbb bbc bbd bcc bcd
bdd ccc ccd cdd ddd.

Partie B

1. a) aaa : 3+0+0 aab : 2+1+0
aac : 2+0+1 abb : 1+2+0
acc : 1+0+2 abc : 1+1+1
bbb : 0+3+0 bbc : 0+2+1
bcc : 0+1+2 ccc : 0+0+3

b) aaa : 3+0+0+0 aab : 2+1+0+0
aac : 2+0+1+0 aad : 2+0+0+1
abb : 1+2+0+0 acc : 1+0+2+0
add : 1+0+0+2 abc : 1+1+1+0
acd : 1+0+1+1 abd : 1+1+0+1
bbb : 0+3+0+0 bbc : 0+2+1+0
bbd : 0+2+0+1 bcc : 0+1+2+0
bcd : 0+1+1+1 bdd : 0+1+0+2
ccc : 0+0+3+0 ccd : 0+0+2+1
cdd : 0+0+1+2 ddd : 0+0+0+3

c) $\left(\binom{3}{2}\right)$ est donc le nombre de façons d'écrire 2 comme la somme de trois nombres, éventuellement nuls, en tenant compte de l'ordre des nombres.
Il y a six écritures possibles :
$2 = 2 + 0 + 0 = 0 + 2 + 0 = 0 + 0 + 2$
$2 = 1 + 1 + 0 = 1 + 0 + 1 = 0 + 1 + 1$
Donc $\left(\binom{3}{2}\right) = 6$.

2. a) Pour l'ensemble E :
aaa : ★★★|| aab : ★★|★|
aac : ★★||★ abb : ★|★★|
acc : ★||★★ abc : ★|★|★
bbb : |★★★| bbc : |★★|★
bcc : |★|★★ ccc : ||★★★

Pour l'ensemble F :
aaa : ★★★||| aab : ★★|★||
aac : ★★||★| aad : ★★|||★
abb : ★|★★|| acc : ★||★★|
add : ★|||★★ abc : ★|★|★|
acd : ★||★|★ abd : ★|★||★
bbb : |★★★|| bbc : |★★|★|
bbd : |★★||★ bcc : |★|★★|
bcd : |★|★|★ bdd : |★||★★
ccc : ||★★★| ccd : ||★★|★
cdd : ||★|★★ ddd : |||★★★

b) Pour $k = 3$ et $n = 3$, il faut placer 3 étoiles et 5 éléments.
Pour $k = 3$ et $n = 4$, il faut placer 3 étoiles et 6 éléments.
De manière générale, il faut placer k étoiles et $n + k - 1$ éléments en tout.
c) Il faut choisir les positions des k étoiles parmi les $n + k - 1$ éléments, donc le nombre de combinaisons avec répétitions de k éléments parmi n est donc

le nombre de combinaisons de k éléments parmi $n+k-1$. Ainsi, $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

Partie C

1. Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons avec répétition de quatre éléments parmi huit. Ce nombre est $\left(\binom{8}{4}\right) = \binom{11}{4} = 330$.

2. Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons avec répétition de cinq éléments parmi 29. Ce nombre est

$$\left(\binom{29}{5}\right) = \binom{33}{5} = 237\,236.$$

3. Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons avec répétition de 7 éléments parmi cinq. Ce nombre est

$$\left(\binom{5}{10}\right) = \binom{14}{10} = 1001.$$

97 **1. a)** Cette notation représente la permutation *dcba*.

b) *abcd* : $\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}$ *abdc* : $\begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}$

acbd : $\begin{pmatrix}1234\\1324\end{pmatrix}$ *cadb* : $\begin{pmatrix}1234\\3143\end{pmatrix}$

acdb : $\begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix}$ *cbad* : $\begin{pmatrix}1234\\3214\end{pmatrix}$

adbc : $\begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}$ *cbda* : $\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}$

adcb : $\begin{pmatrix}1234\\1432\end{pmatrix}$ *cdab* : $\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}$

bacd : $\begin{pmatrix}1234\\2134\end{pmatrix}$ *cdba* : $\begin{pmatrix}1234\\3427\end{pmatrix}$

badc : $\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}$ *dabc* : $\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$

bcad : $\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}$ *dacb* : $\begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix}$

bcda : $\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}$ *dbac* : $\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}$

bdac : $\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}$ *dbca* : $\begin{pmatrix}1234\\4231\end{pmatrix}$

bdca : $\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}$ *dcab* : $\begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}$

cabd : $\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}$ *dcba* : $\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}$

2. a) $\sigma_2 = \begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix}1234\\1324\end{pmatrix}$

$\sigma_4 = \begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}$

$\sigma_5 = \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}$

b) La permutation σ_5 est celle où l'on ne change pas l'ordre des éléments.

c) La forme canonique $(132)(4)$ représente la permutation $\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}$. Elle ne représente donc pas la même que la forme canonique $(123)(4)$.

d) *abcd* : $\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}$, $(1)(2)(3)(4)$

abdc : $\begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}$, $(1)(2)(3\ 4)$, cycle de longueur 2

acbd : $\begin{pmatrix}1234\\1324\end{pmatrix}$, $(1)(2\ 3)(4)$, cycle de longueur 2

acdb : $\begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix}$, $(1)(2\ 3\ 4)$, cycle de longueur 3

adbc : $\begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}$, $(1)(2\ 4\ 3)$, cycle de longueur 3

adcb : $\begin{pmatrix}1234\\1432\end{pmatrix}$, $(1)(2\ 4)(3)$, cycle de longueur 2

bacd : $\begin{pmatrix}1234\\2134\end{pmatrix}$, $(1\ 2)(3)(4)$, cycle de longueur 2

badc : $\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}$, $(1\ 2)(3\ 4)$

bcad : $\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}$, $(1\ 2\ 3)(4)$, cycle de longueur 3

bcda : $\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}$, $(1\ 2\ 3\ 4)$, cycle de longueur 4

bdac : $\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}$, $(1\ 2\ 4\ 3)$, cycle de longueur 4

bdca : $\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}$, $(1\ 2\ 4)(3)$, cycle de longueur 3

cabd : $\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}$, $(1\ 3\ 2)(4)$, cycle de longueur 3

cadb : $\begin{pmatrix}1234\\3142\end{pmatrix}$, $(1\ 3\ 4\ 2)$, cycle de longueur 4

cbad : $\begin{pmatrix}1234\\3214\end{pmatrix}$, $(1\ 3)(2)(4)$, cycle de longueur 2

cbda : $\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}$, $(1\ 3\ 4)(2)$, cycle de longueur 3

cdab : $\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}$, $(1\ 3)(2\ 4)$

cdba : $\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}$, $(1\ 3\ 2\ 4)$, cycle de longueur 4 *dabc* : $\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$, (1 4 3 2), cycle de longueur 4

dacb : $\begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix}$, (1 4 2)(3), cycle de longueur 3

dbac : $\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}$, (1 4 3)(2), cycle de longueur 3

dbca : $\begin{pmatrix}1234\\4231\end{pmatrix}$, (1 4)(2)(3), cycle de longueur 2

dcab : $\begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}$, (1 4 2 3), cycle de longueur 4

dcba : $\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}$, (1 4)(2 3)

e) On observe qu'il y a 6 cycles de longueur 2, 8 cycles de longueurs 3 et 6 cycles de longueur.

3. a) On compose σ_2 puis σ_1 :

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3

On constate bien que $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

b) $\sigma_1 \circ \sigma_1$ est la permutation identité σ_5.

c) $\sigma_2 \circ \sigma_3$ (on applique σ_3 en premier) :

1	2	3	4
1	3	2	4
3	1	4	2

$\sigma_3 \circ \sigma_2$ (on applique σ_2 en premier) :

1	2	3	4
3	4	1	2
2	4	1	3

On constate qu'on obtient deux permutations différentes.

4. a) $\sigma \circ \sigma^{-1}$ (on applique σ^{-1} en premier) :

1	2	3	4
4	1	2	3
1	2	3	4

On retrouve bien la permutation identité (1)(2)(3)(4).

b) Inverse de σ_2 : $\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}$

Inverse de σ_5 : $\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}$

Inverse de σ_6 : $\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}$

c) L'inverse d'un cycle de longueur 2 est ce même cycle.

d) $\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\1324\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\1423\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\1342\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\1432\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\2134\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\3142\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\3124\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\2314\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\3142\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\2413\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\3214\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\4132\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\2431\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\4231\end{pmatrix}$: son propre inverse

$\begin{pmatrix}1234\\4312\end{pmatrix}$: inverse $\begin{pmatrix}1234\\3421\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}$: son propre inverse

98 Il y a 19 emplacements disponibles pour deux chansons successives dans une playlist de 20 titres. Pour chacun de ces emplacements, on choisit 2 titres

parmi les 3 des Beatles et on les ordonne, ce qui donne $3 \times 2 = 6$ possibilités.
On peut ensuite classer les 18 autres chansons dans n'importe quel ordre, ce qui donne 18! possibilités.
On obtient ainsi $19 \times 6 \times 18!$.
Mais en procédant ainsi, on a compté deux fois les cas où les trois chansons des Beatles sont l'une à la suite de l'autre. Comptons le nombre de fois où cela se produit.
Il y a 18 emplacements disponibles pour trois chansons successives dans une playlist de 20 titres.
Pour chacun de ces emplacements, on peut placer les trois chansons des Beatles dans n'importe quel ordre, ce qui donne $3 \times 2 = 6$ possibilités.
On peut ensuite classer les 17 autres chansons dans n'importe quel ordre, ce qui donne 17! possibilités.
On obtient ainsi $18 \times 6 \times 17!$.
Le nombre de playlists avec deux chansons des Beatles successives est donc
$19 \times 6 \times 18! - 18 \times 6 \times 17!$
$= 19 \times 6 \times 18! - 6 \times 18!$
$= 18 \times 6 \times 18!$
Or le nombre total de façons d'ordonner la playlist est 20!. Donc la probabilité qu'il y ait deux chansons des Beatles successives est :

$$\frac{18 \times 6 \times 18!}{20!} = \frac{18 \times 6}{20 \times 19} = \frac{27}{95}.$$

99 Ranger $m + n$ éléments en deux groupes de m et n objets respectivement revient à choisir m éléments parmi $m + n$, le groupe de n étant alors constitué des éléments restants. Le nombre de façons de ranger ainsi ces $m + n$ éléments est donc :

$$\frac{(m+n)!}{m!(m+n-m)!} = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Pour ranger $m + n + k$ éléments en trois groupes de m, n et k objets respectivement, il faut d'abord constituer un groupe de m objets et un groupe de $n + k$ objets.
Le nombre de façons de le faire est $\dfrac{(m+n+k)!}{m!(n+k)!}$.
Puis, il faut ranger les $n + k$ objets en deux groupes de n et k objets respectivement.
Le nombre de façons de le faire est $\dfrac{(n+k)!}{n!k!}$.
Le nombre total de tels rangements est donc :

$$\frac{(m+n+k)!}{m!(n+k)!} \times \frac{(n+k)!}{n!k!} = \frac{(m+n+k)!}{m!n!k!}.$$

3 Vecteurs, droites et plans de l'espace

Questions-Tests

1 (2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$

2 (3) CDFE est un parallélogramme.

3 (3) $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$ d'après la relation de Chasles.

4 **c)** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ d'après la règle du parallélogramme.

5 **a)** (2) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$
b) (2) $2\vec{v}(-2\,;4)$
c) (3) $\vec{v'}(3\,;-6)$

6 (3) (AB) et (CD) sont parallèles : $\overrightarrow{AB}(5\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(5\,;2)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

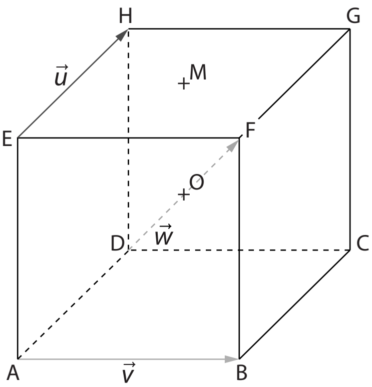
Découvrir

1 Des vecteurs dans l'espace

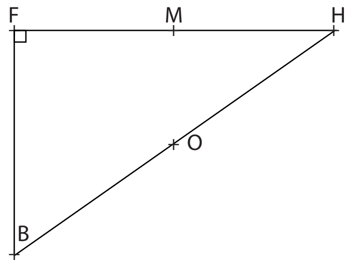
1 **a)** ABFE est un rectangle donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \vec{v}$.
$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$ d'après la règle du parallélogramme.
b) $\overrightarrow{AC}$ est un représentant de $\vec{u} + \vec{v}$: les faces ABCD et EFGH étant identiques, on en déduit que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG}$.

2 **a)** $\vec{w} + \vec{u} = \overrightarrow{DG}$
b) $\vec{w} - \vec{v} = \overrightarrow{DE}$
c) $\vec{u} + \vec{w} - \vec{v} = \overrightarrow{AE}$

3 **a)**



b)



Dans le triangle BFH, O est le milieu de $[BH]$ et M est le milieu de $[FH]$, donc d'après le théorème des milieux, $OM = \frac{1}{2}FB$.

On en conclut que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$.

2 Décomposition de vecteurs

1 **a)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires car ils sont situés dans la face ABCD.
b) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

2 **a)** D'après la relation de Chasles :
$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GI}$..
Or, $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On conclut donc que :
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires.

3 **a)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires car ils n'admettent pas des représentants situés dans un même plan.

b) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Savoir-faire

3 **a)** $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}$ Or $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CB}$, donc $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IB}$.

B est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{HJ}$.

b) $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB}$ d'après la relation de Chasles.

4 **a)** $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HG}$.

On en déduit alors :

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HG}$.

b) D'après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF}$

$\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HE}$.

c) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG}$

d) $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE}$

7 **a)** Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

b) d'après **a)**, on remarque que $\overrightarrow{FH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FJ}$ sont colinéaires donc les points F, H et J sont alignés.

8 **a)** Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

Or d'après la règle du parallélogramme :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

On en déduit : $\overrightarrow{MH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

Avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

b) D'après **a)**, $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MH}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{MH}$ sont colinéaires donc les droites (BJ) et (MH) sont parallèles.

11 Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}$

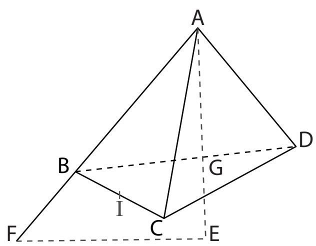
$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

12 **a)**



b) Avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DB})$

$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}\right)$.

Or d'après la règle du parallélogramme :

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

On en déduit que :

$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

c) $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (BCD), d'après **b)**, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont coplanaires donc la droite (EF) est parallèle au plan (BCD).

15 **a)** Le point E n'appartient pas au plan (ABD) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

b) $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$

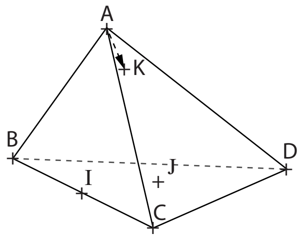
Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HD}$

$\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{KD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}.$

16 **a)**



b) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ donc $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

J est le milieu de [ID] donc $J\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$ donc $K\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right)$.

c) On obtient $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{BC}(-1; 1; 0)$ et $\overrightarrow{CD}(0; -1; 1)$. On cherche s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{CD}$.

On obtient le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{12} = -x \\ \frac{1}{12} = x - y \\ \frac{1}{6} = y \end{cases}$$

Or $-\frac{1}{12} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{4} \neq \frac{1}{12}$.

Il n'existe donc pas deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{CD}$: les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas coplanaires.

18 **a)**

```
def Droite(x,y,z):
    r=x+1
    s=y-1
    t=z-3
    if s==0 and t==-r/2:
        bool=True
    else:
        bool=False
    return bool
```

b)

```
def Droite(x,y,z):
    r=x-4
    s=y+3
    t=z
    if r/3==s/2 and r/3==t/5:
        bool=True
    else:
        bool=False
    return bool
```

19

```
def Paralleles(x,y,z):
    if -x==y/7 and -x==z/5:
        bool=True
    else:
        bool=False
    return bool
```

Acquérir des automatismes

20 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DH}$.

21 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ donc C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.

22 $\vec{v} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$

23 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG}$

24 $\overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}$

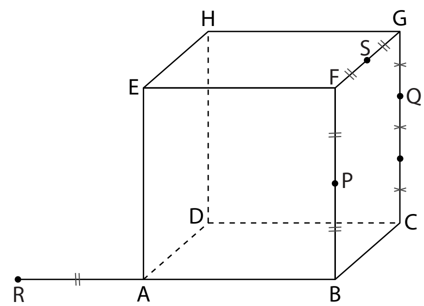
25 **a) Vrai.** $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.

b) Vrai. $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$.

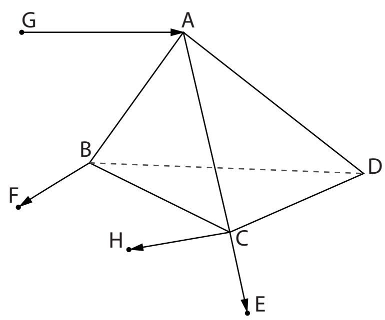
c) Faux. $\overrightarrow{FI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

d) Vrai. $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CJ} = -2\overrightarrow{JC}$.

26



27



28 **a)** $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CH} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FC} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

29 **a)** $\overrightarrow{FJ} = 2\overrightarrow{IC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$

b) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF}$

c) $\overrightarrow{GI} = -\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$

30 **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

31 **a)** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LC} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{BL} = 2\overrightarrow{IL}$

On démontre de même que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{KJ}$.

b) Alors $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ}$ et ILJK est un parallélogramme.

32 **a)** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{OI}$

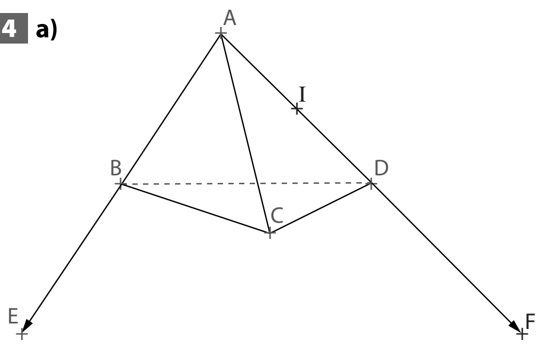
car $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

De même $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) = \vec{0}$ car O est le milieu de [IJ].

33 $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$

34 **a)**



b) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FI} + \overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{FC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{FC} = -2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EF} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

35 Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GI}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DH}$.

Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$

$\overrightarrow{HJ} = -\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

36 Dans le triangle ACD, B est le milieu de [AC] et (CD) est parallèle à (BM) donc d'après le théorème des milieux, M est le milieu de [BE]

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

b) $\overrightarrow{KM} = -\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

c) $\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{LM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$

e) $\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AG}$

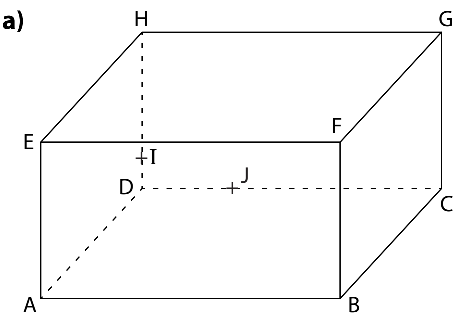
f) $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$

37 **a)** $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$

38 **(1)** vraie **(2)** fausse **(3)** vraie **(4)** fausse

39 **a)**



b) $\overrightarrow{HC}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{AF}$ n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{BG}$ n'est pas colinéaire avec $\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{BE}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{IJ}$.

40 $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FB}$

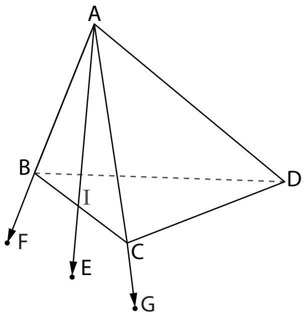
$= \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{DG}$.

41 $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{HF}$ donc :

$\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{DB} = -2(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG})$.

42 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FG}$ donc :
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FH}=-\overrightarrow{HF}$.

43 **a)**



b) avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{FG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{FG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$

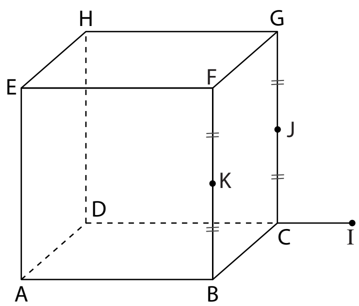
$\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{FE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

Or, $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BI}$ donc $\overrightarrow{FG}=2\overrightarrow{FE}$.

c) D'après **b)** les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires, donc le point E est un point de la droite (FG).

44 **a)**

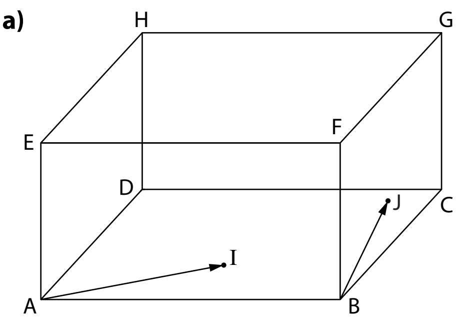


b) $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{CJ}=2\overrightarrow{IJ}$.
Donc les droites (BE) et (IJ) sont parallèles.

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{KJ}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{KJ}$.

Donc les droites (JK) et (BC) sont parallèles.

45 **a)**



b) Avec la relation de Chasles :

• $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

• $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

c) D'après **b)**, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{AG}$ donc les droites (IJ) et (AG) ne sont pas parallèles

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

Il n'existe pas de réels x, y tels que $\overrightarrow{AG}=x\overrightarrow{AI}+y\overrightarrow{AJ}$, donc les droites (IJ) et (AG) ne sont pas coplanaires.

46 **a)** $(A\,;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ définit une base du plan (ACD).

$\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ donc E est un point de (ACD) et $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AD}$ donc F est un point de (ACD).

Les droites (DE) et (CF) sont donc coplanaires.

b) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$

D'après les décompositions précédentes, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{DE}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (CF) et (DE) ne sont pas parallèles. Comme elles sont coplanaires, elles sont donc sécantes.

47 A, I, B, C ou D.

48 $a=0{,}5$ et $b=1$

49 $(\overrightarrow{GK},\overrightarrow{GE})$ forme une base de (GKE). Or J n'appartient pas à ce plan donc les réels x et y n'existent pas.

50 $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$: les vecteurs $\overrightarrow{BJ},\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

51 Les vecteurs $\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IC},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}$ sont coplanaires donc les plans $(J\,;\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IC})$ et $(K\,;\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG})$ sont parallèles.

52

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB})=\overrightarrow{EI}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AI}$.

Donc M appartient au plan $(A\,;\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AI})$.

53 **a)** $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ définit le plan (ABC). Or K est un point de (CD), donc est dans le plan (ABC) : il existe donc deux réels x, y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CA} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

donc $x = \frac{1}{5}$ et $y = 1$.

54 **a)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ donc :

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

b) Le point M appartient au plan (BCD).

55 **a)** d'après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BK}$

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} - \frac{1}{3}\overrightarrow{HG}$

$\overrightarrow{HK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{HG}$

b) D'après **a)**, K appartient au plan (AHG).

56 **a)** $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}$.

b) L'égalité précédente prouve que $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont des vecteurs coplanaires.

57 **a)** $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$ ne sont pas coplanaires.

58 **a)** Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$.

D'après la relation précédente, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

b) d'après **a)**, on en déduit que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCG).

59 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{IJ}$.

De même $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{JK}$.

Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ du plan (BCD) sont colinéaires aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ du plan (IJK), ces deux plans sont donc parallèles.

60 **a)** Oui **b)** Non **c)** Non **d)** Oui

61 **a)** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

c) $\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

d) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

62

A(2 ; 0 ; 0), B(0 ; 4 ; 0), C(0 ; 0 ; 3), D(2 ; 4 ; 3), E(2 ; 4 ; 0)

63

A(1 ; 0 ; 0), B(1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 0), D(0 ; 0 ; 0), E(1 ; 0 ; 1)
F(1;1;1), G(0 ; 1;1), H(0 ; 0 ; 1).

64 **a)** $\overrightarrow{AB}(5\,;-8\,;-2)$

b) $I\left(-\frac{1}{2};1;6\right)$

65 $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GL}$

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

66 **a)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une base de l'espace.

b) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SL}$

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AS}$

67 **a)** $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DI}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $K\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$

68 **a)** $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

b) $\overrightarrow{IB}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{IC}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $\overrightarrow{IS}\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$

69 **a)** $\overrightarrow{AB}(-3\,;-2\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}(9\,;-1;1)$

b) Milieu de [AB] : $I\left(-\dfrac{1}{2};4;3\right)$ et milieu de [CD] : $J\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

70 $\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KC}(-3;-2;2)$ et $K(1;0;-2)$.

71 **a)** $\vec{u}\left(\dfrac{51}{2};-4;4\right)$ **b)** $\vec{v}\left(-2;\dfrac{38}{3};\dfrac{25}{3}\right)$

72 $\overrightarrow{AB}(-6;-2;6)$ et $\overrightarrow{CD}(-12;-4;12)$ donc $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

73 $\overrightarrow{AB}(1;3;-9)$

$\overrightarrow{AC}(-13;-39;117)$

$\dfrac{-13}{1}=\dfrac{-39}{3}=\dfrac{117}{-9}=-13$

$\overrightarrow{AC}=-13\overrightarrow{AB}$

A, B et C sont alignés.

74 $\overrightarrow{AC}(6;4;0)$ et $\overrightarrow{BD}(3;2;0)$ donc $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BD}$ et les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

75 **a)** $\overrightarrow{AB}(3;2;5)$ et $\overrightarrow{AC}(17;19;25)$

b) $\dfrac{17}{3}\neq\dfrac{19}{2}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit donc que le point C n'est pas un point de (AB).

76 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si : $\dfrac{2}{1}=\dfrac{-3}{x}=\dfrac{y}{5}$ c'est-à-dire $x=-\dfrac{3}{2}$ et $y=10$.

77 $\overrightarrow{AB}(2;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AM}(x-1;y;-5)$.

A, B et M sont alignés si, et seulement si :

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{-5}{-1}$, c'est-à-dire $x=11$ et $y=-5$.

78 **a)** $2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}(0;0;0)$

b) $2\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$.

On en déduit que $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$: les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

79 **a)** $\overrightarrow{AB}(2;-3;-3)$.. On cherche s'il existe x, y tels que : $\overrightarrow{AB}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

On obtient le système : $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ 3x+3y=-3 \end{cases}$

On en déduit que $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-3\vec{v}$ et donc le point B est un point du plan $\mathcal{P}$.

b) $\overrightarrow{AC}(1;5;7)$.

On cherche s'il existe x, y tels que : $\overrightarrow{AC}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

On obtient le système : $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \\ 3x+3y=7 \end{cases}$

Or $3\times1+3\times5=18\neq7$ donc le point C n'est pas un point du plan $\mathcal{P}$.

80 **a)** On cherche s'il existe x, y tels que : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

On obtient le système : $\begin{cases} x=1 \\ 3y=3 \\ x+5y=6 \end{cases}$

$(1;1)$ est la solution du système, donc $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$: les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires, donc la droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

b) On cherche s'il existe x, y tels que : $\vec{t}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

On obtient le système : $\begin{cases} x=2 \\ 3y=-3 \\ x+5y=-3 \end{cases}$

$(2;-1)$ est la solution du système, donc $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$: les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires. On en déduit que $(\vec{u},\vec{v})$ et $(\vec{w},\vec{t})$ sont coplanaires : les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles.

Pour se tester

81 **1.** C **2.** B **3.** D **4.** A **5.** C

82 **1.** B et C **2.** A et C **3.** C et D

83 **1)** $\overrightarrow{AB}(2;-4;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(6;-5;2)$.

Or $\dfrac{6}{2}\neq\dfrac{-5}{-4}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

L'affirmation 1 est **fausse**.

2) $\overrightarrow{AD}(3;-6;5)$. On cherche s'il existe x, y tels que : $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

On obtient le système : $\begin{cases} 2x+6y=3 \\ -4x-5y=-6. \\ -3x+2y=5 \end{cases}$

Or ce système n'a pas de solution.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires.

L'affirmation 2 est **fausse**.

3) $\overrightarrow{DE}(-4;1;-5)$

On cherche s'il existe x, y tels que : $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

On obtient le système : $\begin{cases} 2x+6y=-4 \\ -4x-5y=1 \\ -3x+2y=-5 \end{cases}$.

Ce système a pour solution $(1\,;-1)$, donc $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Le point E appartient au plan qui passe par D et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. L'affirmation 3 est **vraie**.

S'entraîner

84 La droite d passant par M de vecteur directeur $\vec{w}$ et le plan $\mathcal{P}$ ne sont pas parallèles car $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$ **est une base de l'espace**.

M′ appartient à $\mathcal{P}$ […]

D'autre part, $\overrightarrow{\mathbf{OM}}=\overrightarrow{\mathbf{OM}'}+\overrightarrow{\mathbf{M'M}}$, $\overrightarrow{M'M}$ et $\vec{w}$ sont **colinéaires** donc il existe un nombre réel c tel que $\overrightarrow{M'M}=c\vec{w}$.

Finalement, $\vec{t}=\boldsymbol{a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}}$.

Unicité

$\vec{w}=\dfrac{a-a'}{c'-c}\vec{u}+\dfrac{b-b'}{c'-c}\vec{v}$, or ceci n'est pas possible car $(\boldsymbol{\vec{u}},\boldsymbol{\vec{v}},\boldsymbol{\vec{w}})$ **est une base de l'espace**, donc $c=c'$.

[…] car $\boldsymbol{\vec{u}}$ **et** $\boldsymbol{\vec{v}}$ **ne sont pas colinéaires**.

85 **(1)** d'après la relation de Chasles :

• $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EK}$

$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH})$

$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

• $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AL}$

$\overrightarrow{IL}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

• d'après la règle du parallélogramme :

$\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$

(2) L'égalité précédente indique que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires.

(3) Le point J appartient au plan définit par $(I\,;\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IL})$ c'est-à-dire le plan (IKL). Ainsi les points I, J, K et L sont coplanaires.

86 **Parcours 1**

On décompose les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EM}$ sur la base $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$:

• $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$

• $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{EM}=-\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{EM}=-\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FI})$

$\overrightarrow{EM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FH}$

$\overrightarrow{EM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH})$

$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

On en déduit que $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$: les vecteurs $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires.

On en déduit que les points E, M et C sont alignés.

Parcours 2

1. a) $\overrightarrow{O_2I}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1N}+\overrightarrow{O_1P})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1H}+\overrightarrow{HN}+\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{AP})=\frac{k}{2}(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{AC})$

b) $\overrightarrow{O_1I}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2N}+\overrightarrow{O_2P})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2F}+\overrightarrow{FN}+\overrightarrow{O_2C}+\overrightarrow{CP})$

$=\frac{k-1}{2}(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{AC})$

c) $(k-1)\overrightarrow{O_1I}=k\overrightarrow{O_2I}$ donc $\overrightarrow{O_1I}$, $\overrightarrow{O_2I}$, sont colinéaires, I, O_1 et O_2 sont alignés.

87 On cherche la décomposition des vecteurs sur la base $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$:

• $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{EG}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{EG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

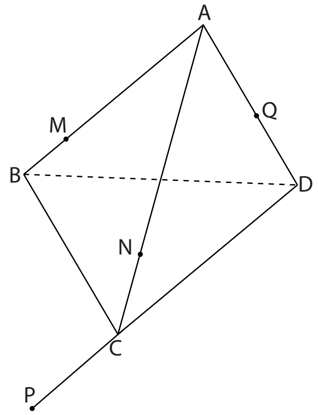
• $\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DK}$

$\overrightarrow{EK}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA})+\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EK}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$

On remarque donc que $\overrightarrow{EK}=3\overrightarrow{EG}$: les vecteurs $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires et donc les points E, K et G sont alignés.

88 **a)**



b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM}$

$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MQ}$ sont des vecteurs coplanaires, donc les points M, N, P et Q appartiennent à un même plan.

89 **a)** Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ}$

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AK}$

b) d'après **a)**, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires. On en déduit que la droite (IJ) est parallèle au plan (AKD).

90 **a)** Les vecteurs $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires donc $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est une base.

b) Avec la relation de Chasles :

• $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BS}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AS} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

• $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$

$\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CS}$

$\overrightarrow{IK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AS} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AS} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

• $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}$

$\overrightarrow{IL} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{DS}$

$\overrightarrow{IL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$

c) Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont coplanaires s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{IK} = x\overrightarrow{IJ} + y\overrightarrow{IL}$.

Or d'après les décompositions obtenues à la question **b)**, il est impossible de trouver x et y.

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IL}$ ne sont pas coplanaires et donc les points I, J, K et L ne sont pas coplanaires.

91 **a)** Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GM}$

$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CM}$

$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{GF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GH}$

$\overrightarrow{HM} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF}) + \overrightarrow{GJ}$

$\overrightarrow{HM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GJ}$

b) D'après la question **a)**, les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont coplanaires. Or $(\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GJ})$ définit une base du plan (EGJ). On en déduit que la droite (HM) est parallèle au plan (EGJ).

92 **a)** Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GL}$

$\overrightarrow{KL} = -\lambda\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{KL} = \lambda\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{FE} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

On en déduit que :

$$\overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{FE} + \lambda\overrightarrow{FC}.$$

On peut donc conclure que les vecteurs $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont coplanaires.

c) $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FC})$ définit une base du plan (CEF), on en déduit donc que la droite (FE) est parallèle au plan (CEF).

93 **Parcours 1**

$\overrightarrow{AB}(1\,;1\,;-1)$, $\overrightarrow{AC}(0\,;5\,;-1)$.

$\frac{0}{1} \neq \frac{5}{1}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On peut donc conclure que les points A, B et C définissent un plan.

Cherchons si $\vec{u}$ est coplanaire avec les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On cherche s'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{u} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Cette égalité est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x = -1 \\ x + 5y = 2 \\ -x - y = 1 \end{cases}$$

Or ce système n'a pas de solution puisque l'équation 2 donne $y = \frac{3}{5}$ et l'équation 3 donne $y = 0$.

Donc $\vec{u}$ n'est pas coplanaires avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ qui définit une base du plan (ABC).

On peut donc en conclure que la droite d est sécante avec le plan (ABC).

Parcours 2

a) $\overrightarrow{AB}(-2\,;0\,;1)$, $\overrightarrow{AC}(-2\,;2\,;1)$.

$\frac{-2}{-2} \neq \frac{0}{2}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On peut donc conclure que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) On cherche s'il existe deux réels x et y tels que : $\vec{k} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

Cette égalité est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Or ce système n'a pas de solution puisque l'équation 1 donne $x = 0$ et l'équation 3 donne $x = 1$. Donc $\vec{k}$ n'est pas coplanaire avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Les vecteurs $\vec{k}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires, on peut donc en déduire que la droite d est sécante avec le plan (ABC).

94 $\overrightarrow{AB}(4\,;-6\,;-2)$ et $\overrightarrow{AM}(2\,;a-4\,;b-5)$.

Les points A, B et M sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} 2(a-4) = -6 \\ 2(b-5) = -2 \end{cases}$$

soit $a = 1$ et $b = 4$.

95 **1. a)** $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.

2. a) $P\left(0\,;\frac{1}{3}\,;1\right)$, $Q\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$ donc $K\left(\frac{1}{6}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{6}\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$ et $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}\,;1\,;0\right)$.

On remarque que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires, donc les points I, J et K sont alignés.

96 **a)** $\overrightarrow{AM}(-2\,;0\,;-6)$

On en déduit que $\overrightarrow{AM} = -2\vec{u}$. $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et donc le point M appartient à la droite d.

b) $\overrightarrow{BM}(1\,;-3\,;-11)$

On en déduit que $\overrightarrow{BM} = -2\vec{v}$.

$\overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc le point M appartient à la droite d'.

c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d et d' ne sont pas parallèles. De plus, elles ont un point commun M, donc elles sont sécantes en M.

97 **1. a)** $\overrightarrow{AB}(-4\,;7\,;10)$. On cherche s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}$, ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + 4y = 7 \\ 5y = 10 \end{cases}.$$

$x = -1$ et $y = 2$ est la solution du système. $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + 2\vec{v}$: le point B est un point du plan $\mathcal{P}$.

b) A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ donc la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}$: le point M est donc un point de $\mathcal{P}$.

2. a) $\overrightarrow{AC}(10\,;-7\,;-8)$. On cherche s'il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}$, ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + 4y = -7. \\ 5y = -8 \end{cases}$$

Or ce système n'admet pas de solution. On peut donc en conclure que le point C n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

c) La droite (MC) et le plan $\mathcal{P}$ sont donc sécants en M.

98 **1.** Soit E le milieu de [IJ], $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{EJ} = \vec{0}$ donc :

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$,

d'où $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{EL} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} = \vec{0}$.

E est donc aussi le milieu de [KL] et [MN].

2. Dans la question précédente :

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

3. $4\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ donc :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ et $E\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$.

4. a) $I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$ donc $\overrightarrow{EI}\left(\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{4}\right)$

et $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

$K\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ donc $\overrightarrow{EK}\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{4}\right)$

et $\overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

$M\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{EM}\left(\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$

et $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{EI}$, $\overrightarrow{EK}$ et $\overrightarrow{EM}$ ne sont pas coplanaires donc $(E\,;\overrightarrow{EI},\overrightarrow{EK},\overrightarrow{EM})$ est un repère de l'espace.

99 $M(x\,;y\,;z)$ est un point de $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe deux réels a, b tels que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x = 1 + a + 2b \\ y = -1 + a - b \\ z = 3 + 3b \end{cases}$$

a) M est dans le plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ si, et seulement si, $z = 0$. Ce qui est équivalent à $b = -1$.

On a alors $\begin{cases} x = -1 + a \\ y = a \\ z = 0 \end{cases}$

L'intersection de $\mathcal{P}$ et du plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est la droite qui passe par le point $B(-1\,;0\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u'}(1;1;0)$.

b) M est dans le plan $(O\,;\vec{i},\vec{k})$ si, et seulement si, $y = 0$ ce qui est équivalent à $b = -1 + a$.

On a alors $\begin{cases} x = -1 + 3a \\ y = 0 \\ z = 3a \end{cases}$

L'intersection de $\mathcal{P}$ et du plan $(O\,;\vec{i},\vec{k})$ est la droite qui passe par le point $(-1;0\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{v'}(1;0\,;1)$.

c) M est dans le plan $(O\,;\vec{j},\vec{k})$ si, et seulement si, $x = 0$ ce qui est équivalent à $a = -1 - 2b$.

On a alors $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 - 3b \\ z = 3 + 3b \end{cases}$

L'intersection de $\mathcal{P}$ et du plan $(O\,;\vec{j},\vec{k})$ est la droite qui passe par le point $D(0\,;-2\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{w'}(0\,;-1;1)$.

100 **1. a)** $\overrightarrow{AB}\left(-3\,;-\frac{3}{2}\,;-\frac{9}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(1;\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

b) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan.

2. $\overrightarrow{EF}\left(-1;-\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$.

On remarque que $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires. Par conséquent la droite (EF) est parallèle au plan (ABC).

101 **1. a)** $\overrightarrow{AB}(-3\,;0\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;-2\,;-1)$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C déterminent un plan.

b) $\overrightarrow{OD}(6\,;0\,;-1)$ et $\overrightarrow{OE}(0\,;3\,;1)$ ne sont pas colinéaires, donc O, D et E déterminent un plan.

2. a) Le système $\begin{cases} -3a - b = 6 \\ -2b = 0 \\ -a - b = -1 \end{cases}$ n'a pas de solution.

Il n'existe pas de nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{OD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas coplanaires.

b) $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont donc pas parallèles, ils sont sécants suivant une droite d.

102 **1. a)** $\vec{t} = -\vec{u} + 3\vec{v}$ et $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$

b) les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

2. a) $\overrightarrow{AB}(-3\,;3\,;6)$.

Le système $\begin{cases} 2a = -3 \\ a + 2b = 3 \\ -a + b = 6 \end{cases}$ n'admet pas de solution, donc il n'existe pas de réels tels que $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Le point B n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$.

b) Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont strictement parallèles.

103 **a)** $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ n'admet pas de solution donc il n'existe pas de réels tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Par suite la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

b) $\overrightarrow{MK}(-6\,;6\,;0)$.

On remarque que $\overrightarrow{MK} = -6\vec{u}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MK}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et par conséquent le point K est un point de $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{NK}(-2\,;4\,;-6)$.

On remarque que $\overrightarrow{NK} = 2\vec{w}$. Les vecteurs $\overrightarrow{NK}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et par conséquent le point K est un point de d.

On peut donc conclure que K est le point d'intersection de d et $\mathcal{P}$.

104 **1. a)** $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$

b) $\overrightarrow{EB}(0\,;1;-1)$ et $\overrightarrow{EG}(-1;1;0)$.

2. M est un point de la droite (DF) si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DF}$, ce qui est équivalent à $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$.

M est un point du plan (EBG) si, et seulement si, il existe deux réels a, b tels que $\overrightarrow{EM} = a\overrightarrow{EB} + b\overrightarrow{EG}$ ce qui est équivalent à $\begin{cases} x-1=-b \\ y=a+b \\ z-1=-a \end{cases}$

M est l'intersection de (DF) et de (EBG) si, et seulement si, $\begin{cases} k-1=-b \\ k=a+b. \\ k-1=-a \end{cases}$

Ce qui est équivalent à $\begin{cases} b=\dfrac{1}{4} \\ a=\dfrac{1}{2}. \\ k=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

Le point M a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

105 **1. a)** $\begin{cases} 2x+y=-2 \\ -3y=-1 \\ -2x=1 \end{cases}$ n'admet pas de solution donc il n'existe pas de réels tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires. Par suite la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

b) On note $K(x\,;y\,;z)$ le point d'intersection cherché. K est un point de $\mathcal{P}$ donc il existe deux réels a, b tels que :

$\overrightarrow{AK} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} x+2=2a+b \\ y-3=-3b \\ z=-2a \end{cases}.$$

K est un point de d donc il existe un réel c tels que :

$\overrightarrow{AK} = c\vec{w}$, ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} x-5=-2c \\ y=-c \\ z+2=c \end{cases}.$$

Ces deux systèmes sont équivalents à :

$$\begin{cases} 2a+b+2c=7 \\ -3b+c=-3. \\ 2a+c=2 \end{cases}$$

2. Les coordonnées de K sont $\begin{cases} x=5-2\times 3=-1 \\ y=-3 \\ z=-2+3=1 \end{cases}.$

106 **a)** L'affirmation est vraie : $\vec{w}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles et passent par A, ils sont donc confondus.

b) L'affirmation est vraie car $\vec{w}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$.

c) L'affirmation est vraie : $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ ne sont pas parallèles car $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, ces deux plans sont donc sécants.

d) L'affirmation est vraie : $\vec{w}$ est un vecteur de $\mathcal{P}$ donc la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont parallèles.

107 **a)** Cette implication est fausse.

b) Réciproque : Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs non coplanaires, alors ils sont deux à deux non colinéaires. Cette implication est vraie.

108 **Partie A**

2. a) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$, soit :

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Partie B

1. a) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG'} + \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D})$

$\overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} + \overrightarrow{G'D} = \overrightarrow{G'I} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{G'I} + \overrightarrow{IC} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{ID}$

$= 2\times\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DI} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{ID} = \vec{0}$

Donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG'}$: les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AG'}$ sont colinéaires donc G est un point de la droite (AG').

b) Par le même raisonnement, on obtient :

$\overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$ et $\overrightarrow{BG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BG''}$,

donc le point G est un point de la droite (BG'').

$\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CG_1}$,

donc le point G est un point de la droite (CG_1).

$\overrightarrow{DG} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$ et $\overrightarrow{DG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DG_2}$,

donc le point G est un point de la droite (DG_2).

c) Les droites (AG'), (BG'') (CG_1) et (DG_2) sont concourantes en G.

2. a) Avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{GK} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

On en déduit que :

$2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GK} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$.

Le point G est le milieu de [IK].

b) Par le même raisonnement :

$\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{GL} + \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

On en déduit que :

$2\overrightarrow{GL} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{GL} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$.

Le point G est le milieu de [JL].

Par le même raisonnement :

$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Or $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{NB}=\vec{0}$.

On en déduit que $2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$, soit $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}$.

Le point G est le milieu de [MN].

c) les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en G et G est le milieu de chacun des segments.

109 $(S;\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC})$ définit un repère de l'espace.

Dans ce repère $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et comme $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC})$,

$O\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ et $G\left(\frac{1}{3};0;\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{IC}\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$ et $\overrightarrow{IG}\left(-\frac{1}{6};0;\frac{1}{3}\right)$ sont colinéaires car $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$: les points I, C et G sont donc alignés.

110 a) $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ définit un repère de l'espace. $(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HJ})$ sont des vecteurs directeurs du plan (AHJ).

$\overrightarrow{HA}(0;-1;-1)$ et $\overrightarrow{HJ}\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$.

M est le milieu de [IG] donc $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ et $\overrightarrow{HM}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$.

On en déduit donc que $\overrightarrow{HM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HJ}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HJ}$ sont coplanaires et donc le point M est un point du plan (HAJ).

b) La droite (IG) et le plan (AHJ) sont sécants en M.

111 $K\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$

$\overrightarrow{AD}(0;1;0)$, $\overrightarrow{AF}(1;0;1)$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AF}\\ \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}\end{array}\right\}$ Les points A, D, F, G et K sont coplanaires, les plans (AKG) et (ADF) coïncident.

112 $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}$ donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et par conséquent la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont parallèles.

113 $(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CK})$ sont des vecteurs directeurs du plan (CGK).

$\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, on en déduit que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{CL}\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{CG}(0;0;1)$ et $\overrightarrow{CK}\left(-1;-\frac{1}{3};0\right)$

Il n'existe pas de réels x, y tels que $\overrightarrow{CL}=x\overrightarrow{CG}+y\overrightarrow{CK}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CK}$ ne sont pas coplanaires et le point L n'appartient pas à (CGK).

114 a) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $P(1;1;0)$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $Q(1;0;1)$

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$, $R(0;1;1)$

b) $\overrightarrow{BR}(-1;1;1)$ et $\overrightarrow{DP}(1;1;-1)$ ne sont pas colinéaires donc elles ne sont pas parallèles.

On note $M(x;y;z)$ un point de la droite (BR) et (DP), on a donc $\overrightarrow{BM}=k\overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{DM}=k'\overrightarrow{DP}$, soit les systèmes :

$$\begin{cases}x-1=-k\\ y=k\\ z=k\end{cases} \text{ et } \begin{cases}x=k'\\ y=k'\\ z-1=-k'\end{cases}$$

On obtient alors le système :

$$\begin{cases}1-k=k'\\ k=k'\\ k=1-k'\end{cases} \text{ qui a pour solution } k=k'=\frac{1}{2}.$$

Les droites (BR) et (DP) sont donc sécantes en $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

c) $\overrightarrow{CM}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ est colinéaire avec $\overrightarrow{CQ}(1;-1;1)$ donc M est un point de la droite (CQ).

Les droites (BR), (CQ) et (DP) sont donc concourantes en M.

115 $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ définit un repère.

Dans ce repère les points ont pour coordonnées :

$B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ et $J\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $H(0;1;1)$

M est le milieu de [IJ], donc $M\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

$\overrightarrow{BC}(0;1;0)$, $\overrightarrow{BH}(-1;1;1)$ et $\overrightarrow{BM}\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

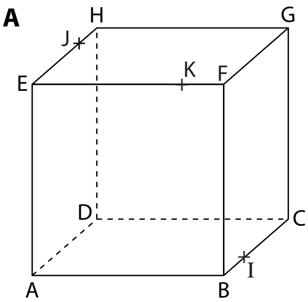
On en déduit que : $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BH}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires et donc les points B, C, M et H sont coplanaires.

Objectif BAC

116 Partie A

1. a)



b) $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $J\left(0;\frac{2}{3};1\right)$ et $K\left(\frac{3}{4};0;1\right)$

c) $\overrightarrow{IJ}\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$ est un vecteur directeur de (IJ) et $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{3};1\right)$ est un vecteur directeur de (IK).

2. a) $C(1;1;0)$ et $D(0;1;0)$ donc un point appartient à [CD] s'il existe un réel a tel que $L(a;1;0)$ et $0 \leqslant a \leqslant 1$

b) $\overrightarrow{IL}\left(a-1;\frac{2}{3};0\right)$.

Le point L est un point du plan (IJK) si : $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IK}$

On en déduit que $a-1 = -\frac{3}{4}$, soit $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

1. a) $\overrightarrow{IL}\left(-\frac{3}{4};\frac{2}{3};0\right)$ et $\overrightarrow{KJ}\left(-\frac{3}{4};\frac{2}{3};0\right)$ donc $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ}$:

IKJL est un parallélogramme.

b) Le milieu de [IJ] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

c) (IJ) et (KL) sont les diagonales du parallélogrammes IKJL, elles sont donc sécantes.

2. a) $\overrightarrow{IJ}\left(-1;\frac{1}{3};1\right)$ et $\overrightarrow{BH}(-1;1;1)$ ne sont pas colinéaires donc les droites (IJ) et (BH) ne sont pas parallèles.

I est un point de (BC) et J est un point de (EH) donc (IJ) et (BH) sont dans le plan (BCH).

Elles sont donc sécantes.

b) On note O le centre du cube.

$O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{IO}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$ et on remarque que $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$: les vecteurs $\overrightarrow{IO}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires et donc O est un point du plan (IJK).

3. a) M est un point de (HG) donc $M(a;1;1)$ où a est un nombre réel.

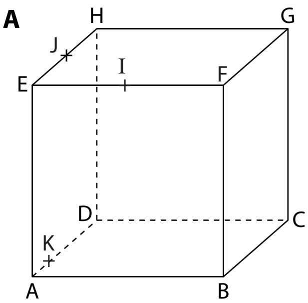
$\overrightarrow{MF}(1-a;-1;0)$ et $\overrightarrow{IL}\left(-\frac{3}{4};\frac{2}{3};0\right)$ sont colinéaires si $\overrightarrow{IL} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MF}$, soit $-\frac{2}{3}(1-a) = -\frac{3}{4}$, c'est-à-dire $a = -\frac{1}{8}$.

Donc $M\left(-\frac{1}{8};1;1\right)$

b) $\overrightarrow{MF}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{IL}$ donc coplanaires avec $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IJ}$ qui sont deux vecteurs directeurs du plan (IJK). Par conséquent, la droite (MF) est parallèle au plan (IJK).

117 Partie A

1.



2. a) $\overrightarrow{AE}(0;0;1)$ est un vecteur directeur de la droite (AE).

b) $\overrightarrow{FH}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{FK}\left(-1;\frac{1}{4};-1\right)$ sont deux vecteurs directeurs de (FHK).

c) On cherche s'il existe deux réels x, y tels que $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{FH} + y\overrightarrow{FK}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x-y=0 \\ x+\frac{1}{4}y=0. \\ -y=1 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{FK}$ ne sont pas coplanaires et on peut donc en conclure que la droite (AE) n'est pas parallèle au plan (FHK).

Partie B

1. a) M est un point de la droite (AE) donc il existe un réel a tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ donc $M(0;0;a)$

b) M est un point du plan (FHK) si les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HK}$ sont coplanaires, donc s'il existe deux réels x, y tels que : $\overrightarrow{HM} = x\overrightarrow{HF} + y\overrightarrow{HK}$.

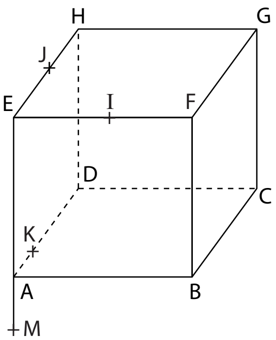
c) D'après la question **1. a)**, le point $\left(0;0;-\frac{1}{3}\right)$ est un point de la droite (AE).

De plus $\overrightarrow{HM}\left(0;-1;-\frac{4}{3}\right)$ et $\overrightarrow{HK}\left(0;-\frac{3}{4};-1\right)$ sont colinéaires car $\overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$ et donc $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{HK}$ sont coplanaires.

Ainsi M est un point du plan (FHK).

En conclusion, M est le point d'intersection de la droite (AE) et du plan (FHK) et $\overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HM}$, soit $x = 0$ et $y = \frac{3}{4}$.

2.



Partie C

1. $\overrightarrow{AM}(-2\,;-1\,;-8)$ On cherche s'il existe deux réels x, y tels que : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système : $\begin{cases} -x = -2 \\ y = -1. \\ -3x + 2y = -8 \end{cases}$

Le système a pour solution $x = 2$ et $y = -1$ donc $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \vec{v}$. Les vecteurs sont coplanaires. Le point M est un point de $\mathscr{P}$.

L'affirmation 1 est **vraie**.

2. On cherche s'il existe deux réels x, y tels que : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = 1 \\ y = -2. \\ -3x + 2y = 4 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. Les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ne sont pas coplanaires donc la droite d n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$.

L'affirmation 2 est **fausse**.

3. On cherche s'il existe deux réels x, y tels que : $\vec{u'} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = -1 \\ y = 1 \\ -3x + 2y = -1 \end{cases}$$

$x = 1$ et $y = 1$ est la solution du système donc $\vec{u'} = \vec{u} + \vec{v}$: les vecteurs $\vec{u'}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

On cherche s'il existe deux réels x, y tels que : $\vec{v'} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = -3 \\ y = 2 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$x = 3$ et $y = 2$ est la solution du système donc $\vec{v'} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$: les vecteurs $\vec{v'}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

Ainsi les vecteurs $\vec{u'}$, $\vec{v'}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.
Le plan $\mathscr{Q}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

L'affirmation 3 est **vraie**.

118 **a.** (1) **b.** (3) **c.** (2) **d.** (2)

119 Position de deux droites de l'espace :
– Elles sont soit <u>coplanaires</u>, soit <u>non coplanaires</u>.
Si elles sont coplanaires, elles sont soit <u>confondues</u>, soit <u>strictement parallèles</u>, soit <u>sécantes</u>. Leur intersection est un **point**.
Position de deux plans de l'espace :
- Ils sont soit <u>strictement parallèles</u>, soit <u>confondus</u>, soit <u>sécants</u>. Leur intersection est une **droite**.
Position d'une droite et d'un plan de l'espace :
- Ils sont soit <u>strictement parallèles</u>, soit <u>la droite est incluse dans le plan</u>, soit ils sont <u>sécants</u>. Leur intersection est un **point**.

120 **Solution 1 : repère**

On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

• I est le milieu de $[AD]$: $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

• $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$: $J\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

• $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$: $K\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$

• $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$: $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$

• $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$ avec la relation de Chasles :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$: $E(0\,;-1\,;2)$

$\overrightarrow{IE}\left(0\,;-1\,;\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$ et $\overrightarrow{IG}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{2}\right)$.

On cherche s'il existe deux réels x, y tels que $\overrightarrow{IE} = x\overrightarrow{IJ} + y\overrightarrow{IG}$ ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{y}{3} = -1 \\ -\frac{y}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad x = 2 \text{ et } y = -3$$

est la solution du système, donc : $\overrightarrow{IE} = 2\overrightarrow{IJ} - 3\overrightarrow{IG}$ les vecteurs sont coplanaires et on peut conclure que le point E est un point du plan (IJG).

Solution 2 : décomposition de vecteurs

Avec la relation de Chasles :

• $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

• $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right)$

$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

• $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

On remarque alors que :

$\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ} - \frac{1}{3}\overrightarrow{IE}$ Les vecteurs $\overrightarrow{IG}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IE}$ sont coplanaires donc le point E est un point du plan (IJG).

121 **1.** $\overrightarrow{AB}(-2\,;-1\,;-6)$ On cherche s'il existe deux réels x, y tels que :

$\overrightarrow{AB} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = -2 \\ x + y = -1 \\ 2y = -6 \end{cases}$$

$x = 2$ et $y = -3$ sont solution du système, donc $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$.

Le point B est un point de $\mathscr{P}$.

L'affirmation 1 est **vraie**.

2. $\overrightarrow{AC}(2\,;2\,;-2)$ et $\vec{u}(-1;1;0)$ ne sont pas colinéaires donc la point A n'est pas un point de la droite qui passe par C et qui est dirigée par $\vec{u}$.

L'affirmation 2 est **fausse**.

3. On cherche s'il existe deux réels x, y tels que :

$\vec{v'} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = 2 \\ x + y = -1 \\ 2y = 3 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution. Donc les vecteurs $\vec{v'}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ ne sont pas coplanaires : le droite d n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$.

L'affirmation 3 est **fausse**.

4. On cherche s'il existe deux réels x, y tels que :

$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ ce qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} -x = 1 \\ x + y = 0 \quad x = -1 \text{ et } y = 1 \\ 2y = 2 \end{cases}$$

est la solution du système, donc $\vec{w} = -\vec{u} + \vec{v}$: $\vec{w}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires. De plus, $\vec{t} = -2\vec{v}$ donc $\vec{t}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires. Ainsi les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires. Le plan $\mathscr{Q}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$. L'affirmation 4 est **vraie**.

Pour aller plus loin

122 **Partie A.**

1. a) Avec la relation de Chasles :

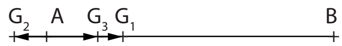
$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ soit $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

b) Il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ donc tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

2. a) $ak\overrightarrow{GA} + bk\overrightarrow{GB}$ Comme $ak + bk \neq 0$ on conclut que G est le barycentre de (A, ka) et (B, kb).

b) $a\overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $a \neq 0$ on en déduit que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ c'est-à-dire que G est le milieu de [AB].

3.



a) $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AG_2} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AG_3} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Partie B

1. On suppose qu'il existe deux points G_1, G_2 vérifiant l'égalité donnée. On obtient alors :

$a\overrightarrow{G_1G_2} + b\overrightarrow{G_1G_2} + c\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$,

soit $(a + b + c)\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$.

Or $a + b + c \neq 0$ donc $\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0}$: le point G est unique.

2. a) $ak\overrightarrow{GA} + bk\overrightarrow{GB} + ck\overrightarrow{GC}$ et $ka + kb + kc \neq 0$ donc G est le barycentre de (A, ka), (B, kb) et (C, kc).

b) Avec la relation de Chasles,

$a\overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{AC} = \vec{0}$,

soit $3a\overrightarrow{GA} + a\overrightarrow{AB} + a\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ avec $a \neq 0$,

donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

3. a) Avec la relation de Chasles :

$(a + b)\overrightarrow{GH} + a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Or H est le barycentre de (A, a) et (B, b) donc

$a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} = \vec{0}$, ce qui donne :

$$(a + b)\overrightarrow{GH} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

b) $a + b + c \neq 0$ donc d'après **3. a)**, G est donc le barycentre de $(H, a + b)$ et (C, c).

4. Par identification des coordonnées :

$a(x_A - x_G) + b(x_B - x_G) + c(x_C - x_G) = 0$

soit $x_G = \frac{a}{a+b+c}x_A + \frac{b}{a+b+c}x_B + \frac{c}{a+b+c}x_C$

Par analogie, on obtient :

$$y_G = \frac{a}{a+b+c}y_A + \frac{b}{a+b+c}y_B + \frac{c}{a+b+c}y_C$$

$$z_G = \frac{a}{a+b+c}z_A + \frac{b}{a+b+c}z_B + \frac{c}{a+b+c}z_C$$

5. a) I est le milieu de [BC] donc d'après l'exercice précédent, I est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$.
Par associativité du barycentre, on en déduit que G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(I, 2)$.

On en déduit que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et donc G est un point de la médiane (AI).

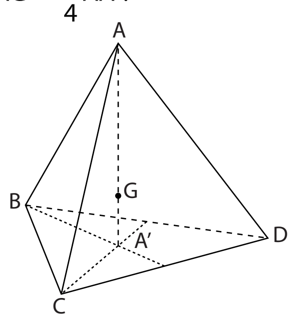
b) On note J le milieu de [AB].
J est le barycentre de $(B, 1)$ et $(A, 1)$, donc par associativité, G est le barycentre de $(C, 1)$ et $(J, 2)$.

On en déduit que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$ donc $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont colinéaires et donc G est un point de la médiane (CJ).
On note K le milieu de [AC]. K est le barycentre de $(C, 1)$ et $(A, 1)$, donc par associativité, G est le barycentre de $(B, 1)$ et $(K, 2)$.

On en déduit que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$ donc $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires et donc G est un point de la médiane (BK).
On en conclut que les médianes (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

123 **1. a)** On pose A′ le barycentre des points $(D, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

Par associativité, G est le barycentre de $(A', 3)$ et $(A, 1)$, donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.



On en déduit donc que G est un point de [AA′].

b) De manière analogue, on montre que G appartient à (BB′), (CC′) et (DD′) où B′ est le barycentre de (A,1), (C,1) et (D,1), C′ est le barycentre de (A,1), (B,1) et (D,1) et D′ est le barycentre de (A,1), (B,1) et (C,1).
On note I le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [AC], L celui de [AD], M celui de [CD] et N celui de [BD].
On sait que I est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$ et M est le barycentre de $(C, 1)$ et $(D, 1)$, donc par associativité, G est le barycentre de $(I, 2)$ et $(M, 2)$ et donc G est le milieu de [IM].
On sait que J est le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, 1)$, et L est le barycentre de $(A, 1)$ et $(D, 1)$, donc par associativité, G est le barycentre de $(J, 2)$ et $(L, 2)$ et donc G est le milieu de [JL].
On sait que K est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 1)$ et N est le barycentre de $(B, 1)$ et $(D, 1)$, donc par associativité, G est le barycentre de $(K, 2)$ et $(N, 2)$ et donc G est le milieu de [KN].
Les segments [IM], [JL] et [KN] sont donc concourants en G.

124 **Partie A**

1. Avec la relation de Chasles :
$\overrightarrow{f(M)} = (a+b+c)\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$
Or $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ donc on conclut :

$$\overrightarrow{f(M)} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}.$$

2. a) $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(N)} = (a+b+c)\overrightarrow{MN}$.
Or $a+b+c=0$ donc :
$\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(N)} = 0\overrightarrow{MN} = \vec{0}$

b) D'après **a)**, $\overrightarrow{f(M)} - \overrightarrow{f(N)} = \vec{0}$, c'est-à-dire pour tous points M et N : $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(N)}$.
La fonction *f* est donc constante.

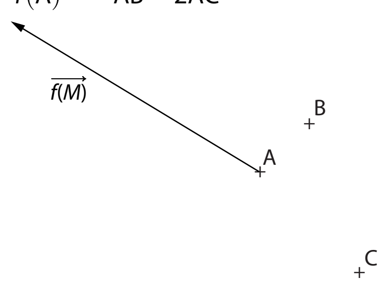
Partie B

1. $1+1+1 = 3 \neq 0$.
On note G le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$.
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires équivaut à $\overrightarrow{MG}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Donc M est un point de la droite qui passe par G et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. $2+1-1 \neq 0$ On définit G le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, -1)$.
$2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NG}$
$2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NG}$, , soit $NG = \frac{3}{2}$, donc N est un point du cercle de centre G et de rayon $\frac{3}{2}$

3. a) $3-1-2=0$ d'après la question **2.**, *f* est constante donc ne dépend pas du point M.

b) $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(A)} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$



125 **1. a)** $-2\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment une famille liée.

b) $\overrightarrow{w_1}(1\,;0\,;0)$

2. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ forment une famille liée s'il existe $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ tel que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$

Si $c \neq 0$, alors $\vec{w}=-\dfrac{a}{c}\vec{u}-\dfrac{b}{c}\vec{v}$ et donc $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

Si $c=0$, alors $a\vec{u}=-b\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et par conséquent $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires.

Réciproquement, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires donc il existe deux réels x, y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$ soit $x\vec{u}+y\vec{v}-\vec{w}=\vec{0}$, donc la famille $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ est liée.

3. a) $(\vec{i},\vec{j},\vec{\ell})$ famille liée si il existe $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tels que $a\vec{i}+b\vec{j}+c=\vec{0}$

Si $c=0$, alors $a\vec{i}+b\vec{j}=\vec{0}$.

Or $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ forme une base donc $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires :

$a=b=0$

On en conclut que $c \neq 0$.

Alors $\vec{\ell}=-\dfrac{a}{c}\vec{i}-\dfrac{b}{c}\vec{j}$.

b) $(\vec{i},\vec{k},\vec{t})$ famille liée si il existe $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tels que $a\vec{i}+b\vec{k}+c\vec{t}=\vec{0}$.

Si $c=0$, alors $a\vec{i}+b\vec{k}=\vec{0}$.

Or $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ forment une base donc $\vec{i}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires :

$a=b=0$.

On en conclut que $c \neq 0$.

Alors $\vec{t}=-\dfrac{a}{c}\vec{i}-\dfrac{b}{c}\vec{k}$.

126 A1 : **faux**.

Contre exemple : *d* et *d′* sont non coplanaires.

A2 : **vrai**

A3 : **vrai**

127 A1 : Le système $\begin{cases} 2a+3b=1 \\ -2b=0 \\ -a=-1 \end{cases}$ n'a pas de solution donc $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas coplanaires et par conséquent les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles. **Faux**.

A2 : d'après A1, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

$$\begin{cases} 2a+3b=-5 \\ -2b=2 \\ -a=1 \end{cases}$$

a pour solution $a=-1$ et $b=-1$

donc $\vec{u}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$.

$$\begin{cases} a+2b=-5 \\ -b=2 \\ -a=1 \end{cases}$$

a pour solution $a=-1$ et $b=-2$

donc $\vec{u}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_2}$.

Par suite, $\vec{u}$ est coplanaire avec $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_2}$.

On en conclut que la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ admet $\vec{u}$ comme vecteur directeur.

128 $\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AL}$

$\overrightarrow{IL}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

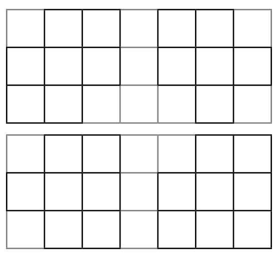
$\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CK}$

$\overrightarrow{JK}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{JK}=-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AC}+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AD}$

On remarque alors que $\overrightarrow{JK}=\dfrac{9}{4}\overrightarrow{IL}$, donc $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{IL}$ sont colinéaires et les droites (IL) et (JK) sont parallèles.

129



4 Orthogonalité et distance dans l'espace

Questions-Tests

1 **(3)** car $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\sqrt{3}\cos(30°)$.
Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

2 **a) (3)** car les vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
b) (1) car $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BO \times BC$
donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1{,}5 \times 3$.
Ainsi $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 4{,}5$.
c) (2) car $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = BA \times BI$ or $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 4{,}5$
donc $BA \times BI = 4{,}5$ d'où $2 \times BI = 4{,}5$ et $BI = 2{,}25$.

3 **a) (3)** car $\overrightarrow{AB}(3\,;-1)$ d'où $AB^2 = 3^2 + (-1)^2$.
Ainsi $AB^2 = 10$.
b) (2) car $\overrightarrow{AC}(4\,;2)$ d'où $AC^2 = 4^2 + 2^2$.
Ainsi $AC^2 = 20$.
c) (1) car $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
or $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ d'où $BC^2 = 1^2 + 3^2$.
Ainsi $BC^2 = 10$.
donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(10 + 20 - 10)$
d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$.

4 **a) (3)** car $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;y_B - y_A)$ d'où $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$
et $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,;y_C - y_A)$ d'où $\overrightarrow{AC}(5\,;-5)$
b) (2) car $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3 \times 5 + 1 \times (-5) = 10$.

5 **a) (3)** car :
$(\vec{u} - 2\vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{v}\cdot\vec{u} - 2\vec{v}^2$.
Donc $(\vec{u} - 2\vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{v}^2$.
Ainsi $(\vec{u} - 2\vec{v})\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = 1^2 - 0 - 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.
b) (3) car $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
d'où $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 1^2 - 2 \times 0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$.

6 **(3)** car $\overrightarrow{AB}(5\,;5)$ donc $AB^2 = 5^2 + 5^2 = 50$.
$\overrightarrow{AC}(10\,;-5)$ donc $AC^2 = 10^2 + (-5)^2 = 125$.
$\overrightarrow{BC}(5\,;-10)$ donc $BC^2 = 5^2 + (-10)^2 = 125$.
donc $AC = BC$.

Découvrir

1 Produit scalaire du plan à l'espace

1 **a)** • $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH} = AD \times AD = 1$.
• $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.
• $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG} = AD \times AD = 1$.
b) D'autre part,
$\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AG} = 1$.
D'autre part,
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 1 + 0 = 1$
d'où $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$.

2 **a)** $\vec{u} = \overrightarrow{AF}$; $\vec{v} = \overrightarrow{AH}$
b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AH}$
donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(AF^2 + AH^2 - FH^2)$
d'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(2 + 2 - 2) = 1$

3 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF} = 0$.
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.

2 Produit scalaire et repère orthonormé

1 **a)** Les faces du cube étant des carrés, les droites (DA) et (DC) sont perpendiculaires et DA = DC. De même, les droites (DA) et (DH) sont perpendiculaires et DA = DH.

b) • $\vec{u} = x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DC} + z\overrightarrow{DH}$

$\vec{v} = x'\overrightarrow{DA} + y'\overrightarrow{DC} + z'\overrightarrow{DH}$.

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DC} + z\overrightarrow{DH}) \cdot (x'\overrightarrow{DA} + y'\overrightarrow{DC} + z'\overrightarrow{DH})$ d'où

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} = {} & xx'\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} + xy'\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + xz'\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DH} \\ & + yx'\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + yy'\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} + yz'\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DH} \\ & + zx'\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA} + zy'\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} + zz'\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DH}\end{aligned}$$

Or DA = DC = DH = 1

donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DH} = 1$.

De plus , les droites (DA), (DC) et (DH) sont perpendiculaires, donc

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DH} = 0.$$

On en déduit que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

2 **a)** $\overrightarrow{EB}(0\,;1;-1)$ et $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$

Ainsi $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.

b) $\overrightarrow{EG}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$

Ainsi $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DF} = -1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.

Savoir-faire

3 **a)** $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF}$

Donc $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF}^2 = 1$.

b) $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EH}) \cdot \overrightarrow{CG}$.

Donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CG}$.

Or, $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{DH} = 0$.

Donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CG} = 1 + 0 = 1$.

4 **a)** $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.

Donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC})$.

Or $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(DA^2 + DB^2 - AB^2) = 18$

et $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = 18$.

On en déduit que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}(18 + 18) = 18$.

b) D'autre part, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DI} = DA \times DI \times \cos(\widehat{ADI})$.

Dans le triangle BDI rectangle en I,

$DI^2 = BD^2 - BI^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ et $DI = 3\sqrt{3}$.

Ainsi $18 = 18 \times 3\sqrt{3} \times \cos(\widehat{ADI})$.

D'où $\cos(\widehat{ADI}) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\widehat{ADI} \approx 78{,}9°$.

7 **a)** ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle donc les vecteurs $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont orthogonaux deux à deux. De plus, CB = CJ = CG = 1, donc le repère $(C\,;\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CJ},\overrightarrow{CG})$ est orthonormé.

b) $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{CG}$ donc $K\left(\frac{1}{2};1;1\right)$.

$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$ donc $L\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{KL}\left(0\,;-1;-\frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $KL = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$

D'où $KL = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

8 **a)** B(0 ; 0 ; 0) A(1 ; 0 ; 0) C(0 ; 1 ; 0)

F(0 ; 0 ; 1) D(1 ; 1 ; 0) E(1 ; 0 ; 1)

G(0 ; 1 ; 1) H(1 ; 1 ; 1)

b) $\overrightarrow{CA}(1;-1;0)$ et $\overrightarrow{BH}(1;1;1)$.

Donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 1$.

D'où $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont donc orthogonaux.

c) $\overrightarrow{HA}(0\,;-1;-1)$ et $\overrightarrow{EC}(-1;1;-1)$.

Donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \times (-1) + (-1) \times 1 + (-1) \times (-1)$.

D'où $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{EC} = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont donc orthogonaux.

11 **a)** • $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} = -BC^2$

$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG} = -a^2$.

• $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BG} = BG^2$

$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG} = a^2$.

b) $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}) \cdot \overrightarrow{BG}$.

Donc $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{BG}$.

Or $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

donc $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BG} = -a^2 + 0 + a^2 = 0$.

12 **a)** Dans le triangle ABD isocèle en A, la droite (AI) est aussi médiatrice du segment [BD]. Ainsi les droites (AI) et (BD) sont orthogonales.

De même, les droites (CI) et (BD) sont orthogonales.

La droite (BD) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (AIC).

La droite (BD) est donc orthogonale au plan (AIC).

b) La droite (BD) est orthogonale au plan (AIC), donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (BD) est orthogonale à la droite (AC).

15 **a)** I est le centre de la face ABCD.

Dans le rectangle EGCA, la droite (MI) est perpendiculaire à la droite (AC).

De même, dans le rectangle HFDB, la droite (MI) est perpendiculaire à la droite (DB).

La droite (MI) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC).

Ainsi la droite passant par M et orthogonale au plan (ABC) est la droite (MI).

Elle coupe le plan (ABC) en I. Ainsi, le point I est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ABC).

b) La droite (FB) est orthogonale à deux droites sécantes (EF) et (FG) du plan (EFG).

La droite (FB) est donc orthogonale au plan (EFG).

De plus, M appartient à ce plan, donc (EFG) est le plan passant par M et orthogonal à la droite (FB).

Il coupe la droite (FB) en F.

Ainsi F est le projeté orthogonal du point M sur la droite (FB).

16 **a)** Le triangle CDI est isocèle en I. La droite (IJ) est donc une médiatrice. Les droites (IJ) et (CD) sont donc orthogonales.

b) Ainsi, le projeté orthogonal du point I sur la droite (CD) est le point J. La distance du point I à la droite (CD) est donc égale à IJ.

Or le triangle IJC est rectangle en J donc :

$$IJ^2 = IC^2 - JC^2$$

De plus, le triangle AIC est rectangle en I donc :

$$IC^2 = AC^2 - AI^2$$

D'où $IJ^2 = AC^2 - AI^2 - JC^2$

Donc $IJ^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

On en déduit que la distance du point I à la droite (CD) est $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

18

```
def Est_rectangle(xE,yE,zE,xF,yF,zF,xG,yG,zG):
    a=xE-xF
    b=yE-yF
    c=zE-zF
    d=xE-xG
    e=yE-yG
    f=zE-zG
    g=xF-xG
    h=yF-yG
    i=zF-zG
    u=a*d+b*e+c*f
    v=a*g+b*h+c*i
    w=d*g+e*h+f*i
    if u==0:
        return("Le triangle est rectangle en E")
    elif v==0:
        return("Le triangle est rectangle en F")
    elif w==0:
        return("Le triangle est rectangle en G")
    else:
        return("Le triangle n'est pas rectangle")
```

```
>>> Est_rectangle(0,0,0,1,1,1,1,1,0)
'Le triangle est rectangle en G'
```

19

```
def Est_orthogonale(xA,yA,zA,xB,yB,zB,xu,yu,zu,xv,yv,zv):
    a=xA-xB
    b=yA-yB
    c=zA-zB
    p=a*xu+b*yu+c*zu
    q=a*xv+b*yv+c*zv
    if p==0 and q==0:
        return("La droite (AB) est orthogonale au plan formé par u et v")
    else:
        return("La droite (AB) n'est pas orthogonale au plan formé par u et v")
```

```
>>> Est_orthogonale(0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0)
'La droite (AB) est orthogonale au plan formé par u et v'
```

Acquérir des automatismes

20 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BH \times BD = 3 \times 5 = 15$

21 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC})$

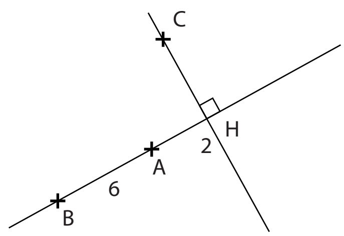
d'où $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 3 \times 4 \times \cos(60°) = 6$.

22 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - BD^2)$

d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(5^2 + 6^2 - 3^2) = 26$

Jeanne a raison.

23



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$

Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 \times 2 = -12$

24 Dans le plan (ABC),
a) B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = a^2$.
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = a^2$.
c) $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.

25 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.
b) Dans le plan (ABG), B est le projeté orthogonal de G sur la droite (AB)
donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = a^2$.
c) Dans le plan (ABG), les droites (AH) et (AB) sont orthogonales donc $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

26 **a)** Dans le plan (ADF), les droites (FJ) et (FA) sont orthogonales donc $\overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{FA} = 0$.
b) De même, $\overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{GD} = 0$.
c) $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ donc $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{FG}$.
Dans le plan (FBG), F est le projeté orthogonal de B sur la droite (FG) donc $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FJ}\cdot\overrightarrow{FG}$
donc $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}a \times a = \frac{1}{2}a^2$.

27 **a)** B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2 = 25$.
b) Les droites (AB) et (AD) sont orthogonales donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$.
c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$ donc $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{FG}$.
F est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG) donc $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{FG} = FG^2 = 9$.
Ainsi $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{BC} = 9$.

28 **a)** Dans le triangle équilatéral (ADC), (DJ) est la médiatrice du segment [AC].
J est donc le projeté orthogonal de D sur la droite (AC).
Ainsi $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{AJ} = AJ^2 = 1$.
b) Dans le triangle équilatéral (ABC),
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$
Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \cos(60°) = 2$.
c) Dans le triangle (ABC), $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}AB^2 = 2$.
d) Dans le triangle équilatéral (BDC), (DI) est la médiatrice du segment [BC].
Ainsi, $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$.

29 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(5^2 + 4^2 - 8^2) = -11{,}5$
b) $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(BD^2 + BA^2 - AD^2)$
donc $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(7^2 + 5^2 - 6^2) = 19$
c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(CA^2 + CD^2 - AD^2)$
donc $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(4^2 + 5^2 - 6^2) = 2{,}5$
d) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(AD^2 + AB^2 - BD^2)$
donc $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(6^2 + 5^2 - 7^2) = 6$

30 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(4^2 - 3^2 - 5^2) = -9$

31 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$
donc $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 - \sqrt{5}^2) = 0$

32 Cette fonction retourne le produit scalaire $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

33 **a)** HI = GI et HD = GC donc d'après le théorème de Pythagore dans les triangles HID et GIC, on en déduit que ID = IC.
Ainsi le triangle IDC est isocèle en I.
b) $ID^2 = HI^2 + HD^2$.
De plus, $HI = \frac{1}{2}HF$.
Or, dans le triangle HFG rectangle en G, le théorème de Pythagore donne $HF^2 = FG^2 + HG^2 = 2a^2$.
Ainsi $HF = \sqrt{2}a$.
Donc $ID^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2 + a^2 = \frac{3}{2}a^2$ d'où $IC^2 = \frac{3}{2}a^2$.
Or $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}(ID^2 + IC^2 - CD^2)$
donc $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - a^2\right) = a^2$
c) De plus, $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = ID \times IC \times \cos(\widehat{DIC})$
d'où $IC^2 \times \cos(\widehat{DIC}) = a^2$.
On a alors $\frac{3}{2}a^2 \times \cos(\widehat{DIC}) = a^2$ et $\cos(\widehat{DIC}) = \frac{2}{3}$.
À la calculatrice, on trouve :
$$\widehat{DIC} \approx 48{,}2°.$$

34 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
Ainsi $3 \times 4 \times \cos(\widehat{BAC}) = 6$.
D'où $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$rad.
b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = AC \times AD \times \cos(\widehat{CAD})$

Ainsi $4\text{AD}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=8$.

D'où $\text{AD}=\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ donc AD $\approx$ 2,8.

35 Le triangle AMB est rectangle en B donc, d'après le théorème de Pythagore, $\text{AM}^2=\text{BM}^2+\text{AB}^2$.

De plus, $\text{BM}=\frac{1}{2}\text{BG}$. Or, dans le triangle BCG rectangle en C, le théorème de Pythagore donne :

$$\text{BG}^2=\text{BC}^2+\text{CG}^2=2a^2.$$

Ainsi $\text{BG}=\sqrt{2}a$.

Donc $\text{AM}^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2+a^2=\frac{3}{2}a^2$.

b) De même, $\text{AN}^2=\frac{3}{2}a^2$ dans le triangle AEN rectangle en E.

Dans le triangle EGB,

$\text{MN}=\frac{1}{2}\text{EB}$ or $\text{EB}=\text{BG}=\sqrt{2}a$

d'où $\text{MN}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ et $\text{MN}^2=\frac{1}{2}a^2$.

c) $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{AN}}=\frac{1}{2}(\text{AM}^2+\text{AN}^2-\text{MN}^2)$

d'où $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{AN}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2\right)$

c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{AM}}\cdot\overrightarrow{\text{AN}}=\frac{5}{4}a^2$.

36 **a)** $(3\vec{u})\cdot\vec{v}=3\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times2=6$

b) $\vec{u}\cdot(-\vec{v})=-\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$

c) $\left(\frac{1}{2}\vec{u}\right)\cdot(-\vec{v})=-\frac{1}{2}\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$.

37 $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

d'où $(\vec{u}+\vec{v})^2=2^2+2\times1+3^2=15$.

Franck a tort.

38 **a)** $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}}=\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BD}}\right)$

donc $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}$

Or $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BD}}=\frac{1}{2}(\text{BA}^2+\text{BD}^2-\text{AD}^2)=\frac{a^2}{2}$

d'où $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}}=-\frac{a^2}{4}$.

De même, $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{JK}}=\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{CB}}\right)$

donc $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{JK}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{CB}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}$

Or $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}}=\frac{1}{2}(\text{BA}^2+\text{BC}^2-\text{AC}^2)=\frac{a^2}{2}$

d'où $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{JK}}=-\frac{a^2}{4}$.

b) $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IK}}=\overrightarrow{\text{AB}}\cdot(\overrightarrow{\text{IK}}+\overrightarrow{\text{JK}})$

donc $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IK}}=\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IJ}}+\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{JK}}$

d'où $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{IK}}=-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=0$.

39 $\overrightarrow{\text{BI}}\cdot\overrightarrow{\text{BJ}}=(\overrightarrow{\text{BA}}+\overrightarrow{\text{AI}})\cdot(\overrightarrow{\text{BA}}+\overrightarrow{\text{AJ}})$

donc $\overrightarrow{\text{BI}}\cdot\overrightarrow{\text{BJ}}=\text{BA}^2+\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{AJ}}+\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{BA}}+\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{AJ}}$

Or $\text{BA}^2=2^2=4$

- $\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{AJ}}=\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=-\text{AB}^2=-4$.
- $\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{BA}}=0$.
- $\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{AJ}}=\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{AE}}=\text{AI}\times\text{AE}=\frac{4}{3}$

d'où $\overrightarrow{\text{BI}}\cdot\overrightarrow{\text{BJ}}=\frac{4}{3}$.

40 **a)** $\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{FB}}=(\overrightarrow{\text{AE}}+\overrightarrow{\text{EI}})\cdot\overrightarrow{\text{FB}}$

donc $\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{FB}}=\overrightarrow{\text{AE}}\cdot\overrightarrow{\text{FB}}+\overrightarrow{\text{EI}}\cdot\overrightarrow{\text{FB}}$

Or $\overrightarrow{\text{AE}}\cdot\overrightarrow{\text{FB}}=\overrightarrow{\text{AE}}\cdot\overrightarrow{\text{EA}}=-\text{AE}^2=-a^2$

- $\overrightarrow{\text{EI}}\cdot\overrightarrow{\text{FB}}=0$.

d'où $\overrightarrow{\text{AI}}\cdot\overrightarrow{\text{FB}}=-a^2$.

b) $\overrightarrow{\text{IJ}}\cdot\overrightarrow{\text{DB}}=(\overrightarrow{\text{IG}}+\overrightarrow{\text{GJ}})\cdot\overrightarrow{\text{DB}}$

donc $\overrightarrow{\text{IJ}}\cdot\overrightarrow{\text{DB}}=\overrightarrow{\text{IG}}\cdot\overrightarrow{\text{DB}}+\overrightarrow{\text{GJ}}\cdot\overrightarrow{\text{DB}}$.

Or $\overrightarrow{\text{IG}}\cdot\overrightarrow{\text{DB}}=\overrightarrow{\text{IG}}\cdot\overrightarrow{\text{HF}}=0$

- $\overrightarrow{\text{GJ}}\cdot\overrightarrow{\text{DB}}=0$

d'où $\overrightarrow{\text{IJ}}\cdot\overrightarrow{\text{DB}}=0$.

41 **a)** $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}=\frac{1}{2}(\text{AB}^2+\text{AD}^2-\text{BD}^2)$

donc $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AD}}=\frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=\frac{1}{2}(\text{AB}^2+\text{AC}^2-\text{BC}^2)$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=\frac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{\text{AJ}}\cdot\overrightarrow{\text{AI}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\text{AC}}+\overrightarrow{\text{AD}})\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$

donc $\overrightarrow{\text{AJ}}\cdot\overrightarrow{\text{AI}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}$

d'où $\overrightarrow{\text{AJ}}\cdot\overrightarrow{\text{AI}}=\frac{1}{4}\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}$

42 $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

donc, comme $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$, $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=0$.

Donc les vecteurs $\vec{u}-\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$ sont orthogonaux.

43 $\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$

44 $\overrightarrow{\text{AB}}(-1\,;1\,;-1)$

donc $\text{AB}=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$.

45 **a)** $\overrightarrow{\text{AB}}(2\,;-2\,;-1)$

donc $\text{AB}=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$.

b) $\overrightarrow{AB}(7\,;-4\,;9)$

donc $AB=\sqrt{7^2+(-4)^2+9^2}=\sqrt{146}$.

46 $\overrightarrow{AB}(-1;-1;-1)$

$\overrightarrow{AC}(0\,;0\,;4)$

Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1\times 0+(-1)\times 0+(-1)\times 4$

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4$.

47 **a)** $\overrightarrow{AB}(0\,;1;0)$

$\overrightarrow{AG}(-1;1;1)$

$\overrightarrow{DH}(0\,;0\,;1)$

$\overrightarrow{BH}(-1;-1;1)$

b) $AG=\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=0\times(-1)+1\times 1+0\times 1=1$

$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AG}=0\times(-1)+0\times 1+1\times 1=1$

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{DH}=-1\times 0+(-1)\times 0+1\times 1=1$

48 **a)** On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$

b) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{AO}=2\times\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ d'où $O\left(2\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

De même, $F(4\,;0\,;1)$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}\left(-2\,;-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{OF}\left(2\,;-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}=(-2)\times 2+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}=-4$.

c) D'autre part, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OF}=OA\times OF\times\cos(\widehat{AOF})$

Or $OA=\sqrt{(-2)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$OF=OA=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Ainsi $-4=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\cos(\widehat{AOF})$ d'où $\cos(\widehat{AOF})=-\frac{8}{9}$.

À la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{AOF}\approx 152{,}7°.$$

49 **a)** $\overrightarrow{AB}(0\,;4\,;-4)$ $\qquad\overrightarrow{AC}(-4\,;4\,;0)$

Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\times(-4)+4\times 4+(-4)\times 0=16$.

D'autre part $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

Or

- $AB=\sqrt{0^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}$
- $AC=\sqrt{(-4)^2+4^2+0^2}=\sqrt{32}$

Ainsi $16=\sqrt{32}\times\sqrt{32}\times\cos(\widehat{BAC})$ d'où $\cos(\widehat{BAC})=\frac{1}{2}$

et $\widehat{BAC}=60°$.

b) $\overrightarrow{AB}(7\,;0\,;-1)$ $\qquad\overrightarrow{AC}(10\,;-1;0)$

Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7\times 10+0\times(-1)+(-1)\times 0=70$.

D'autre part $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$

Or

- $AB=\sqrt{7^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{50}$
- $AC=\sqrt{10^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{101}$

Ainsi $70=\sqrt{50}\times\sqrt{101}\times\cos(\widehat{BAC})$

d'où $\cos(\widehat{BAC})=\frac{70}{\sqrt{50}\sqrt{101}}$

À la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{BAC}\approx 9{,}92°.$$

50 Charles a tort. Si la droite (FG) était orthogonale au plan (HFB), la droite (FG) serait orthogonale à toute droite du plan (HFB). En particulier, la droite (FG) serait orthogonale à la droite (HF) ce qui n'est pas le cas.

51 Lily a raison. La droite (EG) est orthogonale à deux droites sécantes (HF) et (FB) du plan (HFB).
La droite (EG) est donc orthogonale au plan (HFB).

52 (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}=0$.

53 $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1)\times 1+(-1)\times 1+(-1)\times 1=-3$
Alix a tort.

54 (3) $\vec{u}\cdot\vec{z}=0\times 10+1\times(-6)+2\times 3=0$.

55 **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
c) $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.
d) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
e) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+1\times 0+(-1)(-3)$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1-2)+3=2$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

56 **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-3\alpha+2\alpha+3\alpha=2\alpha$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $2\alpha=0$, c'est-à-dire $\alpha=0$.
b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\alpha^2+6\alpha$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $3\alpha^2+6\alpha=0$, c'est-à-dire $3\alpha(\alpha+2)=0$, ce qui équivaut à :
$3\alpha=0$ ou $\alpha+2=0$ soit $\alpha=0$ ou $\alpha=-2$.
c) $\vec{u}\cdot\vec{v}=1+2\alpha+\alpha^2$ donc $\vec{u}\cdot\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $1+2\alpha+\alpha^2=0$, c'est-à-dire $(1+\alpha)^2=0$ soit $\alpha=-1$.

57 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-10\neq 0$
et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=350\neq 0$ donc les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=85\neq 0$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-34\neq 0$
et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ donc les droites (AC) et (BC) sont orthogonales.
c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\neq 0$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-20\neq 0$
et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=9\neq 0$.

58 $\overrightarrow{AB}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{CD}(2;-1;-1)$
donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=1\times 2+1\times(-1)+1\times(-1)=0$ donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

59 **a)** Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les droites (AB) et (AC) sont sécantes.
• $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc la droite *d* est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC), donc la droite *d* est orthogonale au plan (ABC).
b) $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=3$ donc la droite *d* n'est pas orthogonale à la droite (AC) donc la droite *d* n'est pas orthogonale au plan (ABC).
c) $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=1$ donc la droite *d* n'est pas orthogonale à la droite (AB) donc la droite *d* n'est pas orthogonale au plan (ABC).

60 **a)** Le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé.
b) D(0 ; 1 ; 0) ; F(1 ; 0 ; 1). Donc $\overrightarrow{DF}(1;-1;1)$.
c) De même, $\overrightarrow{EB}(1;0;-1)$ et $\overrightarrow{EG}(1;1;0)$
$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EB}=1\times 1+(-1)\times 0+1\times(-1)=0$
et $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EG}=1\times 1+(-1)\times 1+1\times 0=0$
Ainsi, la droite (DF) est orthogonale à deux droites sécantes (EB) et (EG) du plan (EBG). La droite (DF) est donc orthogonale au plan (EBG).

61 **a)** $\overrightarrow{AB}(0;-4;-4)$ $\overrightarrow{AC}(-4;0;-4)$
$\overrightarrow{AD}(-4;-4;0)$ $\overrightarrow{BC}(-4;4;0)$
$\overrightarrow{BD}(-4;0;4)$ $\overrightarrow{CD}(0;-4;4)$
Ainsi $AB=\sqrt{0^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{32}$.
On vérifie que $AC=AD=BC=BD=CD=\sqrt{32}$.
Donc le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier.
b) $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$ donc $I(2;0;0)$
c) $\overrightarrow{AI}(0;-2;-2)$
$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CD}=0\times 0+(-2)\times(-4)+(-2)\times 4=0$
donc les droites (AI) et (CD) sont orthogonales.

62 **a)** D(0 ; 1 ; 0) $O\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$
B(1 ; 0 ; 0) $I\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$
b) $\overrightarrow{DO}\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$ $\overrightarrow{BI}\left(-1;0;\dfrac{1}{2}\right)$
$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{2}\times(-1)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 0+1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)=0.$
Donc les vecteurs $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux.

63 **a)** La droite (AE) est orthogonale à deux droites sécantes (EF) et (EH) du plan (FGH) donc la droite (AE) est orthogonale au plan (FGH).
b) La droite (AB) est orthogonale à deux droites sécantes (BC) et (BF) du plan (GCF) donc la droite (AB) est orthogonale au plan (GCF).
c) Les droites (AD) et (EH) sont parallèles et les droites (BE) et (EH) sont orthogonales. Ainsi les droites (BE) et (AD) sont orthogonales. De plus, les droites (BE) et (AF) sont orthogonales. Ainsi la droite (BE) est orthogonale à deux droites sécantes (AD) et (AF) du plan (ADG).
La droite (BE) est donc orthogonale au plan (ADG).

64 **a)** La droite (FB) est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (BC) du plan (ABC). La droite (FB) est donc orthogonale au plan (ABC).
b) Ainsi, la droite (FB) est orthogonale à toute droite du plan (ABC). En particulier, la droite (FB) est orthogonale à la droite (DM).

65 La droite (GC) est orthogonale à deux droites sécantes (BC) et (DC) du plan (BCD). La droite (GC) est orthogonale au plan (BCD). Elle est donc orthogonale à toute droite du plan (BCD).
En particulier, la droite (GC) est orthogonale à la droite (CM).
Ainsi, le triangle GCM est rectangle en C.

66 **a)** $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG})\cdot\overrightarrow{EB}$
donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{EB}$.
Or : • $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB}=0$
• $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{EB}=0$.
Ainsi $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EB}=0$
b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}=(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HG})\cdot\overrightarrow{ED}$
donc $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{ED}$.
Or : • $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{ED}=0$
• $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{ED}=0$.
Ainsi $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{ED}=0$
c) La droite (AG) est donc orthogonale à deux droites sécantes (EB) et (ED) du plan (BDE). La droite (AG) est donc orthogonale au plan (BDE).

67 **a)** La droite (DH) est orthogonale au plan (ABC). La droite (DH) est donc orthogonale à toute droite du plan (ABC). En particulier, la droite (DH) est orthogonale à la droite (AB). Ainsi $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

• La droite (HC) est la hauteur relative au côté [AB] dans le triangle (ABC). Ainsi $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

b) $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HC})\cdot\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Ainsi $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

Les droites (DC) et (AB) sont donc orthogonales.

68 **a)** $\overrightarrow{LI}=\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}$

donc $\overrightarrow{LI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Ainsi $\overrightarrow{LI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

D'où $\overrightarrow{LI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$.

On en déduit que : $\overrightarrow{LI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}$ donc $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

Ainsi $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

D'où $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})$.

On en déduit que : $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

soit $\overrightarrow{KJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{LI}\cdot\overrightarrow{KJ}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$,

donc $\overrightarrow{LI}\cdot\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$.

Ainsi $\overrightarrow{LI}\cdot\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{4}(AB^2-DC^2)$.

Or AB = DC donc $\overrightarrow{LI}\cdot\overrightarrow{KJ}=0$.

On en conclut que les droites (LI) et (KJ) sont orthogonales.

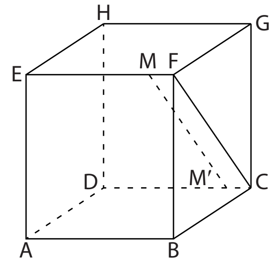
69 Rémi a tort. Le projeté orthogonal du point G sur le plan (ABE) est F car la droite (FG) est orthogonale au plan (ABE) et F appartient au plan (ABE).

70 **(3)** DH.

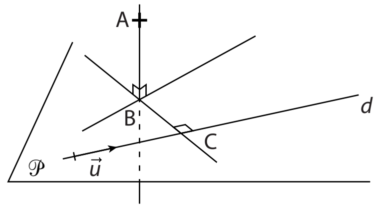
71 **a)** La droite (DC) est orthogonale au plan (FBC). La droite (DC) est donc orthogonale à toute droite du plan (FBC). En particulier, la droite (DC) est orthogonale au plan (FC).

b) Par définition, la droite (MM′) est orthogonale à la droite (DC). Ainsi, dans le plan (EDC), les droites (MM′) et (FC) sont perpendiculaires à une même droite (DC), elles sont donc parallèles.

c)



72 **a)**



b) La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. La droite (AB) est donc orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$. En particulier, la droite (AB) est orthogonale à la droite *d*.

Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$.

• Par définition, les droites (BC) et *d* sont orthogonales donc $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{u}=0$.

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\vec{u}$.

Ainsi $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}+\overrightarrow{BC}\cdot\vec{u}$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{u}=0$.

Ainsi la droite (AC) est orthogonale à la droite *d*.

Le projeté orthogonal du point A sur la droite *d* est donc le point C.

73 **a)** B(1 ; 0 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 1) ; G(1 ; 1 ; 1) ; F(1 ; 0 ; 1)

b) $\overrightarrow{EB}(1;0;-1)$ et $\overrightarrow{EG}(1;1;0)$.

c) $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IG}=\vec{0}$.

Ainsi $\begin{cases} x_E-x_I+x_B-x_I+x_G-x_I=0\\ y_E-y_I+y_B-y_I+y_G-y_I=0\\ z_E-z_I+z_B-z_I+z_G-z_I=0\end{cases}$

d'où $\begin{cases}-3x_I=-2\\ -3y_I=-1\\ -3z_I=-2\end{cases}$

On en déduit que : $I\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

d) $\overrightarrow{IF}\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{EG}=0$ et $\overrightarrow{IF}\cdot\overrightarrow{EB}=0$.

Ainsi la droite (IF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (EGB).

La droite (IF) est donc orthogonale au plan (EGB).

Comme I appartient au plan (EGB), I est le projeté orthogonal du point F sur le plan (EGB).

e) La distance du point F au plan (EGB) est égale à IF.

Et $IF=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pour se tester

74 **1.** B **2.** C **3.** C **4.** B **5.** B **6.** C

75 **1.** C, D **2.** B, C **3.** A, B, D **4.** B, C

76 **1. Faux**. En effet, une droite d contenue elle aussi dans le plan $\mathcal{P}$ et orthogonale à la droite d' ne peut être orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

2. Faux. En effet, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Donc $-3 = 2 \times 3 \times \cos(\widehat{BAC})$.

D'où, $\cos(\widehat{BAC}) = -\dfrac{1}{2}$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$rad.

3. Vrai. En effet, $\overrightarrow{AB}(1;1;0)$,

$\overrightarrow{AC}(1;-1;0)$, $\overrightarrow{AD}(1;0;-1)$.

Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2}$ donc $\left\|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}\right\| = 1$.

De même $\left\|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}\right\| = 1$.

De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 = 0$.

De même, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Ainsi les vecteurs $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux deux à deux.

On en déduit que le repère

$\left(A ; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}\right)$ est orthonormé.

S'entraîner

77 **1)** On cherche à démontrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

2) • $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - BD^2)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - BD^2)$$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 + \dfrac{1}{2}(AC^2 + AD^2) - \dfrac{1}{2}(BC^2 + BD^2)$

3) $AC^2 + AD^2 = 2AI^2 + \dfrac{1}{2}CD^2$

4) $BC^2 + BD^2 = 2BI^2 + \dfrac{1}{2}CD^2$

5) Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 + \frac{1}{2}\left(2AI^2 + \frac{1}{2}CD^2\right) - \frac{1}{2}\left(2BI^2 + \frac{1}{2}CD^2\right)$$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 + AI^2 - BI^2$

6) $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 2\left(\dfrac{1}{2}(AB^2 + AI^2 - BI^2)\right)$,

d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB^2 + AI^2 - BI^2$

7) On en conclut donc que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

Ainsi, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

78 **a)** $MA = MB$ est équivalent à $MA^2 = MB^2$. Ainsi, $MA = MB$ est équivalent à $\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2$ ou encore à $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0$.

b) $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0$ est équivalent à :

$$(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0.$$

Ceci signifie que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$.

Or, d'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA}.$$

De plus, I étant le milieu du segment [AB],

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Ainsi $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0$ est équivalent à $\overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0$, ou encore à $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$.

79 **Parcours 1**

$\overrightarrow{AB}(-7;3;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;7;-2)$

Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -7 \times (-1) + 3 \times 7 + (-1) \times (-2)$,

d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Comme $AB = \sqrt{(-7)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{59}$

et $AC = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + (-2)^2} = \sqrt{54}$,

on en déduit que :

$30 = \sqrt{59} \times \sqrt{54} \times \cos(\widehat{BAC})$.

D'où, $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{30}{\sqrt{59}\sqrt{54}}$.

À la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{BAC} \approx 57{,}9°.$$

Parcours 2

a) $\overrightarrow{MN}(-4\,;3\,;-1)$ et $\overrightarrow{MP}(-3\,;2\,;-2)$

D'où $MN=\sqrt{(-4)^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

et $MP=\sqrt{(-3)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{17}$.

b) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=-4\times(-3)+3\times2+(-1)\times(-2)$

donc $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=20$.

c) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=MN\times MP\times\cos(\widehat{NMP})$.

Ainsi $20=\sqrt{26}\times\sqrt{17}\times\cos(\widehat{NMP})$.

D'où $\cos(\widehat{NMP})=\dfrac{20}{\sqrt{26}\sqrt{17}}$.

À la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{NMP}\approx 18°.$$

80 **a)** $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}'$ donc $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}=MN\times MI$

d'où $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}=5\times2=10$.

b) D'autre part, $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}=MN\times MI\times\cos(\widehat{IMN})$ d'où $10=5\times4\times\cos(\widehat{IMN})$.

Ainsi $\cos(\widehat{IMN})=\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\widehat{IMN}=60°$.

c) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MI}=\dfrac{1}{2}(MN^2+MI^2-NI^2)$

donc $10=\dfrac{1}{2}(5^2+4^2-NI^2)$

Ainsi $20=41-NI^2$ d'où $NI^2=21$.

On a alors $NI=\sqrt{21}\approx 4{,}6$

81 **a)** $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF}$ donc $M\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BF}$ donc $N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};1\right)$.

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$ donc $D(1;1;0)$.

b) Ainsi $\overrightarrow{DM}\left(-\dfrac{1}{2};-1;\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{DN}\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$

Donc :

$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=-\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+(-1)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{5}{4}$.

c) $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}=DM\times DN\times\cos(\widehat{MDN})$

or $DM=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+(-1)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

et $DN=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

On en déduit que :

$\dfrac{5}{4}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\cos(\widehat{MDN})$, d'où $\cos(\widehat{MDN})=\dfrac{5}{6}$.

À la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{MDN}\approx 33{,}6°.$$

82 • $\overrightarrow{OA}(1;0;0)$ et $\overrightarrow{OD}(2\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{2})$

Donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=2$.

D'autre part, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=OA\times OD\times\cos(\widehat{AOD})$

Or $OA=1$ et $OD=\sqrt{2^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=2\sqrt{2}$

donc $2=1\times2\sqrt{2}\times\cos(\widehat{AOD})$,

d'où $\cos(\widehat{AOD})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi $\widehat{AOD}=\dfrac{\pi}{4}$rad.

• $\overrightarrow{OB}(0\,;1;0)$

Donc $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\sqrt{2}$.

D'autre part, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=OB\times OD\times\cos(\widehat{BOD})$.

Or, $OB=1$ donc $\sqrt{2}=1\times2\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BOD})$,

d'où $\cos(\widehat{BOD})=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi $\widehat{BOD}=\dfrac{\pi}{3}$rad.

• De même, $\widehat{COD}=\dfrac{\pi}{3}$rad.

83 **a)** $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ donc $J(1\,;1\,;1)$.

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ donc $I\left(0\,;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AE}$ donc $F(2\,;0;\,1)$.

Ainsi, $\overrightarrow{JI}\left(-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{JK}(1;-1;0)$.

D'où $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JF}=(-1)\times1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times(-1)+\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times0$

donc $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JF}=-\dfrac{1}{2}$.

b) $\overrightarrow{JI}\cdot\overrightarrow{JF}=JI\times JF\times\cos(\widehat{IJF})$

Or $JI=\sqrt{(-1)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

et $JF=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$.

Donc $-\dfrac{1}{2}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{IJF})$,

d'où $\cos(\widehat{IJF})=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

À la calculatrice, on trouve : $\widehat{IJF}\approx 106{,}8°$.

84 **a)** La droite (FJ) est perpendiculaire à deux droites sécantes (EF) et (BF) du plan (EFB).

La droite (FJ) est donc orthogonale au plan (EFB).

La droite (FJ) est donc orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (FJ) est orthogonale à la droite (FI).

b) Ainsi, le triangle FIJ est rectangle en F.

Le théorème de Pythagore donne alors :

$$IJ^2=FI^2+FJ^2.$$

Or, dans le triangle EFI rectangle en E, le théorème de Pythagore donne $FI^2=EI^2+EF^2$.

Ainsi $FI^2=2^2+4^2=20$ et $IJ^2=20+1^2=21$.

On en déduit que $IJ=\sqrt{21}$.

85 **a)** On applique le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles :

• (BCD) : $BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2a^2$.

• (SOB) : $SB^2 = SO^2 + OB^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\right)^2$.

Ainsi $SB^2 = h^2 + \frac{1}{2}a^2$.

• Donc $SD^2 = h^2 + \frac{1}{2}a^2$.

$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}(SB^2 + SD^2 - BD^2)$

d'où $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}(2h^2 + a^2 - 2a^2)$

Ainsi $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SD} = h^2 - \frac{1}{2}a^2$.

b) Le volume de la pyramide est égal à $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B} = a^2$.

Ainsi $\mathcal{V} = \frac{1}{3}a^2h$

On cherche h tel que $\mathcal{V} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$

Ainsi $\frac{1}{3}a^2h = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$ d'où $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

c) Si $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$, alors $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SD} = 0$.

Ainsi, les droites (SB) et (SD) sont orthogonales.

86 **a)** On choisit le repère orthonormé :

$$\left(A\,;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$$

Comme ST = 1 et par symétrie de la figure, les coordonnées de S sont $S\left(\frac{3}{2}\,;1\,;2\right)$

b) $\overrightarrow{AS}\left(\frac{3}{2}\,;1\,;2\right)$ et $\overrightarrow{AB}(4\,;0\,;0)$ donc $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$.

D'autre part $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = AS \times AB \times \cos(\widehat{SAB})$.

Or, $AS = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

et AB = 4, donc $6 = \frac{\sqrt{29}}{2} \times 4 \times \cos(\widehat{SAB})$,

d'où $\cos(\widehat{SAB}) = \frac{3}{\sqrt{29}}$.

À la calculatrice, on trouve : $\widehat{SAB} \approx 56{,}1°$.

• $\overrightarrow{AD}(0\,;2\,;0)$ donc $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AD} = 2$.

D'autre part, $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AD} = AS \times AD \times \cos(\widehat{SAD})$.

Or, AD = BC = 2.

Ainsi $2 = \frac{\sqrt{29}}{2} \times 2 \times \cos(\widehat{SAD})$ d'où $\cos(\widehat{SAD}) = \frac{2}{\sqrt{29}}$.

À la calculatrice, on trouve : $\widehat{SAD} \approx 68{,}2°$.

87 **Parcours 1**

$\overrightarrow{AB}(0\,;-4\,;0)$ $\overrightarrow{BC}(-3\,;6\,;1)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -12 \neq 0$ donc la droite (AB) n'est pas orthogonale à la droite (BC), donc la droite (AB) n'est pas orthogonale au plan (BCD).

Parcours 2

a) $\overrightarrow{FG}(2\,;-3\,;-2)$ et $\overrightarrow{FH}(-3\,;-2\,;1)$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas colinéaires.

b) $\overrightarrow{EF}(-7\,;4\,;-13)$

Ainsi $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = -7 \times 2 + 4 \times (-3) + (-13) \times (-2)$

donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = 0$.

Et $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FH} = -7 \times (-3) + 4 \times (-2) + (-13) \times 1$

donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$.

On en déduit que la droite (EF) est orthogonale à deux droites sécantes (FG) et (FH) du plan (FGH). Donc la droite (EF) est orthogonale au plan (FGH).

88 **Méthode 1**

1. a) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BI} \cdot (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ})$

donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{KJ}$.

Or $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{EJ}$ et F est le projeté orthogonal du point B sur la droite (EJ) donc :

$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{EJ}$.

Ainsi $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AK} = -FI \times EJ = -\frac{1}{2} \times 2 = -1$.

De plus $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{BF}$ et F est le projeté orthogonal du point I sur la droite (BF) donc :

$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BF}^2 = 1^2 = 1$.

On en conclut que $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AJ} = -1 + 1 = 0$.

b) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{BI} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ})$

donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.

Or la droite (DA) est orthogonale au plan (EAB), donc la droite (DA) est orthogonale à toute droite du plan (EAB).

En particulier, la droite (DA) est orthogonale à la droite (BI).

Ainsi $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$.

D'où $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{DJ} = 0 + 0 = 0$.

2. $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{GI} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ})$

donc $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{AJ}$.

De même, $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GF}^2 = 1$.

• De plus, $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{GI} \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ})$

donc $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{EJ}$.

On a aussi, $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ et $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{EJ} = -1$.

Donc $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{DJ} = 1 - 1 = 0$.

3. La droite (DJ) est donc orthogonale à deux droites sécantes (BI) et (GI) du plan (BGI).

La droite (DJ) est donc orthogonale au plan (BGI).

Méthode 2

1. a) On choisit le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

b) $\overrightarrow{BI}\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\,;1\right)$, $\overrightarrow{DJ}(2\,;-1;1)$ et $\overrightarrow{GI}\left(-\dfrac{1}{2}\,;-1\,;0\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$ et $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$.

On en déduit de même que la droite (DJ) est orthogonale au plan (BGI).

89 **1. a)** $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})$

Ainsi $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG}=-BA^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BG}$

Or :

• Dans le rectangle ABGH, la droite (BG) est orthogonale à la droite (AB) donc $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BG}=0$.

• De même, $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

• $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{BG}$ donc $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AH}=AK\times AH$

Or, $AH=\sqrt{2}$ donc $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BG}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$.

Ainsi $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG}=-1^2+1=0$.

b) $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK})\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI})$

Ainsi $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{EI}$

Or :

• $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AE}=0$.

• $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{EI}=-FE\times EI=-\dfrac{1}{2}$

• $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}^2=\dfrac{1}{2}$

• La droite (AK) est orthogonale à la droite (HG), parallèle à la droite (EI), donc $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{EI}=0$.

Ainsi, $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI}=0-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+0=0$.

c) La droite (BK) est donc orthogonale à deux droites sécantes (AG) et (AI) du plan (AIG).

La droite (BK) est donc orthogonale au plan (AIG).

2. Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$:

$\overrightarrow{BK}\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AG}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{AI}\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;1\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AG}=0$ et $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AI}=0$.

On en conclut donc que, de même, la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

90 **Parcours 1**

• $\overrightarrow{BC}(-1;1;-1)$

• $\overrightarrow{BD}(5\,;-1;2)$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires.

• $\overrightarrow{BH}\left(\dfrac{18}{13};-\dfrac{2}{13};\dfrac{6}{13}\right)$

Déterminons a et b tels que $\overrightarrow{BH}=a\overrightarrow{BC}+b\overrightarrow{BD}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases}-a+5b=\dfrac{18}{13} & (\ell_1)\\ a-b=\dfrac{-2}{13} & (\ell_2)\\ -a+2b=\dfrac{6}{13}\end{cases}$$

$(\ell_1+\ell_2): 4b=\dfrac{16}{13}$ d'où $b=\dfrac{4}{13}$

et donc $a=\dfrac{-2}{13}+\dfrac{4}{13}=\dfrac{2}{13}$.

On vérifie que :

$-a+2b=\dfrac{6}{13}$

Or $-a+2b=-\dfrac{2}{13}+2\times\dfrac{4}{13}=\dfrac{6}{13}$.

Ainsi $\overrightarrow{BH}=\dfrac{2}{13}\overrightarrow{BC}+\dfrac{4}{13}\overrightarrow{BD}$.

On en déduit que H appartient au plan (BCD).

$\overrightarrow{AH}\left(\dfrac{5}{13};-\dfrac{15}{13};-\dfrac{20}{13}\right)$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)\times\dfrac{5}{13}+1\times\left(-\dfrac{15}{13}\right)+(-1)\times\left(-\dfrac{20}{13}\right)=0$.

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BD}=5\times\dfrac{5}{13}+(-1)\times\left(-\dfrac{15}{13}\right)+2\times\left(-\dfrac{20}{13}\right)=0$.

Ainsi, la droite (AH) est orthogonale à deux droites sécantes (BC) et (BD) du plan (BCD) donc la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD).

Comme H appartient au plan (BCD), le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD) est le point H.

La distance du point A au plan (BCD) est égale à AH.

On a $AH=\sqrt{\left(\dfrac{5}{13}\right)^2+\left(-\dfrac{15}{13}\right)^2+\left(-\dfrac{20}{13}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{50}{13}}$.

Parcours 2

a) $\overrightarrow{FG}(2\,;-1;-1)$ et $\overrightarrow{FH}(1;2\,;2)$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH}$ ne sont pas colinéaires.

b) $\overrightarrow{FM}(-1;1;1)$

$\overrightarrow{FM}=a\overrightarrow{FG}+b\overrightarrow{FH}$ est équivalent à dire,

$$\begin{cases}2a+b=-1 & (\ell_1)\\ -a+2b=1 & (\ell_2)\\ -a+2b=1\end{cases}$$

Ainsi $(2\ell_1-\ell_2): 5a=-3$ donc $a=-\dfrac{3}{5}$

et $b=-1-2a$, donc $b=-1-2\left(\dfrac{-3}{5}\right)=\dfrac{1}{5}$.

On a alors :

$\overrightarrow{FM}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{FG}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{FH}$.

Ainsi M appartient au plan (FGH).

c) $\overrightarrow{EM}(0\,;2\,;-2)$

$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{FG} = 0\times 2 + 2\times(-1) + (-2)\times(-1) = 0.$

$\overrightarrow{EM}\cdot \text{FH} = 0\times 1 + 2\times 2 + (-2)\times 2 = 0.$

Donc la droite (EM) est orthogonale à deux droites sécantes (FG) et (FH) du plan (FGH).

La droite (EM) est donc orthogonale au plan (FGH).

d) La distance du point E au plan (FGH) est donc égale à EM. Cette distance vaut :

$$\text{EM} = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

91 **1. a)** $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $H(0\,;1\,;1)$, $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ et $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$.

b) • $\overrightarrow{DO}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$ et $\overrightarrow{BI}\left(-1;0;\frac{1}{2}\right)$.

$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\times(-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\times 0 + 1\times\frac{1}{2} = 0.$

Donc les droites (DO) et (BI) sont orthogonales.

• $\overrightarrow{BH}(-1;1;1)$

$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\times(-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\times 1 + 1\times 1 = 0.$

Donc les droites (DO) et (BH) sont orthogonales.

c) Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas proportionnelles donc les droites (BI) et (BH) sont sécantes.

Ainsi, la droite (DO) est orthogonale à deux droites sécantes (BI) et (BH) du plan (BIH).

La droite (DO) est donc orthogonale au plan (BIH).

2. a) (DO) et (BH) sont contenues dans le plan (BFD). De plus, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DO}$ et $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas proportionnelles donc les droites (DO) et (BH) sont sécantes en un point K.

b) L'aire du triangle rectangle BDH est égale à $\frac{\text{BD}\times\text{BH}}{2}$.

Or, d'après le théorème de Pythagore, dans le triangle rectangle BDC,

$$\text{BD}^2 = \text{BC}^2 + \text{CD}^2,$$

d'où $\text{BD}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ et $\text{BD} = \sqrt{2}$.

Ainsi, l'aire est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) La droite (OD) est orthogonale à la droite (BH).

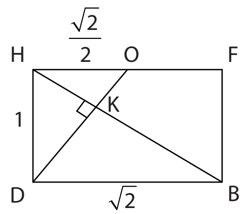
Ainsi, l'aire du triangle BDH est égale à $\frac{\text{DK}\times\text{BH}}{2}$.

Or, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle BDH, $\text{BH}^2 = \text{BD}^2 + \text{DH}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$.

D'où $\text{BH} = \sqrt{3}$.

Ainsi, l'aire du triangle BDH est égale à $\text{DK}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a donc $\text{DK}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\text{DK} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.



La distance du point O au plan (BIH) est égale à OK. Or, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOD, $\text{OD}^2 = \text{HD}^2 + \text{OH}^2$ d'où $\text{OD}^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$.

Ainsi $\text{OD} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Et $\text{OK} = \text{OD} - \text{DK} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}$. D'où $\text{OK} \approx 0{,}4$.

92 **a)** Chaque côté du tétraèdre AFCH est la diagonale d'une face du cube. Chaque face du tétraèdre est donc un triangle équilatéral.

b) Le volume du tétraèdre AFHE est égal à $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\mathcal{B}\times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire du triangle EHF et h la longueur EA.

Or $\mathcal{B} = \frac{1}{2}\times a^2 = \frac{a^2}{2}$ et $\text{EA} = a$, d'où

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\times\frac{a^2}{2}\times a = \frac{a^3}{6}.$$

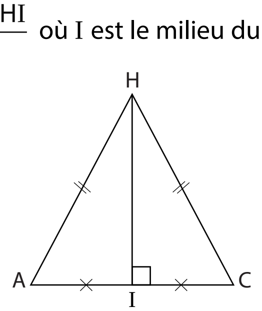
c) Le volume du cube est égal à a^3.

Ainsi le volume du tétraèdre AFCH est égal à $a^3 - 4\times\mathcal{V}$,

c'est-à-dire $a^3 - 4\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3}$.

d) Le volume du tétraèdre AFCH est égal à $\frac{1}{3}\mathcal{B}'\times h'$ où $\mathcal{B}'$ est l'aire du triangle HAC et h' la distance du point F au plan (HAC).

Or, $\mathcal{B}' = \frac{\text{AC}\times\text{HI}}{2}$ où I est le milieu du segment [AC].



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEH rectangle en E, $\text{AH}^2 = \text{EA}^2 + \text{EH}^2 = 2a^2$ d'où $\text{AH} = \sqrt{2}a$.

Ainsi $HI^2 = AH^2 - AI^2 = 2a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$

d'où $HI^2 = \frac{3}{2}a^2$ et $HI = \sqrt{\frac{3}{2}}a$.

On a donc $\mathscr{B}' = \frac{\sqrt{2}a \times \sqrt{\frac{3}{2}}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

On en déduit que :

$\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \times h'$

Ainsi $h' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

93 **1. a)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(BA^2 + BD^2 - AD^2)$

donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2 - 1^2) = \frac{1}{2}$.

De même $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$.

b) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$

donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$

d'où $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$

Ainsi $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

2. a) $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{CD}$

donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD}$ or $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

De plus, la droite (AH) est orthogonale au plan (BCD) donc la droite (AH) est orthogonale à toute droite du plan (BCD). En particulier, la droite (AH) est orthogonale à la droite (CD). D'où $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Ainsi $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

b) • Le triangle BIC est donc rectangle en I et, d'après le théorème de Pythagore, $BI^2 = BC^2 - CI^2$.

D'où $BI^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ et $BI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• I est le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BCD donc I est aussi le milieu du segment [CD]. Ainsi la droite (AI) est la hauteur issue de A du triangle équilatéral (ACD) donc, de même, $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(BA^2 + BI^2 - AI^2)$

donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\left(1^2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

c) H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BI).

Ainsi $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BI}$ d'où $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = BH \times BI = \frac{\sqrt{3}}{2}BH$.

On en déduit que :

$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}BH$, c'est-à-dire $BH = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. La distance du point A au plan (BCD) est AH.

Or, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, $AH^2 = AB^2 - BH^2$.

Ainsi $AH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$ d'où $AH = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

94 **1.** Le volume du tétraèdre ABDM est égal à $\frac{1}{3}\mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire du triangle ABD et h la longueur AM.

Or $\mathscr{B} = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$ et $h = \frac{1}{3}$.

Ainsi, le volume est égal à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

2. a) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{9}{11}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{1}{11}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Or • $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} = AM^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

• $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Donc $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{9}{11} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{11}$.

• $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\frac{9}{11}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{11}\overrightarrow{BD}\right) \cdot \overrightarrow{AD}$.

Ainsi $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{9}{11}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{11}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Or :

• $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

• $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = 1^2 = 1$.

Donc $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{11}$.

b) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BK} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD})$

D'où $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Ainsi $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Donc $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = -\frac{1}{11} + \frac{1}{11} = 0$.

Donc les droites (BK) et (MD) sont orthogonales.

c) Comme $\overrightarrow{BK} = \frac{9}{11}\overrightarrow{BM} + \frac{1}{11}\overrightarrow{BD}$, le point K appartient au plan (BMD).

K est donc à l'intersection de deux hauteurs du triangle BMD, c'est l'orthocentre de ce triangle.

3. a) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}) \cdot \overrightarrow{MB}$.

Donc $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Or :

• la droite (AD) est orthogonale au plan (ABE) donc la droite (AD) est orthogonale à toute droite du plan (ABE).

En particulier, la droite (AD) est orthogonale à la droite (MB).

Ainsi $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

• $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ car les droites (DK) et (MB) sont orthogonales.

Ainsi $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.
De même, $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK})\cdot\overrightarrow{MD}$
donc $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD}=0$.
b) On en déduit que la droite (AK) est orthogonale à deux droites sécantes (MB) et (MD) du plan (BDM).
Donc la droite (AK) est orthogonale au plan (BDM).
Comme K appartient au plan (BDM), K est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BDM).
4. a) D'après le théorème de Pythagore appliqué dans les triangles rectangles AMB et AMD :

$$BM^2=AB^2+AM^2=AD^2+AM^2=MD^2.$$

D'où BM = MD et le triangle BDM est isocèle en M.
b) I est le milieu du segment [BD]. Ainsi (MI) est la hauteur issue de M dans le triangle BDM isocèle en M.
Donc le triangle MIB est rectangle en I.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$MI^2=MB^2+BI^2,$$

or, $MB^2=AB^2+MA^2=1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

et $BI=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Donc $MI^2=\frac{10}{9}-\frac{1}{2}=\frac{11}{18}$.

L'aire du triangle BDM est donc égale à $\frac{1}{2}BD\times MI$

c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{11}{18}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$.

c) Le volume du tétraèdre ABDM est donc égal à :

$$\frac{1}{3}AK\times\frac{\sqrt{11}}{6}.$$

D'où $\frac{1}{3}\times AK\times\frac{\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{18}$.

Donc $AK=\frac{1}{\sqrt{11}}$.

95 **a)** $\overrightarrow{DK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$ donc $\overrightarrow{DK}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH})$

Ainsi $K\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

b) E(1 ; 0 ; 1)

$\overrightarrow{DF}(1;1;1)$

$\overrightarrow{EK}\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Donc $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EK}=1\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1\times\frac{2}{3}+1\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

D'où $\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{EK}=0$ donc les droites (DF) et (EK) sont orthogonales.
Comme K appartient à la droite (DF), K est le projeté orthogonal du point E sur la droite (DF).

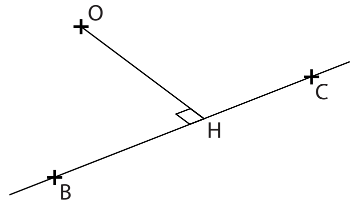
c) $EK=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

96 **a)** $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=tBC^2$

b) $\overrightarrow{BO}(2;6;-5)$ et $\overrightarrow{BC}(-2;6;-8)$ donc
$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=2\times(-2)+6\times6+(-5)\times(-8)$, d'où
$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=72$.
De plus, $BC^2=(-2)^2+6^2+(-8)^2=104$.
Ainsi $72=t\times104$ et $t=\frac{9}{13}$.

c)



La distance du point O à la droite (BC) est OH.
Dans le triangle OBH, rectangle en H, le théorème de Pythagore donne :
$OH^2=OB^2-BH^2$
Or • $OB^2=2^2+6^2+(-5)^2=65$.

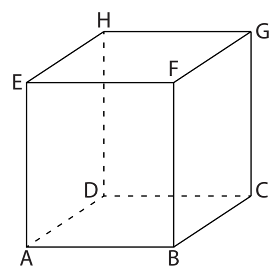
• $BH^2=t^2BC^2=\left(\frac{9}{13}\right)^2\times104$

$BH^2=\frac{648}{13}$.

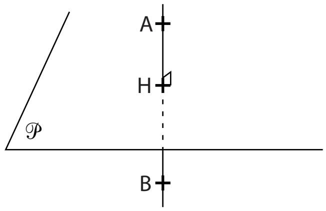
donc $OH^2=\frac{197}{13}$ et $OH=\sqrt{\frac{197}{13}}$.

97 **a) Faux.** En effet, deux vecteurs orthogonaux $\vec{u}\cdot\vec{v}$ vérifient $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, mais ne sont pas nécessairement nuls.
La réciproque est vraie :
Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
b) Vrai. En effet, la contrapposée de l'implication :
Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ est :
si $\vec{u}\cdot\vec{v}\neq0$, alors $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.
Sa réciproque est fausse car si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ sont orthogonaux, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.
c) Faux.
Prenons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que l'angle σ formé soit obtu alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\sigma)<0$ mais les vecteurs ne sont pas nécessairement colinéaires.
La réciproque est vraie :
En effet, si $u=k\vec{v}$ avec $k<0$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=k\vec{v}^2<0$.

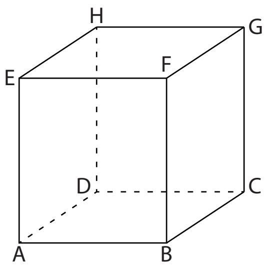
98 **a)** Contre-exemple :
ABCDEFGH est un cube.



Les droites (BF) et (EH) sont orthogonales à la même droite (EF) mais elles ne sont pas parallèles.
b) Contre-Exemple :
Il suffit de prendre une droite (AB) orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ avec B n'appartenant pas au plan $\mathcal{P}$.



Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est H.
c) Contre-exemple :
ABCDEFGH est un cube.



La droite (GC) est contenue dans le plan (GCB).
Le point E n'appartient pas au plan (GCB).
La distance du point E au plan (GCB) est EF.
Mais les droites (GC) et (EG) sont orthogonales, donc la distance du point E à la droite (GC) est GE. Et la distance EF n'est pas égale à la distance EG.

99 **2. a)** On peut conjecturer que la valeur de k pour laquelle les droites (PM) et (AC) sont orthogonales est $k \approx 5{,}538$.
b) On peut conjecturer que pour cette même valeur de k, la distance PM est minimum.
3. a) Le plan $\mathcal{P}$, contenant la droite (PM), est orthogonal à la droite (OB). Ainsi, les droites (PM) et (OB) sont orthogonales.
b) L'ordonnée du point P est k donc P(xp ; yp ; k) or P appartient à la droite (AC) donc, il existe λ de $\mathbb{R}$, tel que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC}$

Or $\overrightarrow{AP} = (x_p\,; y_p - 6\,; k)$ et $\overrightarrow{AC} = (4\,; -6\,; 8)$

Ainsi $\begin{cases} x_p = 4\lambda \\ y_p - 6 = -6\lambda \\ k = 8\lambda \end{cases}$

D'où $\lambda = \dfrac{k}{8}$. Donc $x_p = 4\dfrac{k}{8} = \dfrac{k}{2}$ et

$y_p = -6\dfrac{k}{8} + 6 = -\dfrac{3k}{4} + 6.$

Ainsi $P\left(\dfrac{k}{2}\,; -\dfrac{3k}{4} + 6\,; k\right)$

Comme M(0 ; 0 ; k), on a :

$\overrightarrow{PM}\left(-\dfrac{k}{2}\,; \dfrac{3k}{4} - 6\,; 0\right)$

D'où $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AC} = -\dfrac{k}{2} \times 4 + \left(\dfrac{3k}{4} - 6\right) \times (-6) + 0 \times 8$

Donc $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AC} = -\dfrac{13}{2}k + 36.$

c) $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ est donc équivalent à $-\dfrac{13}{2}k + 36 = 0$ c'est-à-dire $k = \dfrac{72}{13} (\approx 5{,}538)$

4. a) $PM^2 = \left(-\dfrac{k}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3k}{4} - 6\right)^2 + 0^2$

Ainsi $PM^2 = \dfrac{k^2}{4} + \dfrac{9k^2}{16} - \dfrac{36}{4}k + 36$

Donc $PM^2 = \dfrac{13}{16}k^2 - 9k + 36.$

Comme $\dfrac{13}{16} > 0$, ce trinôme du second degré admet un minimum. La fonction $k \mapsto \dfrac{13}{16}k^2 - 9k + 36$ admet comme fonction dérivée $k \mapsto \dfrac{13}{8}k - 9.$

Or $\dfrac{13}{8}k - 9 = 0$ lorsque $k = \dfrac{72}{13}.$

Le minimum de PM^2 est donc atteint pour $k = \dfrac{72}{13}$ également.

5. La distance entre les droites (OB) et (AC) est PM pour $k = \dfrac{72}{13}$. Or $PM^2 = \dfrac{13}{16}k^2 - 9k + 36$ d'où $PM^2 = \dfrac{144}{13}$ et $PM = \dfrac{12}{\sqrt{13}} (\approx 3{,}33)$

100 **1. b)** On peut conjecturer que la mesure de l'angle $\widehat{SMC}$ est maximum lorsque M est le milieu du segment [AB].
2. a) Comme M appartient au segment [AB], le nombre réel t appartient à l'intervalle [0 ; 1].

b) Le repère choisi est $\left(S\,; \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}, \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SB}, \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SC}\right)$

Or : $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SA} + t\overrightarrow{AB}.$

Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}$, on a $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + t(-\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB})$

d'où $\overrightarrow{SM} = (1 - t)\overrightarrow{SA} + t\overrightarrow{SB}.$

On en déduit : M(2(1 − t) ; 2t ; 0)

c) • $\overrightarrow{MS} = (-2(1 - t)\,; -2t\,; 0)$

et $\overrightarrow{MC} = (-2(1 - t)\,; -2t\,; 2)$

d'où $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MC} = 4(1 - t)^2 + 4t^2$

Ainsi $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MC} = 4(1 - 2t + t^2) + 4t^2$

donc $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MC} = 8t^2 - 8t + 4.$

• $MS = \sqrt{(-2(1-t))^2 + (-2t)^2}$

donc $MS = \sqrt{4(1-2t+t^2)+4t^2}$

Ainsi $MS = \sqrt{8t^2-8t+4}$

• $MC = \sqrt{(-2(1-t))^2 + (-2t)^2 + 2^2}$

donc $MC = \sqrt{8t^2-8t+8}$

Comme $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{MC} = MS \times MC \times \cos(\widehat{SMC})$,

$$8t^2 - 8t + 4 = \sqrt{8t^2-8t+4} \times \sqrt{8t^2-8t+8} \times \cos(\widehat{SMC})$$

Ainsi, $\cos(\widehat{SMC}) = \dfrac{8t^2-8t+4}{\sqrt{8t^2-8t+4}\sqrt{8t^2-8t+8}}$

$$\cos(\widehat{SMC}) = \frac{\sqrt{8t^2-8t+4}}{\sqrt{8t^2-8t+8}}$$

$$\cos(\widehat{SMC}) = \frac{\sqrt{2t^2-2t+1}}{\sqrt{2t^2-2t+2}}$$

d) f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(t) = 2t^2 - 2t + 1$ et $v(t) = 2t^2 - 2t + 2$.

Ainsi $u'(t) = 4t - 2$ et $v'(t) = 4t - 2$

Or $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Donc

$$f'(t) = \frac{(4t-2)(2t^2-2t+2)-(2t^2-2t+1)(4t-2)}{(2t^2-2t+2)^2}$$

$$f'(t) = \frac{(4t-2)(2t^2-2t+2-2t^2+2t-1)}{(2t^2-2t+2)^2}$$

$$f'(t) = \frac{4t-2}{(2t^2-2t+2)^2}$$

t	0		0,5		1
$4t-2$		$-$	0	$+$	
$(2t^2-2t+2)^2$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	0,5	↘	$\frac{1}{3}$	↗	0,5

e) Ainsi, la fonction $t \mapsto \sqrt{f(t)}$ atteint son minimum pour $t = 0{,}5$ et ce minimum vaut $\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Or la fonction cosinus est décroissante sur $[0\,;\pi]$ donc la mesure $\widehat{SMC}$ atteint son maximum pour $t = 0{,}5$ et vérifie $\cos(\widehat{SMC}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

À la calculatrice, on trouve :

$$\widehat{SMC} \approx 54{,}7°.$$

101 En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle EFG rectangle en F, on a :

$EG^2 = EF^2 + FG^2 = 2$.

D'où $EG = \sqrt{2}$.

De même, dans le triangle EGC rectangle en G, on a :

$EC^2 = EG^2 + GC^2 = 2 + 1 = 3$.

D'où $EC = \sqrt{3}$.

L'aire du triangle EGC est donc d'une part égale à $\dfrac{EG \times GC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'autre part égale à $\dfrac{EC \times GK}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}GK$

Ainsi : $\dfrac{\sqrt{3}}{2}GK = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $GK = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

La distance du point G à la droite (EC) est donc égale à $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

102 Le point M appartient au segment [AG] donc il existe $t \in [0\,;1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM} = t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$

Donc, dans le repère donné, $M(t\,;t\,;t)$

$B(1\,;0\,;0)$

$D(0\,;1\,;0)$

On en déduit que :

$\overrightarrow{MB}(1-t\,;-t\,;-t)$

$\overrightarrow{MD}(-t\,;1-t\,;-t)$

D'où $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = (1-t)(-t) + (-t)(1-t) + (-t)(-t)$

donc $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = -t + t^2 - t + t^2 + t^2 = 3t^2 - 2t$

L'angle $\widehat{BMD}$ est droit si, et seulement si, le produit scalaire $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ est nul c'est-à-dire $3t^2 - 2t = 0$.

Ceci est équivalent à : $t(3t-2) = 0$ ou encore $t = 0$ ou $t = \dfrac{2}{3}$.

Ainsi, les points M tels que l'angle $\widehat{BMD}$ est droit sont le point A et le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

103 $\overrightarrow{AB}(6\,;-1\,;-3)$. Posons $C(x\,;y\,;z)$.

Alors $\overrightarrow{CD}(6-x\,;3-y\,;8-z)$.

C étant le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB), on doit avoir $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, ce qui donne $-6x + y + 3z + 9 = 0$. (1)

D'autre part, C doit appartenir à (AB), donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = 6t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

En reportant dans (1), on obtient $t=\dfrac{13}{23}$, ce qui permet de calculer les coordonnées de C qui sont $\left(\dfrac{55}{23}\,;\dfrac{33}{23}\,;\dfrac{30}{23}\right)$.

104 **a)** L'aire du triangle GCI est égale à $\dfrac{1}{2}\mathrm{GC}\times\mathrm{GH}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}$.

Ainsi le volume du tétraèdre GCIE est égal à $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\mathrm{FE}$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{6}$.

b) On a $\mathrm{CI}=\mathrm{EI}$ donc le triangle EIC est isocèle en I.

O est le milieu du segment [EC], la droite (OI) est donc la hauteur relative au segment [EC]. L'aire du triangle EIC est donc égale à $\dfrac{1}{2}\mathrm{EC}\times\mathrm{OI}$.

D'après le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles EGH, EGC, BIC puis IOC, on obtient :

- $\mathrm{EG}^2=\mathrm{EH}^2+\mathrm{GH}^2=1+1=2.$
- $\mathrm{EC}^2=\mathrm{EG}^2+\mathrm{GC}^2=2+1=3.$
- $\mathrm{CI}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BI}^2=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$
- $\mathrm{OI}^2=\mathrm{CI}^2-\mathrm{CO}^2=\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

Donc l'aire du triangle EIC est égale à $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Le volume du tétraèdre GCIE est donc égal à $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times h$ où h est la distance du point G au plan (ICE).

Ainsi $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\times h=\dfrac{1}{6}$ d'où $h=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

105 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\overrightarrow{\mathrm{MD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

d'où $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Or : • $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=a\overrightarrow{\mathrm{ED}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=a\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=a\mathrm{AD}^2=a.$

- $\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\mathrm{AD}^2=-1$
- $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=b\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=b\mathrm{AC}^2=2b.$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=a+2b-1.$

De même, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

Or : • $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=a\overrightarrow{\mathrm{ED}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

d'où $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-a\mathrm{DE}^2=-2a$

- $\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\mathrm{DA}^2=1$
- $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=b\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=b\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=b\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DA}}=-b\mathrm{AD}^2=-b$

Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-2a-b+1.$

On en déduit que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (AC) et (DE) si, et seulement si,

$$\begin{cases} a+2b-1=0\,(\ell_1)\\ -2a-b+1=0(\ell_2)\end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 3b-1=0\,(2\ell_1+\ell_2)\\ -2a-b+1=0\end{cases}$$

ou encore $b=\dfrac{1}{3}$ et $a=\dfrac{1}{3}$.

106 **1. a)** $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})$ ainsi $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ or $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{BF}}=2\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BI}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AI}}.$

Ainsi N appartient aux droites (AI) et (EB). Il s'agit de leur intersection.

b) $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

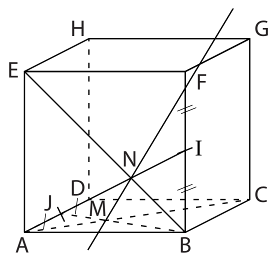
d'où $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}})$

ainsi $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ or $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$

donc $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BJ}}.$

Ainsi M appartient aux droites (BJ) et (AC). Il s'agit de leur intersection.

c)



2. 1re méthode :

a) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ donc $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\,;0\right)$

b) $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BI}})$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

donc $\mathrm{N}\left(\dfrac{2}{3}\,;0\,;\dfrac{1}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\left(\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{EB}}(1\,;0\,;-1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}(1\,;1\,;0)$.

$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EB}}=\dfrac{1}{3}\times1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times0+\dfrac{1}{3}\times(-1)$

d'où $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EB}}=0.$

De même, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0.$

Ainsi la droite (MN) est la perpendiculaire commune aux droites (EB) et (AC).

2^e^ méthode :

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

donc $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$

ainsi $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH})$

donc $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

On en déduit que : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

b) $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{EB}$

donc $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB}$

or $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ puisque les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
Donc $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$.

c) $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}) \cdot \overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BF}$ or $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ donc $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

d) On en déduit que $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ et $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
Donc (MN) est la perpendiculaire commune aux droites (EB) et (AC).

107 **1. a)** $\overrightarrow{AB}(3\,;3\,;3)$ $\quad\overrightarrow{AC}(3\,;0\,;-3)$
$\overrightarrow{BC}(0\,;-3\,;-6)$

Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3)$

d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et ABC est rectangle en A.

b) $\overrightarrow{AD}(-3\,;6\,;-3)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \times (-3) + 3 \times 6 + 3 \times (-3)$

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
De même $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les droites (AB) et (AC) sont sécantes.
Ainsi la droite (AD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC).
La droite (AD) est donc orthogonale au plan (ABC).

2. a) $\mathcal{V}$ est le volume du tétraèdre ABCD. On a :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire du triangle ABC et h la hauteur AD.
Or :

- $AB = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27}$

$AC = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$ donc $\mathcal{B} = \frac{\sqrt{27} \times \sqrt{18}}{2}$

- $AD = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54}$ donc $h = \sqrt{54}$.

Ainsi $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{27} \times \sqrt{18}}{2} \times \sqrt{54} = 27$.

b) $\overrightarrow{DB}(6\,;-3\,;6)$.

$\overrightarrow{DC}(6\,;-6\,;0)$ donc $DB = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 6^2} = 9$

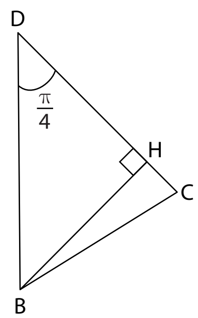
$DC = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$.

Or $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC})$,

d'où $54 = 9 \times 6\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BDC})$.

Ainsi $\cos(\widehat{BDC}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$rad.

3. a)



H est le pied de la hauteur issue de B.

On a $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{BH}{DB}$ donc $BH = DB\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

L'aire du triangle BDC est égale à $\frac{1}{2}BH \times DC$,

c'est-à-dire : $\frac{1}{2}DB \times DC \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Cette aire est donc égale à :

$\frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27$.

b) $\mathcal{V}$ est donc égal à $\frac{1}{3} \times 27 \times h'$ où h' est la distance du point A au plan (BDC).

Ainsi $\frac{1}{3} \times 27 \times h' = 27$ et $h' = 3$.

Objectif BAC

108 **Partie A**

1. a) La droite (EA) est orthogonale au plan (ABC) donc la droite (EA) est la hauteur issue de E. De même, la droite (CB) est la hauteur issue de C.

b) Les droites (EA) et (BC) sont non coplanaires donc non sécantes. Les quatre hauteurs ne sont donc pas concourantes.

2. a) Dans ce repère,
$F(1\,;0\,;1)$; $D(0\,;1\,;0)$; $A(0\,;0\,;0)$; $C(1\,;1\,;0)$ et $H(0\,;1\,;1)$.

Ainsi $\overrightarrow{FD}(-1;1;-1)$, $\overrightarrow{AC}(1;1;0)$ et $\overrightarrow{AH}(0\,;1\,;1)$.

Donc $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)\times1+1\times1+(-1)\times0=0$

et $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AH}=(-1)\times0+1\times1+(-1)\times1=0$.

b) Ainsi, la droite (FD) est orthogonale à deux droites sécantes (AC) et (AH) du plan (ACH) donc la droite (FD) est orthogonale au plan (ACH).

On en déduit que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.

c) La hauteur du tétraèdre ACHF issue de :

• A est (AG) • C est (CE) • H est (HB)

Les quatre hauteurs sont donc les grandes diagonales du cube et sont donc concourantes.

Partie B

1. a) La droite (MK) est orthogonale au plan (NPQ) donc la droite (MK) est orthogonale à toute droite de ce plan.

En particulier, la droite (MK) est orthogonale à la droite (PQ).

b) La droite (PQ) est donc orthogonale à deux droites sécantes (MK) et (NK) du plan (MNK).

La droite (PQ) est donc orthogonale au plan (MNK).

2. Ainsi, la droite (PQ) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MN).

Partie C

$\overrightarrow{RU}(7\,;2\,;1)$ et $\overrightarrow{TS}(-3\,;5\,;-7)$.

$\overrightarrow{RU}\cdot\overrightarrow{TS}=7\times(-3)+2\times5+1\times(-7)=-18$.

Donc les arêtes opposées (RU) et (TS) ne sont pas orthogonales.

Ainsi le tétraèdre RSTU n'est pas orthocentrique.

109 **1. a)** $C(1\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$ et $J\left(\frac{1}{2};1;0\right)$.

b) $\overrightarrow{CM}=t\overrightarrow{CE}$ or $\overrightarrow{CE}(-1;-1;1)$

donc $\overrightarrow{CM}(-t\,;-t\,;t)$ donc $\begin{cases}x_M-x_C=-t\\ y_M-y_C=-t\\ z_M-z_C=t\end{cases}$

On en déduit que $M(1-t\,;1-t\,;t)$

2. a) $\overrightarrow{CI}\left(0\,;-\frac{1}{2}\,;0\right)$

$\overrightarrow{CJ}\left(-\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)$ donc $CI=CJ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$ donc C appartient au plan médiateur du segment [IJ].

$\overrightarrow{EI}\left(1;\frac{1}{2};-1\right)$

$\overrightarrow{EJ}\left(\frac{1}{2};1;-1\right)$ donc $EI=EJ=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}=\frac{3}{2}$

donc E appartient au plan médiateur du segment [IJ].

b) Ainsi la droite (EC) est contenue dans ce plan médiateur.

En particulier, M appartient à ce plan et donc $MI=MJ$.

Le triangle MIJ est alors isocèle en M.

c) $\overrightarrow{IM}\left(-t\,;\frac{1}{2}-t\,;t\right)$

donc $IM^2=(-t)^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+t^2$.

Ainsi $IM^2=3t^2-t+\frac{1}{4}$.

3. a) Si θ appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$ alors $\frac{\theta}{2}$ appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

θ est maximum est équivalent à $\frac{\theta}{2}$ est maximum.

Comme la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, ceci est équivalent à $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximum.

b) K est le milieu du segment [IJ].

Ainsi $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{IK}{IM}$.

On en déduit que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximum lorsque la longueur IM est minimum.

Ainsi la mesure θ est maximum lorsque la longueur IM est minimum.

c) $f'(t)=6t-1$, d'où le tableau :

t	0		$\frac{1}{6}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$

d) $IM=\sqrt{f(t)}$

Comme f et $\sqrt{f}$ ayant le même sens de variation, la longueur IM est minimale pour $t=\frac{1}{6}$.

Ainsi $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximum pour $t=\frac{1}{6}$.

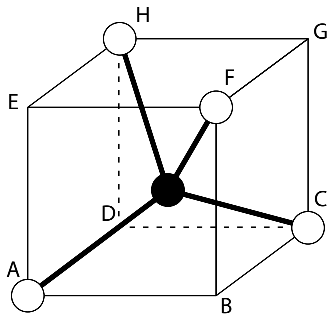
Donc la mesure de θ est maximum pour $t=\frac{1}{6}$, soit lorsque le point M est à la position $M_0\left(1-\frac{1}{6}\,;1-\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6}\right)$

c'est-à-dire $M_0\left(\frac{5}{6}\,;\frac{5}{6}\,;\frac{1}{6}\right)$

e) M_0 est le point du segment [EC] pour lequel la distance IM_0 est minimum.
M_0 est donc le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

110 **1. a)** Les segments [AC], [AH], [AF], [CF], [CH] et [HF] sont six diagonales des faces du cube, les arêtes du tétraèdre ACFH sont donc de même longueur.
Le tétraèdre ACFH est donc régulier.
Il suffit donc de placer les atomes d'hydrogène sur les sommets A, C, F et H.

b)



2. a) Le centre Ω du cube est à égale distance des sommets A, C, F et H donc l'atome de carbone est en Ω.

b) $A(1\,;0\,;0)$

$\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$C(0\,;1\,;0)$

$\overrightarrow{\Omega A}\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{\Omega C}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

$$\Omega A=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

donc $\Omega C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega C}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

donc $\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega C}=-\frac{1}{4}$.

D'autre part,

$\overrightarrow{\Omega A}\cdot\overrightarrow{\Omega C}=\Omega A\times\Omega C\times\cos(\widehat{A\Omega C})$

donc $-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\cos(\widehat{A\Omega C})$.

Ainsi $\cos(\widehat{A\Omega C})=-\frac{1}{3}$.

À la calculatrice, on trouve $\widehat{A\Omega C}\approx 109{,}5°$.

111 **a)** Pour démontrer qu'une droite est orthogonale à un plan on démontre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Pour cela :
1) Soit on utilise la géométrie de la figure.
2) Soit on utilise le produit scalaire.

112 Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on a :

$F(1\,;0\,;1)$, $I\left(0\,;\frac{1}{2};1\right)$, $G(1\,;1\,;1)$, $C(1\,;1\,;0)$ et $J\left(\frac{1}{2};0\,;1\right)$.

Ainsi $\overrightarrow{FI}\left(-1;\frac{1}{2};0\right)$

$\overrightarrow{GJ}\left(-\frac{1}{2};-1;0\right)$

$\overrightarrow{CJ}\left(-\frac{1}{2};-1;1\right)$

Donc $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{GJ}=0$ et $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CJ}=0$.
On en déduit que la droite (FI) est orthogonale à deux droites sécantes (GJ) et (CJ) du plan (GCJ).
Donc la droite (FI) est orthogonale au plan (GCJ).

113 **a) Vrai.** En effet, les diagonales d'un carré sont perpendiculaires.
b) Vrai. En effet, la droite (BF) est orthogonale au plan (ABC) donc à toute droite de ce plan, en particulier la droite (OC).
c) Vrai. En effet, d'après **a)** et **b)**, la droite (OC) est orthogonale au plan (FBD).
d) Faux. En effet, la distance AC est égale à $\sqrt{2}$ donc $OC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour aller plus loin

114 **1.** $f(M)=\alpha_1 MA_1^{\ 2}+\ldots+\alpha_n MA_n^{\ 2}$

$f(M)=\alpha_1\overrightarrow{MA_1}^{\,2}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}^{\,2}$

$f(M)=\alpha_1(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA_1})^2+\ldots+\alpha_n(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA_n})^2$

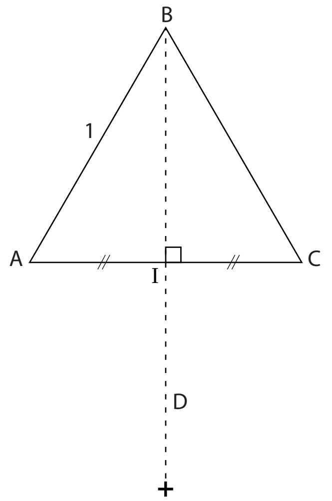
or $(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA_i})^2=MN^2+2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NA_i}+NA_i^{\ 2}$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.

Ainsi $f(M)=(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)MN^2$
$+2\overrightarrow{MN}\cdot(\alpha_1\overrightarrow{NA_1}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{NA_n})$
$+NA_1^{\ 2}+\ldots+NA_n^{\ 2}$.

Donc $f(M)=f(N)+(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)MN^2$
$+2\overrightarrow{MN}\cdot(\alpha_1\overrightarrow{NA_1}+\ldots+\alpha_n\overrightarrow{NA_n})$

2. Exemple 1 : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 0$.

a)



Ici $f(\text{M}) = \text{MA}^2 + \text{MB}^2 - \text{MC}^2 - \text{MD}^2$.

Les poids sont 1, 1, $-$ 1 et $-$ 1. Leur somme est nulle.

b) D'après la question 1., la somme des poids étant nulle, on a : $f(\text{M}) = f(\text{N}) + 2\overrightarrow{\text{MN}} \cdot (\overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{NB}} - \overrightarrow{\text{NC}} - \overrightarrow{\text{ND}})$

Ainsi :

$$\text{MA}^2 + \text{MB}^2 - \text{MC}^2 - \text{MD}^2 = \text{NA}^2 + \text{NB}^2 - \text{NC}^2 - \text{ND}^2 + 2\overrightarrow{\text{MN}} \cdot (\overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{NB}} - \overrightarrow{\text{NC}} - \overrightarrow{\text{ND}})$$

c) $\overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{NB}} - \overrightarrow{\text{NC}} - \overrightarrow{\text{ND}} = \overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{AB}} - (\overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{AC}}) - (\overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{AD}})$

donc $\overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{NB}} - \overrightarrow{\text{NC}} - \overrightarrow{\text{ND}} = \overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}} - \overrightarrow{\text{AD}}$

Or $\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}} - \overrightarrow{\text{AD}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{CA}} + \overrightarrow{\text{DA}}$

donc $\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}} - \overrightarrow{\text{AD}} = \overrightarrow{\text{CB}} + \overrightarrow{\text{DA}}$.

Comme $\overrightarrow{\text{DA}} = \overrightarrow{\text{CB}}$, on a :

$\overrightarrow{\text{NA}} + \overrightarrow{\text{NB}} - \overrightarrow{\text{NC}} - \overrightarrow{\text{ND}} = 2\overrightarrow{\text{CB}}$

Ainsi

$$\text{MA}^2 + \text{MB}^2 - \text{MC}^2 - \text{MD}^2 = \text{NA}^2 + \text{NB}^2 - \text{NC}^2 - \text{ND}^2 + 4\overrightarrow{\text{MN}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}}$$

d) DA = DC = 1

I est le milieu du segment [AC].

Ainsi (BI) est la hauteur issue de B donc d'après le théorème de Pythagore, $\text{AB}^2 = \text{IB}^2 + \text{IA}^2$.

Ainsi $\text{IB}^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

d'où $\text{DB}^2 = (2\text{IB})^2 = 4\text{IB}^2 = 3$.

Donc $\text{DA}^2 + \text{DB}^2 - \text{DC}^2 = 3$.

Donc D appartient à l'ensemble $\mathscr{E}_1$.

e) En prenant N = D, on a :

M appartient à $\mathscr{E}_1$ si, et seulement si,

$$\text{MA}^2 + \text{MB}^2 - \text{MC}^2 - \text{MD}^2 = 3,$$

ce qui est équivalent à

$$\text{DA}^2 + \text{DB}^2 - \text{DC}^2 + 4\overrightarrow{\text{MD}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = 3,$$

ou encore à $3 + 4\overrightarrow{\text{MD}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = 3$.

Ainsi M appartient à $\mathscr{E}_1$ si, et seulement si, $\overrightarrow{\text{MD}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = 0$.

f) On en conclut que $\mathscr{E}_1$ est le plan orthogonal à la droite (BC) passant par D.

3. Exemple 2 :

a) Ici, $f(\text{M}) = \text{MA}^2 + 2\text{MB}^2 - \text{MC}^2 + 2\text{MD}^2$.

Les poids sont 1, 2, $-$ 1 et 2.

Leur somme est égale à $4 \neq 0$.

b) $\overrightarrow{\text{GA}} + 2\overrightarrow{\text{GB}} - \overrightarrow{\text{GC}} + 2\overrightarrow{\text{GD}} = \vec{0}$

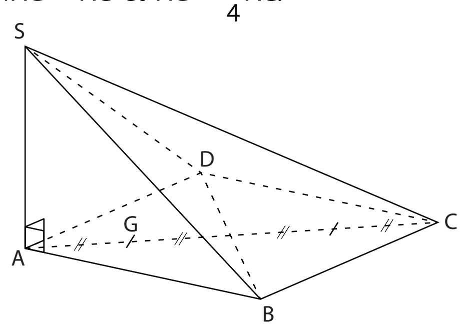
donc

$\overrightarrow{\text{GA}} + 2(\overrightarrow{\text{GA}} + \overrightarrow{\text{AB}}) - (\overrightarrow{\text{GA}} + \overrightarrow{\text{AC}}) + 2(\overrightarrow{\text{GA}} + \overrightarrow{\text{AD}}) = \vec{0}$

D'où $4\overrightarrow{\text{GA}} + 2\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}} + 2\overrightarrow{\text{AD}} = \vec{0}$

Or $\overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} = \overrightarrow{\text{AC}}$ donc $4\overrightarrow{\text{GA}} + 2\overrightarrow{\text{AC}} - \overrightarrow{\text{AC}} = \vec{0}$

d'où $4\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AG}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\text{AC}}$.



c) Dans le triangle ABC rectangle en B,

$\text{AC}^2 = \text{AB}^2 + \text{BC}^2 = 2$ donc $\text{AC} = \sqrt{2}$

Ainsi $\text{GA} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\text{GC} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

O est le centre du carré ABCD.

On a : $\text{GB}^2 = \text{GO}^2 + \text{OB}^2$

donc $\text{GB}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}$ et $\text{GD}^2 = \frac{5}{8}$.

Enfin $\text{GA}^2 + 2\text{GB}^2 - \text{GC}^2 + 2\text{GD}^2$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2 \times \frac{5}{8} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2 \times \frac{5}{8}$

d'où $\text{GA}^2 + 2\text{GB}^2 - \text{GC}^2 + 2\text{GD}^2 = \frac{3}{2}$.

d) D'après la question 1., pour N = G,

$$\text{MA}^2 + 2\text{MB}^2 - \text{MC}^2 + 2\text{MD}^2 = \text{GA}^2 + 2\text{GB}^2 - \text{GC}^2 + 2\text{GD}^2 + 4\text{MG}^2 + 2\overrightarrow{\text{MG}} \cdot (\overrightarrow{\text{GA}} + 2\overrightarrow{\text{GB}} - \overrightarrow{\text{GC}} + 2\overrightarrow{\text{GD}})$$

donc d'après 3. **b)** et 3. **c)**,

$$\text{MA}^2 + 2\text{MB}^2 - \text{MC}^2 + 2\text{MD}^2 = \frac{3}{2} + 4\text{MG}^2.$$

e) M appartient à l'ensemble $\mathscr{E}_2$ si, et seulement si, $\text{MA}^2 + 2\text{MB}^2 - \text{MC}^2 - 2\text{MD}^2 = 4$,

ce qui est équivalent à

$\frac{3}{2} + 4\text{MG}^2 = 4$ ou $\text{MG} = \sqrt{\frac{5}{8}}$.

f) L'ensemble $\mathscr{E}_2$ est donc la sphère de rayon $\sqrt{\frac{5}{8}}$ et de centre G.

g) Dans le triangle SAG rectangle en A,

$$SG^2 = AG^2 + SA^2$$

d'où $SG^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

donc $SG^2 = \frac{5}{8}$ et $SG = \sqrt{\frac{5}{8}}$.

S appartient à l'ensemble $\mathscr{E}_2$.

115 **1.** M appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.

Or $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA})$

donc $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})$

d'où $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2)$

Ainsi, M appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 0$ c'est-à-dire $MA^2 = MB^2$ ou encore $MA = MB$.

2. a) O appartient à la droite Δ donc O est équidistant des points A, B et C. O est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire à l'intersection des médiatrices du triangle ABC.

b) M est un point de l'ensemble Δ est équivalent à M est équidistant des points A, B et C. Ceci signifie que M est équidistant des points A et B et équidistant des points B et C.

Autrement dit, M appartient au plan médiateur de l'arête [AB] et au plan médiateur de l'arête [BC].

Ces deux plans ne sont pas confondus et leur intersection n'est pas vide puisque O appartient aux deux plans. Cette intersection est donc une droite.

Ainsi M est un point de l'ensemble Δ si, et seulement si, M appartient à cette droite d'intersection.

Donc Δ est une droite.

Cette droite est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (BC) du plan (ABC), Δ est donc orthogonale au plan (ABC) et passe par O.

3. Supposons que la droite Δ et le plan médiateur de l'arête [AD] ne se coupent pas.

Alors la droite Δ est parallèle à ce plan et est donc orthogonale à la droite (AD).

Ainsi la droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes (AD) et (AB) du plan (ABD).

Donc la droite Δ est orthogonale au plan (ABD).

Ainsi les plans (ABD) et (ABC) sont parallèles et donc confondus. Le tétraèdre est donc aplati, ce qui est contradictoire.

Donc la droite Δ coupe le plan médiateur de l'arête [AD] en un point Ω.

Ω est donc équidistant des quatre sommets du tétraèdre ABCD. Il s'agit donc du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

116 1. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GI}$ et $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GJ}$

Ainsi $2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{JG}$.

G est donc le milieu du segment [IJ].

2. **a)** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})$

Ainsi, comme $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

or $4\overrightarrow{MG} = 4(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OG}) = 4\left(\overrightarrow{MO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OM}\right)$

donc $4\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MO} - 2\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MO}$

d'où $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

b) Ainsi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}$

donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MO}$

d'où $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$

c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}) \cdot \overrightarrow{CD}$

donc $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD}$

or $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(CO^2 + CD^2 - OD^2)$

et $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}(DO^2 + DC^2 - OC^2)$

donc

$$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(CO^2 + CD^2 - OD^2) - \frac{1}{2}(DO^2 + DC^2 - OC^2)$$

Comme $OC = OD$, $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Ainsi $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

d) I est le milieu de [AB].

Ainsi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, donc la droite (MI) est orthogonale à la droite (CD) donc M appartient au plan passant par I et orthogonal à la droite (CD).

117 1. **a)** $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA})^2$

donc $MA^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BA}$

d'où $MA^2 = MB^2 + BA^2 - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA}$

or $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = BM \times BA \times \cos(\widehat{MBA})$

donc $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BA} = BM \times BA \times \frac{1}{2}$

d'où $MA^2 = MB^2 + BA^2 - BM \times BA$.

On en déduit que :

$$MA^2 = x^2 + a^2 - ax.$$

b) De même, $NA^2 = y^2 + a^2 - ay$

c) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(AM^2 + AN^2 - MN^2)$

or $MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN})^2$

donc $MN^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BN}^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BN}$

d'où $MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN} = BM \times BN \times \cos(\widehat{MBN}) = \dfrac{xy}{2}$.

Ainsi $MN^2 = x^2 + y^2 - xy$.

On en déduit que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(x^2 + a^2 - ax + y^2 + a^2 - ay - x^2 - y^2 + xy)$$

donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}(2a^2 - ax - ay + xy)$

or $a^2 + (a - x)(a - y) = a^2 + a^2 - ay - ax + xy$

d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}(a^2 + (a - x)(a - y))$

2. a) • $MA^2 = a^2 + x^2 - ax$ donc $MA^2 = a^2 + x(x - a)$ or $x - a \leqslant 0$ car $N \in [BD]$ et $x \geqslant 0$ d'où $MA^2 \leqslant a^2$.

La fonction racine carrée étant croissante sur $[0\,; +\infty[$, $MA \leqslant a$.

• De même, $NA \leqslant a$.

• $(a - x) \geqslant 0$ et $(a - y) \geqslant 0$ donc

$a^2 + (a - x)(a - y) \geqslant a^2$ d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \geqslant \dfrac{a^2}{2}$.

b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = AM \times AN \times \cos(\widehat{MAN})$

Ainsi $\cos(\widehat{MAN}) = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{AM \times AN}$

Or $AM \leqslant a$ et $AN \leqslant a$ donc $\cos(\widehat{MAN}) = \dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{a^2}$ et

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \geqslant \dfrac{a^2}{2}$ d'où $\cos(\widehat{MAN}) \geqslant \dfrac{\frac{a^2}{2}}{a^2}$.

On en déduit que :

$\cos(\widehat{MAN}) \geqslant \dfrac{1}{2}$ d'où $\widehat{MAN} \leqslant \dfrac{\pi}{3}$rad.

118 **1. a)** M est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ donc la droite (AM) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. La droite (AM) est donc orthogonale à toute droite contenue dans le plan $\mathcal{P}$.

En particulier, la droite (AM) est orthogonale à la droite (MN).

D'où $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{MA}$

donc $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} + sMA^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} + s$.

On en déduit que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} + s = 0$,

c'est-à-dire $s = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$.

c) De même, $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$

et $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MA} + tMA^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MA} + t$.

On en déduit que : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MA} + t = 0$,

c'est-à-dire $t = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MA}$.

2. a) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = (\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{MA})$ donc

$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} + s\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + stMA^2$.

Or :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -s$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = -t$

On en déduit que :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = -st - st + st = -st.$$

Donc $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}) \times (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MA})$.

b) L'angle $\widehat{NMP}$ est droit si, et seulement si, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.

Ce qui est équivalent à $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ ou $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Ainsi, l'angle $\widehat{NMP}$ est droit si, et seulement si, la droite (AB) ou la droite (AC) sont orthogonales à la droite (AM), c'est-à-dire si, et seulement si, la droite (AB) ou la droite (AC) sont parallèles au plan $\mathcal{P}$.

119 $\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{BD}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})^2 - \overrightarrow{BD}^2$

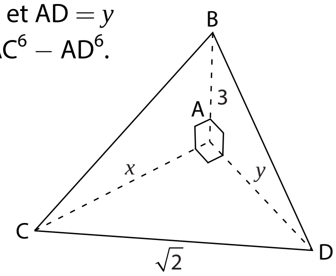
donc $AC^2 - BD^2 = AB^2 + BD^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} - BD^2$

Ainsi $AC^2 - BD^2 = AB^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$

D'où $AC^2 - BD^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})^2 - 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Comme $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} \leqslant 0$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} \leqslant 0$, on en déduit que $AC^2 - BD^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $AC \geqslant BD$.

120 On pose $AC = x$ et $AD = y$ et $S = BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.



Dans le triangle ABC, rectangle en A, le théorème de Pythagore donne $BC^2 = 9 + x^2$.

De même,

$BD^2 = 9 + y^2$ donc $S = (9 + x^2)^3 + (9 + y^2)^3 - x^6 - y^6$.

On en déduit que :

$S = (9 + x^2)(81 + 18x^2 + x^4) + (9 + y^2)(81 + 18y^2 + y^4) - x^6 - y^6$.

d'où $S = 27(x^4 + y^4) + 243(x^2 + y^2) + 1\,458$.

Or, dans le triangle ADC rectangle en A, on a :

$x^2 + y^2 = 2$, d'où $(x^2 + y^2)^2 = 4$,

c'est-à-dire $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 4$.

Ainsi, $S = 27(4 - 2x^2y^2) + 243 \times 2 + 1\,458$

$S = 2\,052 - 54x^2y^2$

$S = 2\,052 - 54x^2(2 - x^2)$

$S = 54x^4 - 108x^2 + 2\,052$

$S = 54(x^4 - 2x^2 + 38)$

$S = 54[(x^2 - 1)^2 + 37]$

Le minimum de S est donc $54 \times 37 = 1\,998$.

5 Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Questions-Tests

1 **a)** (2) Le point B et le vecteur directeur $\overrightarrow{BA}$.
b) (3) Le point C et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2 **a)** (2) $\overrightarrow{MN}(-1;3;1)$
b) (1) $\overrightarrow{MP}(-3;-1;-1)$
c) (3) ni l'un, ni l'autre
d) (1) orthogonaux

3 **a)** (3) Le point E
b) (2) Le milieu de [DH]

Découvrir

1 Représentations paramétriques d'une droite

1 $\overrightarrow{AP}(2;6;-6)$ est un vecteur directeur de *d*.

2 **a)** $\overrightarrow{AB}(1;3;-3)$.
b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires car $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}$, donc les points A, B, P sont alignés et l'oiseau se trouve sur la bonne trajectoire.

3 **a)** Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires.
b) $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre réel *t* tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}$,

c'est-à-dire $\begin{cases} x-1=2t \\ y-6=6t \\ z-4=-6t \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=1+2t \\ y=6+6t \\ z=4-6t \end{cases}$

2 Vecteur normal et équations cartésiennes d'un plan

1 **a)** A(1 ; 0 ; 0), B(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 1 ; 1), G(0 ; 1 ; 1), C(0 ; 1 ; 0)
b) $\overrightarrow{AB}(0;1;0)$, $\overrightarrow{BG}(-1;0;1)$, $\overrightarrow{CF}(1;0;1)$.
c) $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BG}=0$.
d) La droite (CF) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABG) (les droites (AB) et (BG)), donc elle est orthogonale au plan (ABG).

2 **a)** Puisque la droite (CF) est orthogonale au plan (ABG), $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CF}=0$.
b) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CF}=0$ est équivalent à $(x-1)\times 1+y\times 0+z\times 1=0$ soit $x+z-1=0$.
c) On remplace les coordonnées du point N dans l'équation. Or $9+7-1=15$ et $15\neq 0$, donc le point N(9 ; − 20 ; 7) n'appartient pas au plan (ABG).

Savoir-faire

3 **a)** $\overrightarrow{IJ}(4;4;-3)$ est un vecteur directeur de la droite (IJ). I(− 1 ; 0 ; 2) est un point de la droite (IJ). Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est :

$$\begin{cases} x=1-4t \\ y=4t \\ z=2-3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

b) S ∈ (IJ) équivaut à dire qu'il existe un nombre réel *t* tel que :

$$\begin{cases} 1=-1+4t \\ 4=4t \\ 2=2-3t \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ t=1 \\ t=0 \end{cases}$$

Donc le point S n'appartient pas à (IJ).

T $\in$ (IJ) équivaut à dire qu'il existe un nombre réel t tel que : $\begin{cases} 7=-1+4t \\ 8=4t \\ -4=2-3t \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ t=2 \end{cases}$

Donc le point T appartient à (IJ).

4 **a)** Pour $t=0$, on obtient le point A$(-2\,;0\,;-3)$ de d.

Pour $t=2$, on obtient le point B$(2\,;10\,;-11)$ de d.

b) $\vec{u}(2\,;5\,;-4)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{u}$ de coordonnées $\left(1;\dfrac{5}{2};-2\right)$ en est un autre.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}(4\,;10\,;-8)$ en est un autre.

7 **a)** $\vec{n}(5\,;4\,;1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est de la forme $5x+4y+z+d=0$.

De plus, le point A$(-2\,;1\,;3)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ donc $5\times(-2)+4\times1+3+d=0$ d'où $-3+d=0$ et $d=3$.

Ainsi, $5x+4y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

b) $5\times2+4\times0-7+3=6$ et $6\neq0$ donc le point B n'appartient pas au plan $\mathcal{P}$.

8 **a)** $\vec{n}(5\,;-1;1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

b) En remplaçant, par exemple, x par 2 et y par 1, on obtient, $5\times2-1+z+2=0$ soit $11+z=0$ et $z=-11$.

Ainsi, le point A$(2\,;1\,;-11)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.

10 • On commence par vérifier si d et d' sont parallèles.

$\vec{u}(1;1;2)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(2\,;1;1)$ est un vecteur directeur de d'.

Or, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), donc les droites d et d' ne sont pas parallèles.

• On vérifie ensuite si d et d' sont sécantes, en résolvant le système :

$$\begin{cases} 1+t=2t' \\ 3+t=1+t' \\ -4-2t=3+t' \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} t-2t'=-1 \\ t-t'=-2 \\ -2t-t'=7 \end{cases}$$

On résout par substitution le système formé par les deux premières équations :

$$\begin{cases} t=-1+2t' \\ (-1+2t')-t'=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=-1+2t' \\ -1+t'=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=-1+2t' \\ t'=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=-3 \\ t'=-1 \end{cases}$$

On vérifie alors si les valeurs trouvées vérifient la troisième équation : $-2\times(-3)-(-1)=7$

Donc les droites d et d' sont sécantes.

(En remplaçant t par -3 (ou t' par -1) dans la représentation paramétrique de d (ou de d'), on calcule les coordonnées du points d'intersection : $(-2\,;0\,;2)$.

11 • On commence par vérifier si d et d' sont parallèles.

$\vec{u}(1;2;-1)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(-1;-2\,;1)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{u}=-\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et les droites d et d' sont parallèles : strictement ou confondues.

Or A$(3\,;0\,;1)\in d$ (obtenu pour $t=0$). On vérifie si A appartient ou non à d'.

$\begin{cases} 3=1-\dfrac{1}{2}t' \\ 0=-2-t' \\ 1=3+\dfrac{1}{2}t' \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} t'=-4 \\ t'=-2 \\ t'=-4 \end{cases}$ ainsi, t' n'est pas unique donc A $\notin d'$.

Les droites d et d' sont strictement parallèles.

14 **a)** $\vec{n}(-1;2\,;1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$, c'est donc le vecteur directeur de la droite d passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=5+t \end{cases}$$

b) Le projeté orthogonal H du point A sur $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de d et de $\mathcal{P}$.

On résout le système :

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+2t \\ z=5+t \\ -x+2y+z+5=0 \end{cases} \text{ on obtient } \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=-\dfrac{11}{3} \\ z=\dfrac{14}{3} \\ t=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées du point H sont $\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3}\right)$.

15 **a)** $\vec{u}(2\,;-1;-3)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, donc c'est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Le plan $\mathcal{P}$ a donc une équation cartésienne de la forme $2x-y-3z+d=0$.

Or B $\in\mathcal{P}$, c'est-à-dire $2\times(-1)-2-3\times4+d=0$ soit $-16+\text{d}=0$ et $d=16$.

$\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne

$$2x - y - 3z + 16 = 0.$$

b) Le projeté orthogonal K du point B sur la droite $\mathscr{D}$ est le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$.

On résout le système :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \\ 2x - y - 3z + 16 = 0 \end{cases} \text{ on obtient } \begin{cases} x = -\dfrac{5}{7} \\ y = \dfrac{6}{7} \\ z = -\dfrac{4}{7} \\ t = -\dfrac{6}{7} \end{cases}$$

Les coordonnées du point K sont $\left(-\dfrac{5}{7} ; \dfrac{6}{7} ; \dfrac{32}{7}\right)$.

Acquérir des automatismes

16 Pour d : $A(1 ; -3 ; 0)$ et $\vec{u}(2;1;5)$
Pour d' : $A'(2 ; 0 ; 1)$ et $\vec{u}'(-3 ; -2 ; -1)$

17 Pour $t = 0$: $A(1 ; 5 ; -2)$
Pour $t = 1$: $B(0 ; 8 ; -4)$
Pour $t = 2$: $C(-1 ; 11 ; -6)$
Pour $t = -1$: $D(2 ; 2 ; 0)$

18 (1), (3) et (4).

19 Il a raison car les vecteurs directeurs $\vec{u}(1;2;-3)$ de d et $\vec{u}'(2;4;-6)$ de d' sont colinéaires.

20 **a)** $\overrightarrow{AB}(1;5;3)$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5t \\ z = -3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Pour le point $C(-1 ; 2 ; -3)$

$$\begin{cases} -1 = 1 + t \\ 2 = 5t \\ -3 = -3 + 3t \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} t = -2 \\ t = \dfrac{2}{5} \\ t = 0 \end{cases}$$

Ainsi, ce système n'a pas de solution unique.
On en déduit que le point C n'appartient pas à (AB).
Pour le point $D(3 ; 10 ; 3)$:

$$\begin{cases} 3 = 1 + t \\ 10 = 5t \\ 3 = -3 + 3t \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

On en déduit que le point D appartient à (AB).

21 **a)** $\vec{u}(1;7;-2)$ donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 7t \\ z = -2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) • Pour le point $C(-1 ; -17 ; 6)$:

$$\begin{cases} -1 = 2 + t \\ -17 = 4 + 7t \\ 6 = -2t \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases}$$

Ainsi, $C \in (AB)$.

• Pour le point $D(5 ; 10 ; -14)$:

$$\begin{cases} 5 = 2 + t \\ 10 = 4 + 7t \\ -14 = -2t \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} t = 3 \\ t = \dfrac{6}{7} \\ t = 7 \end{cases}$$

Ainsi, $D \notin (AB)$.

• Pour le point $E(3 ; 11 ; -2)$:

$$\begin{cases} 3 = 2 + t \\ 11 = 4 + 7t \\ -2 = -2t \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $E \in (AB)$.

22 $\overrightarrow{MN}(-1;3;-1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (MN) est :

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Les points M, N et $P(-1 ; 4 ; -2)$ sont alignés si, et seulement si, $P \in (MN)$.

$$\text{Or } \begin{cases} -1 = 2 - t \\ 4 = -1 + 3t \\ -2 = 4 - t \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} t = 3 \\ t = \dfrac{5}{3} \\ t = 6 \end{cases}$$

Donc $P \notin (MN)$. Les points M, N, P ne sont donc pas alignés.

23 **a)** $\overrightarrow{EF}(2;-1;-1)$ donc une représentation paramétrique de la droite (EF) :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) On résout le système :

$$\begin{cases} a = 1 + 2t \\ b = -t \\ -2 = 3 - t \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} a = 11 \\ b = -5 \\ t = 5 \end{cases}$$

Ainsi, pour $a = 11$ et $b = -5$, le point M appartient à la droite (EF).

24 **a)** • (AB) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

• (AC) : $\begin{cases} x = 1 - 2u \\ y = -1 + 4u \\ z = 2 - 2u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R})$

• (BC) : $\begin{cases} x = 2 - 3v \\ y = 2 + v \\ z = 3 - 3v \end{cases} \quad (v \in \mathbb{R})$

b) Pour la droite (AB) :

$\begin{cases} -4 = 1 + t \\ 4 = -1 + 3t \\ -3 = 2 + t \end{cases}$ donne $\begin{cases} t = -5 \\ t = \dfrac{5}{3} \\ t = -5 \end{cases}$ donc $D \notin (AB)$

Pour la droite (AC) :

$\begin{cases} -4 = 1 - 2u \\ 4 = -1 + 4u \\ -3 = 2 - 2u \end{cases}$ donne $\begin{cases} u = \dfrac{5}{2} \\ u = \dfrac{5}{4} \\ u = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ donc $D \notin (AC)$

Pour la droite (BC) :

$\begin{cases} -4 = 2 - 3v \\ 4 = 2 + v \\ -3 = 3 - 3v \end{cases}$ donne $\begin{cases} v = 2 \\ v = 2 \\ v = 2 \end{cases}$ donc $D \in (BC)$

25 **a)** A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1)

b) (AG) : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ (BH) : $\begin{cases} x = 1 - u \\ y = u \\ z = u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R})$

26 **a)** $\vec{u}(2\,;-1\,;3)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(-4\,;4\,;4)$ est un vecteur directeur de d'.

Or, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportielles), donc d et d' ne sont pas parallèles.

De plus, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-4) + (-1) \times 4 + 3 \times 4 = 0$, donc les droites d et d' sont orthogonales.

b) $\vec{u}(2\,;5\,;-3)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(-4\,;-10\,;6)$ est un vecteur directeur de d'.

Or, $\vec{v} = -2\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc les droites d et d' sont parallèles.

27 $\vec{n}(2\,;-3\,;5)$ et $\vec{m}(4\,;-6\,;10)$

28 **a)** Pour (ABC) : $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{DH}$

b) Pour (BCF) : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$

c) Pour (ADF) : $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{HC}$

29 **a)** Faux **b)** Vrai **c)** Vrai **d)** Faux

30 $x + 2y + z = 0$.

31 Leyla a raison car $\vec{n}(2\,;-3\,;4)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $2 \times 1 - 3 \times 0 + 4 \times 2 - 10 = 0$.

32 $\mathcal{P} : y - 2 = 0$ $\qquad \mathcal{Q} : z - 2 = 0$

33 • $2 \times 1 - 3 \times (-1) + 0 - 5 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}$

• $2 \times 2 - 3 \times (-1) + 3 - 5 = 5$ et $5 \neq 0$ donc $B \notin \mathcal{P}$

• $2 \times \dfrac{3}{2} - 3 \times \dfrac{2}{3} + 5 - 5 = 1$ et $1 \neq 0$ donc $C \notin \mathcal{P}$

34 **a)** On choisit, par exemple :

• $x = 0$ et $y = 0$, ainsi $0 - 0 + 2z + 1 = 0$ d'où $z = -\dfrac{1}{2}$ et $A\left(0\,;0\,;-\dfrac{1}{2}\right) \in \mathcal{P}$

• $x = 1$ et $y = 0$, ainsi $1 - 0 + 2z + 1 = 0$ d'où $z = -1$ et $B(1\,;0\,;-1) \in \mathcal{P}$

• $x = 0$ et $y = 1$, ainsi $0 - 1 + 2z + 1 = 0$ d'où $z = 0$ et $C(0\,;1\,;0) \in \mathcal{P}$

b) $\overrightarrow{AB}\left(1\,;0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(0\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

35 **a)** $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $x + y - 2z + d = 0$. Or $A(2\,;-1\,;3) \in \mathcal{P}$, donc $2 + (-1) - 2 \times 3 + d = 0$ ainsi $d = 5$ et $\mathcal{P}$ a pour équation $x + y - 2z + 5 = 0$.

b) • $-2 + 0 - 2 \times 1 + 5 = 1$ et $1 \neq 0$ donc $B \notin \mathcal{P}$.

• $3 + 0 - 2 \times 4 + 5 = 0$ donc $C \in \mathcal{P}$.

36 **a)** $\vec{n}(-1;1;4)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$, donc une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme :

$-x + y + 4z + d = 0$.

Or $A(2\,;1\,;5) \in \mathcal{P}$, donc $-2 + 1 + 4 \times 5 + d = 0$ d'où $d = -19$ et $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 19 = 0$.

On procède de la même façon pour les questions suivantes et on obtient :

b) $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$

c) $\mathcal{P} : z + 1 = 0$

d) $\mathcal{P} : -3x + 2y - 8 = 0$

37 **a)** $\overrightarrow{AB}(0\,;1;2)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

b) Une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme $y + 2z + d = 0$. Or $B(3\,;1\,;2) \in \mathcal{P}$, donc $1 + 2 \times 2 + d = 0$ ainsi $d = -5$ et $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $y + 2z - 5 = 0$.

38 **a)** $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles, donc un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est aussi normal à $\mathcal{Q}$.

Or $\vec{n}(5\,;-1\,;1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, c'est donc aussi un vecteur normal à $\mathcal{Q}$.

b) Une équation de $\mathcal{Q}$ est de la forme $5x - y + z + d = 0$. Or $A(1\,;-1\,;-2) \in \mathcal{Q}$, donc $5 \times 1 - (-1) + (-2) + d = 0$ ainsi $d = -4$.

$\mathcal{Q}$ a pour équation cartésienne $5x - y + z - 4 = 0$.

39 **a)** $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;0)$ est un vecteur normal à (BCF).

$\overrightarrow{AF}(1\,;0\,;1)$ est un vecteur normal à (BCE).

b) • Une équation cartésienne de (BCF) est de la forme $x + d = 0$. Or $B(1\,;0\,;0) \in (BCF)$, donc $1 + d = 0$ ainsi $d = -1$ et (BCF) a pour équation $x - 1 = 0$.

• Une équation cartésienne de (BCE) est de la forme $x + z + d = 0$. Or $B(1\,;0\,;0) \in (BCE)$, donc $1 + d = 0$ ainsi $d = -1$ et (BCE) a pour équation cartésienne $x + z - 1 = 0$.

40 $\vec{n}(1\,;-3\,;1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et donc un vecteur directeur de d.

De plus, $A(2\,;-3\,;5) \in d$, donc d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 + t \end{cases}$$

41 **a)** Une équation de $\mathcal{P}$ est de la forme $4x + 6y + 3z + d = 0$. Or $A(3\,;1\,;-2) \in \mathcal{P}$, donc $4 \times 3 + 6 \times 1 + 3 \times (-2) + d = 0$ ainsi $d = -12$ et $\mathcal{P}$ a pour équation $4x + 6y + 3z - 12 = 0$.

b) $\vec{n}(4\,;6\,;3)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et donc de $\mathcal{P}'$. Ainsi, une équation de $\mathcal{P}'$ est de la forme $4x + 6y + 3z + d' = 0$. Or $C(-5\,;0\,;7) \in \mathcal{P}'$, donc $4 \times (-5) + 6 \times 0 + 3 \times 7 + d' = 0$ ainsi $d' = -1$ et $\mathcal{P}'$ a pour équation $4x + 6y + 3z - 1 = 0$.

42 $\overrightarrow{AB}(-2\,;-2\,;1)$ est un vecteur normal de ce plan $\mathcal{P}$. Donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $-2x - 2y + z + d = 0$.

Or $C(5\,;1\,;-2) \in \mathcal{P}$,

donc $-2 \times 5 - 2 \times 1 + (-2) + d = 0$

soit $-14 + d = 0$ et $d = 14$.

Ainsi, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $-2x - 2y + z + 14 = 0$.

43 **1.** $\overrightarrow{IJ}(-2\,;-2\,;-2)$ et $\overrightarrow{IK}(1\,;1\,;0)$ donc leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires et que les points I, J, K ne sont pas alignés.

2. a) $\overrightarrow{IJ} \cdot \vec{n} = -2 \times 2 + (-2) \times (-2) + (-2) \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{IJ} \perp \vec{n}$

$\overrightarrow{IK} \cdot \vec{n} = 1 \times 2 + 1 \times (-2) + 0 \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{IK} \perp \vec{n}$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de (IJK) donc $\vec{n}$ est un vecteur normal de (IJK).

b) Une équation de (IJK) est de la forme $2x - 2y + d = 0$. Or $I(1\,;2\,;0) \in (IJK)$, donc $2 \times 1 - 2 \times 2 + d = 0$ ainsi $d = 2$ et (IJK) a pour équation cartésienne $2x - 2y + 2 = 0$.

3. $L(-1\,;-2\,;-1)$ et $2 \times (-1) - 2 \times (-2) + 2 = 4$ et $4 \neq 0$ donc $L \notin (IJK)$.

Les points I, J, K, L ne sont donc pas coplanaires.

44 $\overrightarrow{AB}(4\,;0\,;4)$ et $\overrightarrow{AM}(x+1\,;y-2\,;z+1)$, donc

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 4(x+1) + 0(y-2) + 4(z+1)$

$= 4x + 4z + 8.$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ équivaut à $4x + 4z + 8 = 0$.

L'ensemble des points M est le plan d'équation $4x + 4z + 8 = 0$.

45 **a)** $A(0\,;0\,;2)$, $B(2\,;0\,;0)$, $C(0\,;3\,;0)$, $D(0\,;-2\,;0)$.

b) • $\overrightarrow{AB}(2\,;0\,;-2)$, $\overrightarrow{AC}(0\,;3\,;-2)$

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 2 \times 3 + 0 \times 2 - 2 \times 3 = 0$ et

$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \times 3 + 3 \times 2 + (-2) \times 3 = 0$

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (ABC).

• $\overrightarrow{AD}(-12\,;-2\,;2)$

Or $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{m} = 2 \times 1 + 0 \times (-1) + (-2) \times 1 = 0$ et

$\overrightarrow{AD} \cdot \vec{m} = 0 \times 1 + (-2) \times (-1) + (-2) \times 1 = 0$

Donc $\vec{m}$ est un vecteur normal du plan (ABD).

c) • Une équation du plan (ABC) est de la forme $3x + 2y + 3z + d = 0$. Or $B \in (ABC)$, donc $3 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0$ ainsi $d = -6$ et (ABC) a pour équation $3x + 2y + 3z - 6 = 0$.

• Une équation du plan (ABD) est de la forme $x - y + z + d = 0$.

Or $B \in (ABD)$, donc $2 - 0 + 0 + d = 0$ ainsi $d = -2$ et (ABD) a pour équation $x - y + z - 2 = 0$.

d) $-10 - (-15) - 3 - 2 = 0$ donc $E \in (ABD)$.

Alix a raison.

46 **a)** $\overrightarrow{AB}(2\,;4\,;-2)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et le milieu $I(2\,;0\,;2)$ de [AB] est un point de $\mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ a donc une équation de la forme $2x + 4y - 2z + d = 0$. Or $I \in \mathcal{P}$, donc $2 \times 2 + 4 \times 0 - 2 \times 2 + d = 0$ ainsi $d = 0$ et $\mathcal{P}$ a pour équation $2x + 4y - 2z = 0$.

b) La distance de A à $\mathcal{P}$ est AI et la distance de B à $\mathcal{P}$ est BI. Or AI = BI car I est le milieu de [AB], donc A et B sont équidistants de $\mathcal{P}$.

47 Le système (2).

48 Le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et d est $\mathrm{I}(-10\,;6\,;4)$ (car on trouve $t=-5$).

49 **a)** $\vec{u}(-1;2;1)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}'(1;-1;-2)$ est un vecteur directeur de d'.

b) Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Les droites d et d' peuvent être sécantes ou non coplanaires.

c) On résout le système :

$$\begin{cases} 1-t=2+t' \\ 2+2t=-2-t' \\ -1+t=-2t' \end{cases} \text{ qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} t+t'=-1 \\ 2t+t'=-4 \\ t+2t'=1 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} t'=2 \\ t=-3 \end{cases}$$

On remplace t dans la représentation paramétrique de d et on obtient :

$$\begin{cases} x=4 \\ y=-4 \\ z=-4 \end{cases}$$

Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(4\,;-4\,;-4)$.

50 **a)** $\vec{u}(-1;3;-4)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}'(4\,;-1;5)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.

b) On résout le système :

$$\begin{cases} 1-t=-3+4t' \\ 2+3t=4-t' \\ -4t=-6+5t' \end{cases} \text{ qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} t+4t'=4 \\ 3t+t'=2 \\ 4t+5t'=6 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} t=\dfrac{4}{11} \\ t'=\dfrac{10}{11} \end{cases}$$

On remplace t par $\dfrac{4}{11}$ dans la représentation paramétrique de d et on obtient :

$$\begin{cases} x=\dfrac{7}{11} \\ y=\dfrac{34}{11} \\ z=-\dfrac{16}{11} \end{cases}$$

Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{11};\dfrac{34}{11};-\dfrac{16}{11}\right)$.

51 On trouve $t=-5$ et $t'=4$.

Le point d'intersection a pour coordonnées $(6\,;-10\,;4)$.

52 **a)** $\vec{u}(-1;1;-3)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{u}'(1;-2\,;1)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires, donc d' et d' ne sont pas parallèles.

b) On résout le système :

$$\begin{cases} 5-t=t' \\ 2+t=2-2t' \\ 1-3t=1+t' \end{cases} \text{ qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} t+t'=5 \\ t=0 \\ t'=0 \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Ainsi, d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes, donc elles sont non coplanaires.

53 $\vec{u}(3\,;1;-1)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{u}'(1;1;-1)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.

On résout le système :

$$\begin{cases} 3t=1+t' \\ -1+t=t' \\ 2-t=3-t' \end{cases} \text{ qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} 3t-t'=1 \\ t-t'=1 \\ t-t'=-1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Ainsi, d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes donc elles sont non coplanaires.

54 $\vec{u}(2\,;-1;-2)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{n}(4\,;-2\,;-4)$ est un vecteur normal de $\mathscr{Q}$.

Or $\vec{n}=2\vec{u}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

On en déduit que $\mathscr{Q}$ est orthogonal à d.

b) On résout le système :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=-1-2t \\ 4x-2y-4z+1=0 \end{cases} \text{ qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=-1-2t \\ 4(1+2t)-2(3-t)-4(-1-2t)+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - 2t \\ t = -\dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{19}{6} \\ z = -\dfrac{2}{3} \\ t = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et d a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{19}{6}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

55 **a)** $\vec{u}(1; -1; -3)$ est un vecteur directeur de d.
$\vec{n}(1; 4; -5)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.
Or $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-1) \times 4 + (-3) \times (-5) = 12$ et $12 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, donc $\mathcal{P}$ et d ne sont pas parallèles.
b) On résout le système :

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - 3t \\ x + 4y - 5z - 16 = 0 \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - 3t \\ -5 + t + 4(4 - t) - 5(5 - t) - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 4 - t \\ z = 5 - 3t \\ t = \dfrac{5}{2} \end{cases} \text{c'est-à-dire} \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = -\dfrac{5}{2} \\ t = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et d a pour coordonnées $\left(-\dfrac{5}{2}; \dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$.

56 On résout le système :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4t \\ 4x - 3z + 20 = 0 \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4t \\ 4(5 - 2t) - (4t) + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4t \\ t = 2 \end{cases} \text{c'est-à-dire} \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ z = 8 \\ t = 2 \end{cases}$$

Le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et d a pour coordonnées $(1 ; 5 ; 8)$.

57 **a)** En comparant les abscisses, les ordonnées et les côtes des vecteurs $\vec{m}$ et $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, on obtient le système indiqué.
En effet, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}(-5a - c ; 2b ; 3b + c)$.

D'où $\begin{cases} -5a - c = 1 \\ 2b = 2 \\ 3b + c = 3 \end{cases}$

b) On obtient $\begin{cases} a = -\dfrac{1}{5} \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$

Ainsi, $\vec{m} = -\dfrac{1}{5}\vec{u} + \vec{v}$

58 **a)** $\overrightarrow{AB}(2 ; a - 1 ; b - a)$
$\overrightarrow{AC}(-4 ; b - 1 ; a + 1)$
b) A, B, C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles.
Or, $-4 = -2 \times 2$, il faut donc que $b - 1 = -2(a - 1)$ et que $a + 1 = -2(b - a)$.

c) $\begin{cases} b - 1 = -2(a - 1) \\ a + 1 = -2(b - a) \end{cases}$ est successivement équivalent à $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -a + 2b = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 5a = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} b = \dfrac{1}{5} \\ a = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Ainsi, en remplaçant a par $\dfrac{7}{5}$ et b par $\dfrac{1}{5}$ dans les coordonnées de A, B, C, on peut conclure que les points $A\left(1; 1; \dfrac{7}{5}\right)$, $B\left(3; \dfrac{7}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$ et $C\left(-3; \dfrac{1}{5}; \dfrac{19}{5}\right)$ sont alignés.

59 On remplace les coordonnées des points A, B, C dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ et on obtient le système :

$$\begin{cases} 3a + b + 2 + d = 0 \\ -a + 2b + d = 0 \\ -4 + d = 0 \end{cases} \text{c'est-à-dire} \begin{cases} 3a + b = -6 \\ -a + 2b = -4 \\ d = 4 \end{cases}$$

ainsi $\begin{cases} a = -\dfrac{8}{7} \\ b = -\dfrac{18}{7} \\ d = 4 \end{cases}$

Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation cartésienne :

$$-\frac{8}{7}x - \frac{18}{7}y + z + 4 = 0.$$

60 **a)** $\vec{n}(2;1;-1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et donc un vecteur directeur de d.

d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1-t \end{cases}$$

b) Le point H est le point d'intersection de d et de $\mathcal{P}$.

On résout donc le système :

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = t \\ z = -1-t \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = t \\ z = -1-t \\ 2(x+2t)+t-(-1-t)+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = t \\ z = -1-t \\ t = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \text{c'est-à-dire} \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{4}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \\ t = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Le point H a pour coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

61 **a)** $\vec{n}(1;1;2)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et donc un vecteur directeur de d.

d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2+2t \end{cases}$$

b) Le point H est le point d'intersection de d et de $\mathcal{P}$.

On résout donc le système :

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = 2+2t \\ x+y+2z-3=0 \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = -1+2t \\ (2+t)+(3+t)+2(2+2t)-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = 2+2t \\ t = -1 \end{cases} \text{c'est-à-dire} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

Le point H a pour coordonnées $(1 ; 2 ; 0)$.

62 **a)** $\vec{u}(1;2;1)$ est un vecteur directeur de d et donc aussi un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

Ainsi, $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme : $x+2y+z+d=0$. Or $\mathrm{F}(0 ; 2 ; 1) \in \mathcal{P}$, donc $0+2\times 2+1+d=0$ d'où $d=-5$ et $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x+2y+z-5=0$.

b) Le point H est le point d'intersection de la droite d et du plan $\mathcal{P}$.

On résout le système :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -4+t \\ x+2y+z-5=0 \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -4+t \\ (1+t)+2(2+2t)+(-4+t)-5=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = -4+t \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases} \text{c'est-à-dire} \begin{cases} x = \dfrac{5}{3} \\ y = \dfrac{10}{3} \\ z = -\dfrac{10}{3} \\ t = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Le point H a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{10}{3};-\dfrac{10}{3}\right)$.

Pour se tester

63 **1.** C **2.** D **3.** B

64 **1.** A, B, C **2.** A, C

65 **1. Vrai**. En effet, $\mathrm{C}(1 ; 1 ; 0)$, $\mathrm{F}(1 ; 0 ; 1)$, $\mathrm{A}(0 ; 0 ; 0)$. $\overrightarrow{\mathrm{FC}}(0;1;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABG). Donc le plan (ABG) a une équation de la forme : $y-z+d=0$. Or $\mathrm{A} \in (\mathrm{ABG})$, donc $d=0$. Finalement, $y-z=0$ est une équation cartésienne du plan (ABG).

2. Vrai. En effet, si on note d la droite dont la représentation paramétrique est donnée, on vérifie si $\mathrm{C} \in d$.

$$\begin{cases} 1 = 1-2t \\ 1 = 1-2t \\ 0 = 2t \end{cases} \text{qui est équivalent à } t=0 \text{ donc } \mathrm{C} \in d.$$

On vérifie ensuite si E $\in d$.

$\begin{cases} 0=1-2t \\ 0=1-2t \\ 1=2t \end{cases}$ qui est équivalent à $t=\dfrac{1}{2}$ donc E $\in d$.

Finalement, la droite d est bien la droite (CE).

3. Faux. En effet, si on note $\mathcal{P}$ le plan passant par $\mathrm{I}\left(\dfrac{3}{4};0;1\right)$ et perpendiculaire à la droite (CE), c'est-à-dire du vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{CE}}(-1;-1;1)$ alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme : $-x-y+z+d=0$.

Or I $\in \mathcal{P}$, donc $-\dfrac{3}{4}-0+1+d=0$ d'où $d=-\dfrac{1}{4}$ et $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $-x-y+z-\dfrac{1}{4}=0$.

Le point H est le point d'intersection de d et de $\mathcal{P}$, on résout donc le système :

$\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-2t \\ z=2t \\ -x-y+z-\dfrac{1}{4}=0 \end{cases}$ est successivement

équivalent à $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-2t \\ z=2t \\ -(1-2t)-(1-2t)+2t-\dfrac{1}{4}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-2t \\ z=2t \\ t=\dfrac{3}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{4} \\ z=\dfrac{3}{4} \\ t=\dfrac{3}{8} \end{cases}$

Finalement, le projeté orthogonal du point I sur la droite (CE) a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

S'entraîner

66 **1. a)** ① d et d' sont sécantes en A.

② d et d' sont parallèles strictement.

③ d et d' sont confondues.

④ d et d' sont non coplanaires.

b) • Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, d et d' peuvent être strictement parallèles ou confondues : elles ont alors soit aucun, soit une infinité de points d'intersection.

• Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, d et d' peuvent être soit sécantes, soit non coplanaires : elles ont alors soit un seul, soit aucun point d'intersection.

2. a) $\vec{u}(-1;2;-3)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(2;-4;6)$ est un vecteur directeur de d'.

$\vec{v}=-2\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) Par exemple, en prenant $t=1$, le point A$(-1;3;1)\in d$.

On vérifie s'il appartient à d'.

$\begin{cases} -1=-4+2t' \\ 3=9-4t' \\ 1=-8+6t' \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} t'=\dfrac{3}{2} \\ t'=\dfrac{3}{2} \\ t'=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Donc A $\in d'$.

Les droites d et d' sont donc confondues.

3. a) $\vec{u}\left(1;-\dfrac{1}{4};3\right)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(-2;1;-6)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc d et d' ne sont pas parallèles.

On résout le système :

$\begin{cases} \dfrac{1}{3}+t=-1-2t' \\ 2-\dfrac{1}{4}t=5+t' \\ 3t=-4-6t' \end{cases}$; $\begin{cases} t+2t'=-\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{1}{4}t-t'=3 \\ 3t+6t'=-4 \end{cases}$;

$\begin{cases} t+2t'=-\dfrac{4}{3} \\ -\dfrac{1}{2}-2t'=6 \\ t+2t'=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} t+2t'=-\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{1}{2}t=-\dfrac{4}{3}+6 \end{cases}$;

$\begin{cases} t+2t'=-\dfrac{4}{3} \\ t=\dfrac{28}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} 2t'=-\dfrac{4}{3}-\dfrac{28}{3} \\ t=\dfrac{28}{3} \end{cases}$;

$\begin{cases} t'=-\dfrac{16}{3} \\ t=\dfrac{28}{3} \end{cases}$.

Les droites d et d' sont donc sécantes au point A$\left(\dfrac{29}{3};-\dfrac{1}{3};28\right)$.

b) $\vec{u}\left(\dfrac{1}{2};3;1\right)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(-4;-24;-8)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{v}=-8\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et d et d' sont parallèles.

Pour $t=0$, A$(-5;1;1)\in d$.

On vérifie si A appartient ou non à d'.

$$\begin{cases}-5=1-4t'\\ 1=2-24t';\\ 1=-8t'\end{cases}\qquad \begin{cases}t'=\dfrac{3}{2}\\ t'=\dfrac{1}{24}\\ t'=-\dfrac{1}{8}\end{cases}.$$

Ce système n'a pas de solution dans A $\notin d'$ et les droites d et d' sont strictement parallèles.

c) $\vec{u}(3\,;1;-4)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(2\,;-2\,;1)$ est un vecteur directeur de d'.

Or $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc d et d' ne sont pas parallèles.

On résout le système :

$$\begin{cases}5+3t=1+2t'\\ 2+t=10-2t';\\ 1-4t=4+t'\end{cases}\begin{cases}3t-2t'=-4\\ t+2t'=8\\ -4t-t'=3\end{cases};$$

$$\begin{cases}3t-2t'=-4\\ 4t=4\\ -4t-t'=3\end{cases};\begin{cases}3-2t'=-4\\ t=1\\ -4t-t'=3\end{cases};$$

$$\begin{cases}t'=\dfrac{7}{2}\\ t=1\,;\\ -4\times1-\dfrac{7}{2}=3\end{cases}\begin{cases}t'=\dfrac{7}{2}\\ t=1\,.\\ -\dfrac{15}{2}=3\end{cases}$$

Ce qui est impossible : ce système n'a donc pas de solution, donc les droites d et d' sont non coplanaires.

67 **1. a)** ① d et $\mathcal{P}$ sont sécants en B.

② d et $\mathcal{P}$ sont parallèles strictement.

③ d est incluse dans $\mathcal{P}$.

b) • Lorsque $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$, d et $\mathcal{P}$ sont soit strictement parallèles, et ils n'ont alors aucun point d'intersection ; soit d est incluse dans $\mathcal{P}$, et alors ils ont une infinité de points d'intersection.

• Lorsque $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq0$, d et $\mathcal{P}$ sont sécants. Ils ont alors un seul point d'intersection.

2. a) $\vec{u}(4\,;-1;-5)$ et $\vec{n}(2\,;3\,;1)$.

Ainsi $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ donc soit d et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles, soit d est incluse dans $\mathcal{P}$.

Or A$(-3\,;4\,;-9)\in d$.

De plus, $2\times(-3)+3\times4+(-9)+3=0$ donc A $\in\mathcal{P}$. On en déduit que d est incluse dans $\mathcal{P}$.

b) $\vec{u}(4\,;6\,;2)$ et $\vec{n}(1;-1;2)$.

Ainsi $\vec{u}\cdot\vec{n}=2$ et $2\neq0$ donc d et $\mathcal{P}$ sont sécants.

On résout alors le système :

$$\begin{cases}x=1+4t\\ y=-1+6t\\ z=-2+2t\\ x-y-2z+3=0\end{cases}\text{ on obtient }\begin{cases}x=7\\ y=8\\ z=1\\ t=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

d et $\mathcal{P}$ sont sécants en A$(7\,;8\,;1)$.

c) $\vec{u}(-1;2\,;1)$ et $\vec{n}(3\,;4\,;-5)$.

Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ donc soit d et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles, soit d est incluse dans $\mathcal{P}$.

Or, A$(1\,;0\,;-1)\in d$.

De plus, $3\times1+4\times0-5\times(-1)=8$ et $8\neq0$ donc A $\notin\mathcal{P}$.

On en déduit que d et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.

68 **Parcours 1**

a) $\vec{n}(2\,;-1;4)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$, c'est donc aussi un vecteur directeur de d.

De plus, A$(2\,;-5\,;1)\in d$. Donc d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=2+2t\\ y=-5-t\quad(t\in\mathbb{R})\\ z=1+4t\end{cases}$$

b) On résout le système :

$$\begin{cases}x=2+2t\\ y=-5-t\\ z=1+4\\ 2x-y+4z+8=0\end{cases}$$ qui est successivement équivalent à

$$\begin{cases}x=2+2t\\ y=-5-t\\ z=1+4t\\ 2(2+2t)-(-5-t)+4(1+4t)+8=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2+2t\\ y=-5-t\\ z=1+4t\\ t=-1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=0\\ y=-4\\ z=-3\\ t=-1\end{cases}$$

Le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $(0\,;-4\,;-3)$.

Parcours 2

a) La droite (BK) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$, donc un vecteur normal $\vec{n}(1;1;1)$ du plan $\mathcal{P}$ est également un vecteur directeur de la droite (BK).

Une représentation paramétrique de (BK) est :

$$\begin{cases}x=3+t\\ y=1+t\quad(t\in\mathbb{R})\\ z=t\end{cases}$$

b) On résout le système :

$$\begin{cases}x=3+t\\ y=1+t\\ z=4\\ x+y+z=0\end{cases}$$ est successivement équivalent à

$$\begin{cases}x=3+t\\ y=1+t\\ z=t\\ (3+t)+(1+t)+t=0\end{cases};$$

$\begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=t \\ 3t+4=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+t \\ z=t \\ t=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

En remplaçant t par $-\dfrac{4}{3}$ dans la représentation paramétrique de (BK), on en déduit que le point K a pour coordonnées : $\left(\dfrac{5}{3}\,;-\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{4}{3}\right)$.

69 **1.** Ce prisme a pour base le triangle ILP rectangle en L, donc son volume est :

V = Aire(base) × hauteur

$V=\dfrac{\mathrm{IL}\times \mathrm{LP}}{2}\times \mathrm{LM}$

$V=\dfrac{\frac{1}{2}\times 1}{2}\times 1$

$V=\dfrac{1}{4}$.

2. a) E(0 ; 0 ; 1), F(1 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), $\mathrm{K}\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$.

b) $\overrightarrow{\mathrm{EH}}(0\,;1\,;0)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{EH}}\cdot\vec{n}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{EK}}\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;-1\right)$ donc $\overrightarrow{\mathrm{EK}}\cdot\vec{n}=0$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (EHK), il est donc normal à ce plan.

c) L'équation du plan (EHK) est de la forme :

$2x+z+d=0$. Or E ∈ (EHK), donc $2\times 0+1+d=0$ d'où $d=-1$ et le plan (EHK) a pour équation cartésienne : $2x+z-1=0$.

d) $\vec{n}(2\,;0\,;1)$ est un vecteur normal de (EHK), c'est donc aussi un vecteur directeur de la droite d passant par F et orthogonale au plan (EHK).

De plus, F(1 ; 0 ; 1) ∈ d, donc d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

e) On résout le système :

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=1+t \\ 2x+z-1=0 \end{cases}$ qui est successivement équivalent à

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=1+t \\ 2(1+2t)+(1+t)-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=1+2t \\ y=0 \\ z=1+t \\ t=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=0 \\ z=\dfrac{3}{5} \\ t=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$

Le projeté orthogonal F′ de F sur (EHK) a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{5}\,;0\,;\dfrac{3}{5}\right)$.

3. On note V′ le volume du tétraèdre EFHK.

D'après le théorème de Pythagore,

$\mathrm{EK}=\sqrt{\mathrm{AK}^2+\mathrm{EA}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

De plus, $\overrightarrow{\mathrm{FF'}}\left(-\dfrac{4}{5}\,;0\,;-\dfrac{2}{5}\right)$ donc

$\mathrm{FF'}=\sqrt{\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2+0^2+\left(-\dfrac{2}{5}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ainsi, $V'=\dfrac{1}{3}\times \text{Aire(base)}\times \text{hauteur}$

$V'=\dfrac{1}{3}\times \text{Aire(EHK)}\times \mathrm{FF'}$

$V'=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\mathrm{EK}\times \mathrm{EH}}{2}\times \mathrm{FF'}$

$V'=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}\times 1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$V'=\dfrac{1}{6}$.

Finalement, $V'<V$.

70 **1. a)** A(0 ; 0 ; 0) et E(0 ; 0 ; 1), donc $\mathrm{I}\left(0\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

C(1 ; 1 ; 0) et H(0 ; 1 ; 1), donc $\mathrm{J}\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

b) $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(\dfrac{1}{2}\,;1\,;0\right)$ et I ∈ (IJ) donc la droite (IJ) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=t \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

2. a) • On note $(x_{\mathrm{P}}\,;y_{\mathrm{P}}\,;z_{\mathrm{P}})$ les coordonnées de P.

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ est successivement équivalent à :

$\begin{cases} x_{\mathrm{P}}-0=\dfrac{1}{3}(0-0) \\ y_{\mathrm{P}}-0=\dfrac{1}{3}(1-0) \\ z_{\mathrm{P}}-1=\dfrac{1}{3}(1-1) \end{cases}$; $\begin{cases} x_{\mathrm{P}}=0 \\ y_{\mathrm{P}}=\dfrac{1}{3} \\ z_{\mathrm{P}}=1 \end{cases}$. Ainsi $\mathrm{P}\left(0\,;\dfrac{1}{3}\,;1\right)$.

• On note $(x_{\mathrm{Q}}\,;y_{\mathrm{Q}}\,;z_{\mathrm{Q}})$ les coordonnées de Q.

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ est successivement équivalent à :

$$\begin{cases} x_Q-0=\frac{1}{3}(1-0)\\ y_Q-0=\frac{1}{3}(1-0)\\ z_Q-0=\frac{1}{3}(0-0)\end{cases};\ \begin{cases} x_Q=\frac{1}{3}\\ y_Q=\frac{1}{3}\\ z_Q=0\end{cases}.\ \text{Ainsi } Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right).$$

• K est le milieu de [PQ] donc $K\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$.

b) On vérifie si $K\in(IJ)$:

$$\begin{cases}\frac{1}{6}=\frac{1}{2}t\\ \frac{1}{3}=t\\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{cases}\quad \text{est équivalent à } t=\frac{1}{3}.$$

Donc $K\in[IJ]$ et les points I, J, K sont alignés.

71 **a)** $I(-1;-1;4)$, $J(0;-3;4)$, $K(-3;0;5)$.

b) • On note Δ_A la médiane issue de A.

$A\in\Delta_A$ et $\overrightarrow{AK}(-5;4;2)$ est un vecteur directeur de Δ_A.

Donc Δ_A a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=2-5t\\ y=-4+4t\quad (t\in\mathbb{R})\\ z=3+2t\end{cases}$$

• On note Δ_B la médiane issue de B.

$B\in\Delta_B$ et $\overrightarrow{BJ}(4;-5;-1)$ est un vecteur directeur de Δ_B.

Donc Δ_B a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=-4+4t'\\ y=2-5t'\quad (t\in\mathbb{R})\\ z=5-t'\end{cases}$$

• On note Δ_C la médiane issue de C.

$C\in\Delta_C$ et $\overrightarrow{CI}(1;1;-1)$ est un vecteur directeur de Δ_C.

Donc Δ_C a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=-2+t''\\ y=-2+t''\quad (t''\in\mathbb{R})\\ z=5-t''\end{cases}$$

c) • On résout le système :

$$\begin{cases}2-5t=-4+4t'\\ -4+4t=2-5t'\\ 3+2t=5-t'\end{cases}\quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases}5t+4t'=6\\ 4t+5t'=6\\ 2t+t'=2\end{cases}\ \text{soit}\ \begin{cases}t=\frac{2}{3}\\ t'=\frac{2}{3}\end{cases}$$

• On remplace t par $\frac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de Δ_A afin de déterminer les coordonnées de G.

$$\begin{cases}x=2-5\times\frac{2}{3}\\ y=-4+4\times\frac{2}{3}\\ z=3+2\times\frac{2}{3}\end{cases}.\ \text{Ainsi } G\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3};\frac{13}{3}\right).$$

• On vérifie que $G\in\Delta_C$

$$\begin{cases}-\frac{4}{3}=-2+t''\\ -\frac{4}{3}=-2+t''\\ \frac{13}{3}=5-t''\end{cases}\ \text{qui est équivalent à } t''=\frac{2}{3}.$$

Ainsi, $G\in\Delta_C$.

72 **1.** $A(1;0;0)\in(ACH)$ et $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$ est un vecteur normal du plan (ACH) donc une équation de ce plan est de la forme : $x+y+z+d=0$.

Or $A\in(ACH)$, donc $1+d=0$ et $d=-1$.

Ainsi, le plan (ACH) a pour équation cartésienne $x+y+z-1=0$.

2. a) $F(1;1;1)\in\Delta$ et $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$ est un vecteur directeur de Δ. Donc d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\quad (t\in\mathbb{R})\\ z=1+t\end{cases}$$

b) K est le point d'intersection de d et de (ACH).

On résout donc le système :

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1+t\\ x+y+z-1=0\end{cases}\quad \text{qui est successivement équivalent à}$$

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1+t\\ (1+t)+(1+t)+(1+t)-1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=1+t\\ 2+3t=0\end{cases}\ \text{c'est-à-dire}\ \begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}\\ z=\frac{1}{3}\\ t=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Ainsi, $K\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

3.

$$FK=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

73 **1.** On s'assure simplement que les coordonnées des points E, B et D vérifient l'équation.

Par exemple, pour $E(0\,;0\,;6)$:

$3 \times 0 + 2 \times 0 + 6 \times 6 - 36 = 36 - 36 = 0.$

2. a) $A(0\,;0\,;0)$ et $G(12\,;18\,;6)$ donc $\overrightarrow{AG}(12\,;18\,;6)$.

Ainsi, (AG) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = 18t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 6t \end{cases}$$

b) On résout le système :

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = 18t \\ z = 6t \\ 3x + 2y + 6z - 36 = 0 \end{cases}$$ qui est successivement équivalent à

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = 18t \\ z = 6t \\ 3(12t) + 2(18t) + 6(6t) - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = 18t \\ z = 6t \\ 108t - 36 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \\ z = 2 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, $K(4\,;6\,;2)$.

3. $\vec{n}(3\,;2\,;6)$ est un vecteur normal au plan (EBD).

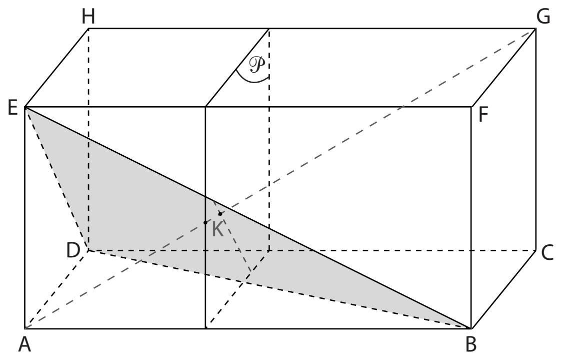
$\overrightarrow{AG}(12\,;18\,;6)$ est un vecteur directeur de la droite (AG).

Or $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas colinéaires, donc la droite (AG) n'est pas orthogonale au plan (EBD).

4. a) Les plans (ADE) et $\mathcal{P}$ sont parallèles, donc tout plan qui coupe l'un, coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Or, le plan (ADE) coupe le plan (EBD) suivant la droite (ED), donc la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (EBD) est parallèle à la droite (ED).

b)



74 **1.** $\left(A\,;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\,;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\,;\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé.

a) $A(0\,;0\,;0)$, $B(1\,;0\,;0)$, $C(0\,;1\,;1)$, $D(0\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$, $F(1\,;0\,;1)$, $G(1\,;1\,;1)$, $H(0\,;1\,;1)$, $I\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$, $J\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$, $K\left(\dfrac{1}{4}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{4}\right)$.

b) • $\overrightarrow{BE}(-1\,;0\,;1)$ est un vecteur normal du plan (ADF), donc (ADF) a une équation de la forme :

$-x + z + d = 0$. Or $A \in (ADF)$, donc $d = 0$.

Ainsi, (ADF) a une équation de la forme $-x + z = 0$.

• $\overrightarrow{IJ}(-1\,;0\,;1)$ est un vecteur normal du plan (AKG) donc (AKG) a une équation de la forme :

$-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}z + d = 0$. Or $A \in (AKG)$, donc $d = 0$.

Ainsi, (AKG) a pour équation : $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}z$.

c) Les vecteurs normaux aux deux plans, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires $(\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{IJ})$ donc les plans (ADF) et (AKG) sont parallèles.

d) Comme ces deux plans parallèles ont le point A en commun c'est qu'ils sont confondus.

75 **a)** $\overrightarrow{AM}(x-1\,;y+1\,;z-2)$, $\vec{u}(-3\,;1\,;0)$, $\vec{v}(2\,;0\,;1)$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ est équivalent à

$$\begin{cases} x - 1 = -3t + 2t' \\ y + 1 = t \\ z - 2 = t' \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 1 - 3t + 2t' \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t' \end{cases}$$

b) D'après ce qui précède $\begin{cases} x = 1 - 3(y+1) + 2(z-2) \\ t = y + 1 \\ t' = z - 2 \end{cases}$

La première équation donne :

$x + 3y - 2z + 6 = 0$ qui est une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

76 **Parcours 1**

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est équivalent à $\begin{cases} 0 = -a + 2b \\ 2 = 2a \\ -1 = b \end{cases}$

Ce système donne $\begin{cases} 0 = -3 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ donc il n'a pas de solution. Ainsi, il n'existe pas de nombres réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Le triplet $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ forme une base de l'espace.

Parcours 2

a) Les coordonnées des vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{n}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires.

b) $\vec{p} = a\vec{m} + b\vec{n}$ est équivalent à $\begin{cases} 1 = -a \\ 0 = a - b \\ 1 = b \end{cases}$

c) Ce système donne $\begin{cases} a = -1 \\ a = b \\ b = 1 \end{cases}$ donc il n'a pas de solution. Ainsi, il n'existe pas de nombres réels a et b tels que $\vec{p} = a\vec{m} + b\vec{n}$.

Le triplet $(\vec{p}\,;\vec{m}\,;\vec{n})$ forme donc une base de l'espace.

77 On reprend un raisonnement analogue à l'exercice précédent.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est équivalent à $\begin{cases} -2 = a - 5b \\ 7 = 2a + b \\ 9 = 3a \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 1 \\ a = 3 \end{cases}$

Donc $\vec{w} = 3\vec{u} + \vec{v}$. Ainsi, $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ ne forme pas une base de l'espace.

78 On reprend un raisonnement analogue à l'exercice précédent.

$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est équivalent à $\begin{cases} 4 = -2a + b \\ -1 = \frac{1}{2}a + b \\ 2 = a + 3b \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \\ 2 = -2 \end{cases}$ ce qui est impossible.

Donc ce système n'a pas de solution et le triplet $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ forme une base de l'espace.

79 **a)** $\overrightarrow{AB}(-2\,;0\,;-4)$, $\overrightarrow{AC}(1\,;-3\,;-4)$.

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires et les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC), si, et seulement si, $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} -2a - 4c = 0 \\ a - 3b - 4c = 0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} 2a + 4c = 0 \\ a - 3b - 4c = 0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} 2a + 4c = 0 \\ a - 3b - 4c = 0 \end{cases}$ est successivement équivalent à

$\begin{cases} a = -2c \\ 3b = a - 4c \end{cases}$; $\begin{cases} a = -2c \\ 3b = -2c - 4c \end{cases}$; $\begin{cases} a = -2c \\ b = -2c \end{cases}$.

d) Pour $c = 1$, $\vec{n}(-2\,;-2\,;1)$.

e) (ABC) a une équation cartésienne de la forme :

$-2x - 2y + z + d = 0$. Or $A(2\,;4\,;1) \in (ABC)$, donc $-2 \times 2 - 2 \times 4 + 1 + d = 0$ donc $-11 + d = 0$ et $d = 11$.

Ainsi, une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$-2x - 2y + z + 11 = 0$.

80 On procède comme à l'exercice précédent :

$\overrightarrow{AB}(-4\,;5\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;6\,;2)$ ne sont pas colinéaires, donc A, B, C ne sont pas alignés.

$\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal au plan (ABC) si, et seulement si, $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ qui est successivement

équivalent à $\begin{cases} -4a + 5b + c = 0 \\ -a + 6b + 2c = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -4a + 5b = -c \\ -a + 6b = -2c \end{cases}$;

$\begin{cases} -4a + 5b = -c \\ -19b = 7c \end{cases}$; $\begin{cases} -4a = -5 \times \left(-\frac{7}{19}c\right) - c \\ b = -\frac{7}{19}c \end{cases}$;

$\begin{cases} -4a = \frac{16}{19}c \\ b = -\frac{7}{19}c \end{cases}$; $\begin{cases} a = -\frac{4}{19}c \\ b = -\frac{7}{19}c \end{cases}$.

Pour $c = -19$, $\vec{n}(4\,;7\,;-19)$.

(ABC) a une équation cartésienne de la forme $4x + 7y - 19z + d = 0$.

Or $A(3\,;-5\,;1) \in (ABC)$, donc $4 \times 3 + 7 \times (-5) - 19 \times 1 + d = 0$ donc $-42 + d = 0$ et $d = 42$.

(ABC) a pour équation cartésienne :

$4x + 7y - 19z + 42 = 0$.

81 On procède comme à l'exercice précédent :

$\overrightarrow{AB}(6\,;-4\,;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(3\,;2\,;-1)$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, A, B, C ne sont pas alignés.

$\vec{n}(a\,;b\,;c)$ est un vecteur normal au plan (ABC) si, et seulement si, $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ qui est successivement

équivalent à $\begin{cases} 6a - 4b - c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 6a - 4b = c \\ 3a + 2b = c \end{cases}$;

$\begin{cases} 6a - 4b = c \\ b = -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}c \end{cases}$;

$\begin{cases} 6a - 4\left(-\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}c\right) = c \\ b = -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}c \end{cases}$;

$\begin{cases} 12a = 3c \\ b = -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}c \end{cases}$; $\begin{cases} a = \frac{1}{4}c \\ b = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{4}c + \frac{1}{2}c \end{cases}$; $\begin{cases} a = \frac{1}{4}c \\ b = \frac{1}{8}c \end{cases}$.

Pour $c = 8$, $\vec{n}(2\,;1\,;8)$.

(ABC) a une équation cartésienne de la forme $2x + y + 8z + d = 0$. Or $A(-1\,;0\,;2) \in (ABC)$, donc $2 \times (-1) + 8 \times 2 + d = 0$ soit $14 + d = 0$ et $d = -14$.

(ABC) a pour équation cartésienne :

$2x + y + 8z - 14 = 0$.

82 **1. a)** $I\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, $J\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$, $K\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\right)$.

b) $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;1)$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires et les points A, K, G ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{AD}(0\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{AG}(1\,;1\,;1)$.

Ainsi, $\overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AG}$ est successivement équivalent à $\begin{cases} \frac{1}{4} = \beta \\ \frac{1}{2} = \alpha + \beta \\ \frac{1}{4} = \beta \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AK}$ sont donc coplanaires.

3. b) $\overrightarrow{KA}\left(-\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{KD}\left(-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{4}\right)$, $\overrightarrow{KG}\left(\frac{3}{4}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4}\right)$.

Ainsi, $\overrightarrow{KA} = \alpha\overrightarrow{KD} + \beta\overrightarrow{KG}$ est successivement équivalent à $\begin{cases} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b \\ -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}a + \frac{3}{4}b \end{cases}$ $\begin{cases} -1 = -a + 3b \\ -1 = a + b \\ -1 = -a + 3b \end{cases}$; $\begin{cases} b = -\frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

83 **a)** $\overrightarrow{LK}\left(\frac{1}{2}\,;0\,;-\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{LI}\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

Or leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

On vérifie qu'il n'existe pas de nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{AJ} = a\overrightarrow{LK} + b\overrightarrow{LI}$.

Or $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$ donc, $\overrightarrow{AJ} = a\overrightarrow{LK} + b\overrightarrow{LI}$ est successivement équivalent à $\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}b \\ 1 = -\frac{1}{2}a \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2} = 0 \\ b = 1 \\ a = -2 \end{cases}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{LI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ forment une base de l'espace.

b) $\overrightarrow{AB}(1\,;0\,;0)$ donc $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{LK} + b\overrightarrow{LI} + c\overrightarrow{AJ}$ est équivalent à

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c \\ 0 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ 0 = -\frac{1}{2}a + c \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a + 2b + c = 2 \\ b + c = 0 \\ -a + 2c = 0 \end{cases}.$$

c) $b = -c$ et $a = 2c$.

Donc $2c - 2c + c = 2$ d'où $c = 2$. Ainsi $a = 4$ et $b = -2$.

Finalement, $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{LK} - 2\overrightarrow{LI} + 2\overrightarrow{AJ}$ donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{LI}, \overrightarrow{AJ})$ sont $(4\,;-2\,;2)$.

84 **a)** Un Point de d appartient à $\mathcal{P}$.

b) $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. **c)** $K \in d$.

85 **A.1. a)** À $t = 0$, $S_1(0)$ a pour coordonnées $(140\,;105\,;-170)$.

b) On résout le système :

$$\begin{cases} -1060 = 140 - 60t \\ -1695 = 105 - 90t \\ -770 = -170 - 30t \end{cases} \quad \text{soit } t = 20.$$

Il mettra 20 min pour atteindre l'épave E_1.

c) Pour tout $t \in [0\,;20]$,

$\overrightarrow{E_1S_1(t)} = (1200 - 60t\,;1800 - 90t\,;600 - 30t)$, donc

$E_1S_1(t) = \sqrt{(1200 - 60t)^2 + (1800 - 90t)^2 + (600 - 30t)^2}$

$E_1S_1(t) = \sqrt{(60(20 - t))^2 + (90(20 - t))^2 + (30(20 - t))^2}$

$E_1S_1(t) = (20 - t) \times 600\sqrt{14}$

2. a) $\overrightarrow{S_2(0)S_2(3)}$ a pour coordonnées $(-270\,;-540\,;-180)$ et c'est un vecteur directeur de la trajectoire du second sous-marin modélisée par la droite $\mathcal{D}$.

Comme cela correspond à un déplacement de 3 min, on le ramène à un déplacement d'une minute en prenant $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{S_2(0)S_2(3)}$ soit $\vec{u}(-90\,;-180\,;-60)$.

De plus, $S_2(0) \in (S_2(0)S_2(3))$, donc la droite $(S_2(0)S_2(3))$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 68 - 90t \\ y(t) = 135 - 180t \\ z(t) = -68 - 60t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ désigne le temps, en minutes.}$$

b) On résout le système :

$$\begin{cases} -1615 = 68 - 90t \\ -3231 = 135 - 180t \\ -1190 = -68 - 60t \end{cases} \quad \text{soit } t = 18{,}7.$$

Il mettra 18,7 min à atteindre l'épave E_2.

c) Pour tout t de $[0\,;18{,}7]$,

$\overrightarrow{E_2S_2(t)} = (1683 - 90t\,; 3366 - 180t\,; 1122 - 60t)$,

donc

$E_2S_2(t)$

$= \sqrt{(1683 - 90t)^2 + (3366 - 180t)^2 + (1122 - 60t)^2}$

$E_2S_2(t) = \sqrt{44100t^2 - 1649340t^2 + 15421329}$

$E_2S_2(t)$

$= \sqrt{(90(18{,}7 - t))^2 + (180(18{,}7 - t))^2 + (60(18{,}7 - t))^2}$

$E_2S_2(t) = (18{,}7 - t) \times 3927$.

B.1. a) A. Pour $t = 0$, $E_1S_1(0) = \sqrt{5040000} = 600\sqrt{14}$ et $E_2S_2(0) = \sqrt{15421329} = 3927$.

Ainsi, $E_1S_1(0) < E_2S_2(0)$, donc le sous-marin 1 est plus proche de son épave.

b) d_2 = 3 927

d_2 = 3 927 (18,7-t)

Le programme indique $t \approx 16{,}97$ min, soit environ 16 min et 58 secondes.

```
from math import *

def MêmeDistance():
    t=0
    d_1=600*sqrt(14)
    d_2=3927
    while d_1<d_2:
        t=t+0.01
        d_1=600*sqrt(14)*(20-t)
        d_2=3927*(18.7-t)
    return t
```

2. $E_1S_1(t) = E_2S_2(t)$ est successivement équivalent à $600\sqrt{14}(20 - t) = 3927(18{,}7 - t)$;

$(3927 - 600\sqrt{14})t = 3927 \times 18{,}7 - 20 \times 600\sqrt{14}$;

$$t = \frac{3927 \times 18{,}7 - 20 \times 600\sqrt{14}}{3927 - 600\sqrt{14}} \approx 16{,}96.$$

86 **a)** $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda\vec{n}$.

b) (AH) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ z = z_A + \lambda c \end{cases}$$

c) Le point H correspond à $-\lambda_0$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda_0\vec{n}$.

d) $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

De plus, $H(x_H\,; y_H\,; z_H) \in \mathcal{P}$,

donc $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$

d'où $a(x_A + \lambda a) + b(y_A + \lambda b) + c(z_A + \lambda c) + d = 0$

d'où $\lambda(a^2 + b^2 + c^2) = -ax_A - by_A - cz_A - d$

et $|\lambda| = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{a^2 + b^2 + c^2}$

Ainsi, $AH = |\lambda|\|\vec{n}\| = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

2. a) $D = \dfrac{|1 + (-1) - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

La distance d du point A au plan $\mathcal{P}$ est de $\sqrt{3}$.

b) $AH = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$, donc AH = D.

De plus, $H \in \mathcal{P}$ car $2 + 0 - 1 - 1 = 0$, donc H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

87 **1.** $\overrightarrow{AB}(-5\,;-2\,;4)$ et $\overrightarrow{AC}(1\,;1\,;1)$.

Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires et les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. a) $\vec{u}(2\,;-3\,;1)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-5) + (-3) \times (-2) + 1 \times 4 = 0$

et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + 1 \times 1 = 0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC) et d est orthogonale au plan (ABC).

b) Une équation du plan (ABC) est de la forme : $2x - 3y + z + d = 0$. Or, $A(2\,;1\,;3) \in (ABC)$, donc $2 \times 2 - 3 \times 1 + 3 + d = 0$ donc $4 + d = 0$ et $d = -4$.

(ABC) a donc pour équation cartésienne :

$2x - 3y + z - 4 = 0$.

3. a) On résout le système :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{et on obtient} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \\ z = 5 \\ t = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $H(-5\,;-3\,;5)$.

b) $\overrightarrow{HA}(7\,;4\,;-2)$, $\overrightarrow{HB}(2\,;2\,;2)$, $\overrightarrow{HC}(8\,;5\,;-1)$.

$a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC} = \vec{0}$ est successivement équivalent à $\begin{cases} 7a + 2b + 8bc = 0 \\ 4a + 2b + 5c = 0\,; \\ -2a + 2b - c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 7a + 2b + 8c = 0 \\ 3a + 3c = 0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} b = -\dfrac{c}{2}. \\ a = -c \end{cases}$$

En choisissant $c = 2$, on obtient $a = -2$ et $b = -1$.

Ainsi, $-2\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

4. $-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

$= -2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) - (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) + 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})$

$= -2\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} + 2\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{MH}$

$= -\overrightarrow{MH}$

$\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$.

Ainsi, $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$ est équivalent à $-\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$. L'ensemble Γ est le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{CB}$.

88 • On commence par calculer la distance entre les deux plans :

$\mathcal{P}$ d'équation $2x - 3y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{Q}$ d'équation $-4x + 6y - 2z - 58 = 0$.

On choisit un point $A(1\,;1\,;0)$ de $\mathcal{P}$ et on détermine les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{Q}$.

La droite Δ passant par A et orthogonale à $\mathcal{Q}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 + 6t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2t \end{cases}$$

H est le point d'intersection de Δ et $\mathcal{Q}$, on résout donc le système :

$$\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 + 6t \\ z = -2t \\ -4x + 6y - 2z - 7 = 0 \end{cases}$$ et, après calculs, on trouve $$\begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \\ z = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{H}(-3\,;7\,;-2)$

$\mathrm{AH} = \sqrt{(-3-1)^2 + (7-1)^2 + (-2)^2}$

$\mathrm{AH} = \sqrt{56}$

• La sphère correspondante à la cabine de pilotage a pour diamètre $\frac{1}{3}\mathrm{AH}$, donc pour rayon $\frac{1}{6}\mathrm{AH}$.

$\mathrm{R} = \frac{1}{6}\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{56}}{6}$.

Le volume de cette sphère est donc :

$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi\mathrm{R}^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{56}}{6}\right)^3 \approx 8{,}1\,\mathrm{m}^3$.

89 I est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, on commence par déterminer ses coordonnées.

Δ est la droite passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$, elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 4t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 4t \\ z = -1 + t \\ 2x - 4y + z + 6 = 0 \end{cases}$$ et on trouve $$\begin{cases} x = \frac{23}{21} \\ y = \frac{38}{21} \\ z = -\frac{20}{21} \\ t = \frac{1}{21} \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{I}\left(\frac{23}{21}\,;\frac{38}{21}\,;-\frac{20}{21}\right)$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\left(\frac{2}{21}\,;-\frac{4}{21}\,;\frac{1}{21}\right)$ et $\mathrm{AI} = \sqrt{\left(\frac{2}{21}\right)^2 + \left(-\frac{4}{21}\right)^2 + \left(\frac{1}{21}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{21}$.

Pour M un point du cercle rouge, le triangle AIM est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore, $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{AI}^2 + \mathrm{IM}^2$

Ainsi, $\mathrm{IM} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{21}\right)^2} = \sqrt{\frac{335}{21}}$.

90 **a)** Il faut déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur la droite *d*.

Le plan $\mathcal{P}$ passant par C et orthogonal à *d* a une équation cartésienne de la forme : $2x - y + 3z + d = 0$.

Or $\mathrm{C}(26\,;-17\,;32) \in \mathcal{P}$, donc $2 \times 26 - (-17) + 3 \times 32 + d = 0$ d'où $165 + d = 0$ et $d = -165$.

Ainsi, $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$2x - y + 3z - 165 = 0$.

On résout alors le système :

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -8 + 3t \\ 2x - y + 3z - 165 = 0 \end{cases}$$ et, après calculs, on trouve $$\begin{cases} x = \frac{172}{7} \\ y = -\frac{79}{7} \\ z = \frac{244}{7} \\ t = \frac{100}{7} \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{I}\left(\frac{172}{7}\,;-\frac{79}{7}\,;\frac{244}{7}\right)$. I est le point cherché.

b) $\overrightarrow{\mathrm{CI}}\left(-\frac{10}{7}\,;\frac{40}{7}\,;\frac{20}{7}\right)$.

D'où $\mathrm{CI} = \sqrt{\left(-\frac{10}{7}\right)^2 + \left(\frac{40}{7}\right)^2 + \left(\frac{20}{7}\right)^2}$

$\mathrm{CI} = \frac{10\sqrt{21}}{7} \approx 6{,}54$ cm.

Le caméléon pourra donc attraper la libellule.

91 **a)** $\vec{n}(2\,;5\,;-3)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $\vec{m}(-7\,;2\,;1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{Q}$.

Or $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas colinéaires, donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.

b) Déterminer l'intersection de ces plans revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z - 15 = 0 \\ -7x + 2y + z + 18 = 0 \end{cases}$$ soit $$\begin{cases} 2x + 5y = 15 + 3z \\ -7x + 2y = -18 - z \end{cases}$$

c) On considère *z* comme un paramètre et on résout le système précédent en *x* et *y* :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 15 + 3z \\ 39x = 120 + 11z \end{cases}$$ d'où $$\begin{cases} 2x + 5y = 15 + 3z \\ x = \frac{40}{13} + \frac{11}{39}z \end{cases}$$

et $\begin{cases} x = \dfrac{40}{13} + \dfrac{11}{39}z \\ y = \dfrac{23}{13} + \dfrac{19}{39}z \end{cases}$

d) On choisit, par exemple, $z = 0$, on en déduit que $x = \dfrac{40}{13}$ et $y = \dfrac{23}{13}$. Donc $A\left(\dfrac{40}{13}; \dfrac{23}{13}; 0\right)$ est un point de cette droite.

Puis, on choisit, par exemple, $z = 1$, on en déduit que $x = \dfrac{131}{39}$ et $y = \dfrac{88}{39}$. Donc $B\left(\dfrac{131}{39}; \dfrac{88}{39}; 1\right)$ est un autre point de cette droite.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\left(\dfrac{11}{39}; \dfrac{19}{39}; 1\right)$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

92 • On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

On pose $z = t$ et on résout le système formé par les équations des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

$\begin{cases} 4x + 3y + t + 2 = 0 \\ x + 2y + t - 5 = 0 \end{cases}$ qui est successivement équivalent à $\begin{cases} 4x + 3y = -t - 2 \\ x + 2y = -t + 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x + 3y = -t - 2 \\ -5y = 3t - 22 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + 3y = -t - 2 \\ y = \dfrac{22}{5} - \dfrac{3}{5}t \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\dfrac{19}{5} + \dfrac{1}{5}t \\ y = \dfrac{22}{5} - \dfrac{3}{5}t \end{cases}$

Une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{19}{5} + \dfrac{1}{5}t \\ y = \dfrac{22}{5} - \dfrac{3}{5}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

• On détermine alors les coordonnées du point d'intersection de Δ et de $\mathcal{R}$ (puisqu'ils ne sont pas parallèles) en résolvant le système :

$\begin{cases} x = -\dfrac{19}{5} + \dfrac{1}{5}t \\ y = \dfrac{22}{5} - \dfrac{3}{5}t \\ z = t \\ 3x + 5y + 2z - 9 = 0 \end{cases}$ ce qui, après calculs, donne

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \\ z = 4 \\ t = 4 \end{cases}$$

Ainsi, les trois plans sont sécants en le point $I(-3; 2; 4)$.

93 • On détermine une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
$H(0; 2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ donc $\overrightarrow{OH}(0; 2\sqrt{3}; \sqrt{6})$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$. Ainsi, $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $2\sqrt{3}y + \sqrt{6}z + d = 0$.
Or $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right) \in \mathcal{P}$
donc $2\sqrt{3} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{6} \times 0 + d = 0$
donc $9 + d = 0$ et $d = -9$.
Ainsi, $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :
$2\sqrt{3}y + \sqrt{6}z - 9 = 0$.
• On détermine une représentation paramétrique de (BD) :
$$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = \sqrt{3}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2\sqrt{6}t \end{cases}$$
• On recherche alors les coordonnées du point d'intersection de (BD) et $\mathcal{P}$ en résolvant le système :

$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = 2\sqrt{6}t \\ 2\sqrt{3}y + \sqrt{6}z - 9 = 0 \end{cases}$ ce qui, après calculs, donne

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z = \sqrt{6} \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Le point d'intersection est donc le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{6}\right)$ ce qui correspond bien au milieu de [BD].

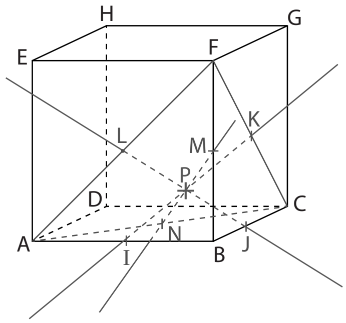
94 **1.** $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont orthogonaux si, et seulement si, le produit scalaire de leurs vecteurs normaux est nul.
Un vecteur normal à $\mathcal{P}_m$ est $\overrightarrow{n_m}\left(\dfrac{1}{4}m^2; m - 1; \dfrac{1}{2}m\right)$.
De même, un vecteur normal de $\mathcal{P}_n$ est $\overrightarrow{n_n}\left(\dfrac{1}{4}n^2; n - 1; \dfrac{1}{2}n\right)$.

Leur produit scalaire est nul si, et seulement si $\left(\frac{1}{4}mn\right)^2 + (m-1)(n-1) + \frac{mn}{4} = 0$, ce qui est bien la condition énoncée.

2. a) Cet algorithme recherche un couple $(m\,;n)$ vérifiant la condition du **1.**, m et n étant compris entre -10 et $+10$.

b) $(-4\,;1)$, $(-4\,;5)$, $(0\,;1)$, $(1\,;-4)$, $(1\,;0)$ et $(5\,;-4)$.

95 **a)**



b) • Dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$: la droite (IK) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

et la droite (JL) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t' \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t' \\ z = -\frac{1}{2}t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

• On détermine, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (IK) et (JL) en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = 1 + \frac{1}{2}t' \\ \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t' \\ \frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}t' \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

En remplaçant t par $\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de (IK), on obtient : $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4} \end{cases}$

Donc (IK) et (JL) sont sécantes en $P\left(\frac{3}{4}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$.

• Une représentation paramétrique de la droite (MN) est :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t'' \\ y = 0 - \frac{1}{2}t'' \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t'' \end{cases} \quad (t'' \in \mathbb{R})$$

• On vérifie alors si $P \in (MN)$:

$$\begin{cases} \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{2}t'' \\ \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}t'' \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t'' \end{cases} \text{ ce qui, après calculs, donne } t'' = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi $P \in (MN)$ et les droites (IK), (JL) et (MN) sont concourantes en P.

96 **1. a)** Ce système n'a pas de solution.

b) Les trois plans ne sont pas concourantes en un point.

2. a) • Pour la droite d_1, on pose $z = t$, ainsi, $\begin{cases} 3x - 4y + 7t - 11 = 0 \\ x + 2y - t + 1 = 0 \end{cases}$ qui est successivement équivalent à $\begin{cases} 3x - 4y = 11 - 7t \\ x + 2y = -1 + t \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = -1 + t \\ 5x = 9 - 5t \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{9}{5} - t + 2y = -1 + t \\ x = \frac{9}{5} - t \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{7}{5} + t \\ x = \frac{9}{5} - t \end{cases}$$

d_1 a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{9}{5} - t \\ y = -\frac{7}{5} + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

• En procédant de même pour la droite d_3, on obtient :

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{5} - t'' \\ y = -\frac{1}{5} + t'' \\ z = t'' \end{cases} \quad (t'' \in \mathbb{R})$$

• En procédant de même pour la droite d_2, on obtient :

$$\begin{cases} x = \frac{567}{65} - t' \\ y = -\frac{37}{65} + t' \\ z = t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R})$$

b) Ces trois droites ont le même vecteur directeur $\vec{u}(-1;1;1)$, donc elles sont parallèles.

Objectif BAC

97 **Partie 1**

1. d est orthogonale à $\mathcal{P}$ donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (AC). Donc (BD) est orthogonale (AC).

(AC) est perpendiculaire à (AB) car le triangle ABC est rectangle en A.

(AC) est donc orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (AB) du plan (BAD), on en déduit que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

2. d est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ donc les triangles ABD et CBD sont rectangles en B.

Le triangle ABC est rectangle en A d'après l'énoncé et on a montré dans la question précédente que (AC) est orthogonale au plan (BAD) donc à toute droite de ce plan, donc en particulier (AC) est perpendiculaire à (AD) en A.

Le triangle ACD est rectangle comme le triangle ABC.

Finalement, toutes ses faces étant des triangles rectangles, ABCD est bien un bicoin.

3. a) [CD] est l'hypoténuse du triangle BCD, donc le côté le plus grand : CD > CB et CD > BD ;

[CD] est l'hypoténuse du triangle ACD, donc CD > CA, CD > AD.

Or [AD] est l'hypoténuse du triangle ABD donc AD > AB et d'après le résultat précédent CD > AD > AB.

Finalement [CD] est la plus longue arête du bicoin car elle est plus longue que les cinq autres.

b) I milieu de l'hypoténuse du triangle BCD rectangle en D est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD on a alors IB = IC = ID.

De même dans le triangle ACD rectangle en A, I milieu de l'hypoténuse [CD] est le centre du cercle circonscrit au triangle ACD et on a ID = IC = IA.

Finalement IA = IB = IC = ID, donc I est équidistant des quatre sommets du bicoin ABCD.

Partie B

1. $\vec{u}(2\,;-2\,;1)$ est directeur de d donc normal à $\mathcal{P}$.

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\vec{u}=0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-3)-2(y-1)+z+5=0$$

Finalement on a $\mathcal{P} : 2x-2y+z+1=0$

2. En posant $t=2$ dans la représentation paramétrique de d on obtient les coordonnées de B donc $\mathrm{B}\in d$.

$2x_\mathrm{B}-2y_\mathrm{B}+z_\mathrm{B}+1=10-10-1+1=0$ donc $\mathrm{B}\in\mathcal{P}$.

Finalement B est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et d.

3. $2x_\mathrm{C}-2y_\mathrm{C}+z_\mathrm{C}+1=14-6-9+1=0$ donc $\mathrm{C}\in\mathcal{P}$

$\mathrm{AC}^2=4^2+2^2+(-4)^2=36$, $\mathrm{AB}^2=2^2+4^2+4^2=36$, ainsi AC = AB et $\mathrm{BC}^2=2^2+(-2)^2+(-8)^2=72$

On a alors $\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2=\mathrm{BC}^2$ donc ABC est rectangle et isocèle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

4. a) $\mathrm{M}\in d$ et $\mathrm{B}\in d$ donc $d=(\mathrm{MB})$.

De plus B et A sont deux points distincts de $\mathcal{P}$ donc $(\mathrm{AB})\subset\mathcal{P}$ et on sait que d est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ donc orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$. On en déduit que (MB) est perpendiculaire à (AB).

Finalement on a donc bien ABM rectangle en B

b) ABM est isocèle en B si, et seulement si BM = AB

$$\mathrm{BM}=\mathrm{AB}\Leftrightarrow \mathrm{BM}^2=\mathrm{AB}^2$$
$$\Leftrightarrow(2t-4)^2+(-2t+4)^2+(t-2)^2=36$$
$$\Leftrightarrow 4t^2-16t+16+4t^2-16t+16+t^2-4t+4=36$$
$$\Leftrightarrow 9t^2-36t=0$$
$$\Leftrightarrow t^2-4t=0$$
$$t^2-4t=0\Leftrightarrow t(t-4)=0\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\ \text{ou}\\ t=4\end{cases}$$

Donc $\mathrm{M}_1(1\,;9\,;-3)$ et $\mathrm{M}_2(9\,;1\,;1)$ sont les points de la droite d tels que les triangles rectangles ABM_1 et ABM_2 soient isocèles en B.

Partie C

ABCD est un bicoin car ABC est rectangle en B (voir question **3.**) et D est un point de la perpendiculaire au plan (ABC) passant par B.

D'après la question **3. b)** de la **Partie A**, on sait alors que le milieu I de [CD] est équidistant des quatre sommets du bicoin.

Le centre de la sphère circonscrite à ABCD est donc $\mathrm{I}(8\,;2\,;-4)$ milieu de [CD].

Le rayon de la sphère est IC =

$$\sqrt{(x_\mathrm{C}-x_\mathrm{I})^2+(y_\mathrm{C}-y_\mathrm{I})^2+(z_\mathrm{C}-z_\mathrm{I})^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

98 **1.** • Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, car s'appuyant sur deux faces opposées du cube.

• Le plan (BDL) coupe donc les plans (EFG) et (ABC) selon deux droites parallèles :

– l'intersection du plan (BDL) et du plan (ABC) est la droite (BD) ;

– l'intersection du plan (BDL) et du plan (EFG) est la droite (KM) ; en effet :

– par définition $\mathrm{M}\in(\mathrm{EH})$, or $(\mathrm{EH})\subset(\mathrm{EFG})$ donc $\mathrm{M}\in(\mathrm{EFG})$ et, toujours par définition $\mathrm{M}\in(\mathrm{BDL})$;

– $\mathrm{L}\in(\mathrm{FE})$ or $(\mathrm{FE})\subset(\mathrm{EFG})$ donc $\mathrm{L}\in(\mathrm{EFG})$ et il est évident que $\mathrm{L}\in(\mathrm{BDL})$.

Les points L et M sont deux points distincts, appartenant chacun à la fois aux plans (BDL) et (EFG). L'intersection de ces deux plans est donc la droite (BL).

Or, lorsque deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles, donc les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. On a F(6 ; 0 ; 6) et E(0 ; 0 ; 6). En notant L(x ; y ; z), l'égalité vectorielle $\overrightarrow{FL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$ équivaut à :

$$\begin{cases} x-6=\frac{2}{3}(0-6) \\ y=\frac{2}{3}(0-0) \\ z-6=\frac{2}{3}(6-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=-4 \\ y=0 \\ z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=6 \end{cases}$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. a) La droite (BL) passe par B(6 ; 0 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BL}(-4\,;0\,;6)$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x=6-4t \\ y=0 \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=6t \end{cases}$$

b) Le point S appartient à la droite (BL), il existe donc un réel t tel que S($6-4t$; 0 ; $6t$). De plus le point S appartient au plan (AJK) qui a pour équation $x=0$, on a donc $6-4t=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$. Les coordonnées du point S sont donc bien égales à (0 ; 0 ; 9).

4. a) Le plan (BDL) a pour base $(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BL})$.

• $\overrightarrow{BD}(-6\,;6\,;0)$ donc
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=3\times(-6)+3\times6+2\times0=0$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{BD}$;

• $\overrightarrow{BL}(-4\,;0\,;6)$ donc
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BL}=3\times(-4)+3\times0+2\times6=0$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{BL}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (BDL), il est donc normal à ce plan.

b) Le vecteur $\vec{n}(3\,;3\,;2)$ est normal au plan (BDL), une équation cartésienne de ce plan est donc $3x+3y+2z+d=0$, où d est un réel à déterminer.
B(6;0;0) ∈ (BDL) donc : $3\times6+3\times9+2\times0+d=0$
$\Leftrightarrow 18+d=0 \Leftrightarrow d=-18$.

Une équation cartésienne du plan (BDL) est donc bien $3x+3y+2z-18=0$.

c) M ∈ (EH), il existe donc un réel s tel que M(0 ; s ; 6). De plus M ∈ (BDL) donc :

$3\times0+3\times s+2\times6-18=0 \Leftrightarrow 3s-6=0 \Leftrightarrow s=2$.

Les coordonnées du point M sont donc (0 ; 2 ; 6).

5. Prenons comme base du tétraèdre le triangle rectangle ELM et comme hauteur le segment [SE]. On a :

• EL = 2 et EM = 2 donc le triangle rectangle ELM a pour aire $\frac{1}{2}\times2\times2=2$;

• ES = 3.

Le tétraèdre SELM a donc pour volume (en mètres cubes) :

$$V=\frac{1}{3}\times2\times3=2.$$

6. Le triangle SEL est rectangle en E donc : $\tan(\widehat{SLE})=\frac{ES}{EL}=\frac{3}{2}$. À l'aide de la calculatrice on obtient que $\widehat{SLE}=56{,}31°$. La contrainte est donc respectée.

99 **1. a)** Dans $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ on a C(1 ; 1 ; 0), $M\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

Donc $\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix}$.

b) Le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est orthonormé donc on peut calculer un produit scalaire.

$\overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{ML}=-0{,}25+0{,}25+0=0$.

On en déduit que les vecteurs sont orthogonaux donc (NC) et (ML) sont orthogonales.

c) (ML) est orthogonale à (NC) et à (IN) qui sont deux droites sécantes du plan (NCI) donc (ML) est perpendiculaire au plan (NCI).

$\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix}$ est donc normal à (NCI) d'où $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal à (NCI).

On a alors (NCI) : $x-y+d=0$ or C ∈ (NCI) d'où $x_C-y_C+d=0 \Leftrightarrow d=0$.

Finalement (NCI) : $x-y=0$.

2. a) Dans $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ on a $N\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $M\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$

$x_N-y_N+z_N=1$

$x_J-y_J+z_J=1$

$x_N-y_N+z_N=1$

(NJM) a donc bien pour équation cartésienne $x-y+z=1$.

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (NJM) d'après l'équation cartésienne trouvée précédemment. Or, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DF}=\vec{n}$.

Finalement, la droite (DF) est perpendiculaire au plan (NJM).

c) N appartenant à ces deux plans, la droite cherchée passe par N.

Soit $\vec{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite. $\vec{w}$ est orthogonal aux vecteurs normaux des deux plans, on a donc :

$$\begin{cases}\vec{w}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{w}\cdot\vec{n}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=0\\ a-b+c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b\\ c=0\end{cases}$$

En posant $a=b=1$, on en déduit que la droite d'intersection entre les plans (NCI) et (NJM) passe par N et a pour vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Il s'agit de la droite (EG) car $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et N est le milieu de [EG].

100 Les situations peuvent être la recherche du point d'intersection de deux droites, d'une droite et d'un plan ; la recherche de la droite d'intersection de deux plans.

101 **1.** $I(1\,;1\,;-1)$; $\overrightarrow{BC}(-2\,;-6\,;6)$

donc $\overrightarrow{BJ}\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ et $\begin{cases}x_J-3=-\frac{1}{2}\\ y_J-2=-\frac{3}{2}\\ z_J+4=\frac{3}{2}\end{cases}$

donc $J\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-\frac{5}{2}\right)$; $K(3\,;-3\,;3)$.

Ainsi $\overrightarrow{IJ}\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IK}(2\,;-4\,;4)$. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas proportionnelles, donc les points I, J, K ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\vec{v}$ et $\overrightarrow{IK}=2\vec{u}$ donc le plan (IJK) et le plan $\mathcal{P}(I,\vec{u},\vec{v})$ sont confondus.

3. a) $\overrightarrow{AD}(6\,;-2\,;2)$ donc la droite (AD) a pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=-1+6t\\ y=-2t\\ z=2+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

b) $\vec{n}(8\,;9\,;5)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$. En effet, $\vec{n}\cdot\vec{u}=\vec{n}\cdot\vec{v}=0$.

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $8x+9y+5z-12=0$.

Or, $8\times\frac{1}{2}+9\times\left(-\frac{1}{2}\right)+5\times\frac{5}{2}-12=0$ donc $L\in\mathcal{P}$

et $\begin{cases}\frac{1}{2}=-1+6t\\ -\frac{1}{2}=-2t\\ \frac{5}{2}=2+2t\end{cases}$ donne $t=\frac{1}{4}$, donc $L\in(AD)$.

c) $\overrightarrow{AL}\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ donc $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

102 **a)** Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{a}(1\,;-2\,;3)$.

Or, $\vec{u}\cdot\vec{a}=-1\times1+1\times(-2)+1\times3=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{a}$ sont orthogonaux et

$\vec{v}\cdot\vec{a}=0\times1+1\times(-2)+(-2)\times3=-8$ et $-8\neq0$ donc $\vec{v}$ et $\vec{a}$ ne sont pas orthogonaux.

Ainsi, cette droite et ce plan ne sont pas parallèles.

b) La droite d a pour vecteur directeur $\vec{u}(-3\,;1\,;2)$ et la droite d' a pour vecteur directeur $\vec{v}(2\,;2\,;-1)$.

Or les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et d et d' ne sont pas parallèles.

Pour savoir si elles sont sécantes, on résout le système : $\begin{cases}2-3t=7+2u\\ 1+t=2+2u\\ -3+2t=-6-u\end{cases}$ qui est successivement

équivalent à $\begin{cases}2u+3t=-5\\ -2u+t=1\\ u+2t=-3\end{cases}$;

$\begin{cases}2u+3t=-5\\ 4t=-4\\ u+2t=-3\end{cases}$; $\begin{cases}2u+3\times(-1)=-5\\ t=-1\\ u+2\times(-1)=-3\end{cases}$; $\begin{cases}u=-1\\ t=-1.\\ u=-1\end{cases}$

Ce système possède une solution unique donc les droites d et d' sont sécantes en un point A.

On obtient les coordonnées de A en remplaçant t par -1 dans la représentation paramétrique de d (ou u par -1 dans la représentation paramétrique de d'). Ainsi $A(5\,;0\,;-5)$.

Pour aller plus loin

103 **1. a)** $\vec{n}(2\,;-3\,;1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $\vec{m}\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right)$ est un vecteur normal de $\mathcal{Q}$.
Or $\vec{n}=-4\vec{m}$, donc $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles.

b) On choisit, par exemple $x=0$ et $y=0$, ainsi, $2\times 0-3\times 0+z-1=0$ donc $z=1$.
$A(0\,;0\,;1)$ est un point de $\mathcal{P}$.

c) $-\frac{1}{2}\times 0+\frac{3}{4}\times 0-\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}=0$, donc $A\in\mathcal{Q}$, ainsi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont confondus.

2. • $\vec{n}\left(-1;2;\frac{1}{3}\right)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $\vec{m}(9\,;-18\,;-3)$ est un vecteur normal de $\mathcal{Q}$.
Or $\vec{n}=-\frac{1}{9}\vec{m}$, donc $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles.
• On prend un point de $\mathcal{P}$, en choisissant, par exemple, $x=0$ et $y=0$, ainsi $-x+2\times 0+\frac{1}{3}z-1=0$ donc $z=3$.
$A(0\,;0\,;3)$ est un point de $\mathcal{P}$.
• On vérifie si A appartient à $\mathcal{Q}$.
$9\times 0-18\times 0-3\times 3+2=-7$ et $-7\neq 0$ donc $A\notin\mathcal{Q}$.
Ainsi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont strictement parallèles.

3. a) $\vec{n}(2\,;-1;1)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $\vec{m}(-1;1;2)$ est un vecteur normal de $\mathcal{Q}$. Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc il ne sont pas colinéaires et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.

b) $\begin{cases}2x-y+z+2=0\\-x+y+2z+6=0\end{cases}$ équivaut à

$\begin{cases}2x-y=-2-z\\-x+y=-6-2z\end{cases}$

c) On résout le système précédent.

$\begin{cases}2x-y=-2-z\\-x+y=-6-2z\end{cases}$ est successivement équivalent à

$\begin{cases}2x-y=-2-z\\x=-8-3z\end{cases}$

$\begin{cases}2(-8-3z)-y=-2-z\\x=-8-3z\end{cases}$

$\begin{cases}-16-6z-y=-2-z\\x=-8-3z\end{cases}$ $\begin{cases}y=-14-5z\\x=-8-3z\end{cases}$

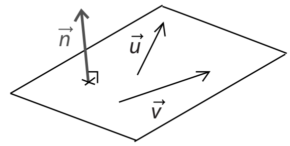
$\begin{cases}x=-8-3z\\y=-14-5z\\z=z\end{cases}$

d) Le système précédent correspond à la représentation paramétrique de la droite Δ (en posant $z=t$).

$$\begin{cases}x=-8-3t\\y=-14-5t\quad(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$$

Δ passe donc par le point $A(-8\,;-14\,;0)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(-3\,;-5\,;1)$.

104 **1. a)**



b) Non, il existe une infinité de tels vecteurs $\vec{n}$: tout vecteur normal à un plan dirigé par le couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$.

2. a) $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\\vec{n}\cdot\vec{v}=0\end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases}-a+2b+3c=0\\2a-2b-c=0\end{cases}$

b) $\begin{cases}-a+2b+3c=0\\2a-2b-c=0\end{cases}$ est successivement équivalent à

$\begin{cases}-a+2b=-3c\\2a-2b=c\end{cases}$ $\begin{cases}-a+2b=-3c\\a=-2c\end{cases}$

$\begin{cases}-(-2c)+2b=-3c\\a=-2c\end{cases}$ $\begin{cases}b=-\frac{5}{2}c\\a=-2c\end{cases}$

c) Pour $c=1$, $\vec{n}\left(-2\,;-\frac{5}{2}\,;1\right)$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Pour $c=2$, $\vec{n}'(-4\,;-5\,;2)$ est un autre vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}(-1;0\,;-1)$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}(-4\,;-1;-3)$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (ABC).
On reprend la question **2.** avec ces deux vecteurs afin d'obtenir un vecteur normal $\vec{n}$ du plan (ABC).

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ est successivement équivalent à

$\begin{cases}-a-c=0\\-4a-b-3c=0\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}a=-c\\b=c\end{cases}$

Pour $c=1$, $\vec{n}(-1;1;1)$ est un vecteur normal à (ABC).
Donc (ABC) a une équation de la forme :
$-x+y+z+d=0$. Or $A(2\,;1\,;0)\in(ABC)$, donc $-2+1+d=0$ soit $-1+d=0$ et $d=1$.
Ainsi, (ABC) a pour équation cartésienne :
$-x+y+z+1=0$.

105 **1.** $\overrightarrow{\mathrm{IM}}(x-a\,;y-b\,;z-c)$

M $\in \mathcal{S}$ équivaut sucessivement à IM = R ; IM^2 = R^2 ; $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\mathrm{R}^2$

2. a) • $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4$ équivaut à $x^2+2x+1+y^2-4y+4+z^2+6z+9-4=0$ soit $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+10=0$

• L'ensemble des points M$(x\,;y\,;z)$ qui vérifient cette équation est une sphère de centre $\mathrm{I}(-1\,;2\,;-3)$ et de rayon R = 2.

b) • $(x+4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=0$ équivaut à $x^2+8x+16+y^2-6y+9+z^2+2z+1=0$ soit $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z+26=0$.

• L'ensemble des points M$(x\,;y\,;z)$ qui vérifient cette équation est le point $\mathrm{I}(-4\,;3\,;-1)$.

c) • $(x+5)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=-40$ équivaut à $x^2+10x+25+y^2+2y+1+z^2-4z+4+40=0$ soit $x^2+y^2+z^2+10x+2y-4z+70=0$.

• L'ensemble des points M$(x\,;y\,;z)$ qui vérifient cette équation est l'ensemble vide (car la somme de trois carrés ne peut pas être égale à -40).

106 **1.** M$(x\,;y\,;z)\in\mathcal{S}$ équivaut à IM = 5 soit IM^2 = 5^2 c'est-à-dire $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25$.

2. a) d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=1-t\\ y=1+3t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=2+2t\end{cases}$$

b) Les coordonnées du point P doivent vérifier à la fois les équations de la représentation paramétique de d et l'équation de la sphère $\mathcal{S}$, c'est-à-dire le système (**S**).

c) $\begin{cases}x=1-t\\ y=1+3t\\ z=2+2t\\ (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25\end{cases}$

est successivement équivalent à

$$\begin{cases}x=1-t\\ y=1+3t\\ z=2+2t\\ (1-t-2)^2+(1+3t+3)^2+(2+2t-1)^2=25\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1-t\\ y=1+3t\\ z=2+2t\\ (-1-t)^2+(4+3t)^2+(1+2t)^2=25\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1-t\\ y=1+3t\\ z=2+2t\\ t^2+2t+1+9t^2+24t+16+4t^2+4t+1=25\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=1-t\\ y=1+3t\\ z=2+2t\\ 14t^2+30y-7=0 \qquad (\Delta=1292>0)\end{cases}$$

La dernière équation possède deux solutions :

$t_1=\dfrac{-30-\sqrt{1292}}{28}=\dfrac{-15-\sqrt{323}}{14}$ et

$t_2=\dfrac{-15-\sqrt{323}}{14}$

• Lorsque $t=t_1$: le point P$_1$ a pour coordonnées :

$x=\dfrac{29+\sqrt{323}}{14}\,;\,y=\dfrac{-31-3\sqrt{323}}{14}\,;\,z=\dfrac{-1-\sqrt{323}}{7}$

• Lorsque $t=t_2$: le point P$_2$ a pour coordonnées :

$x=\dfrac{29-\sqrt{323}}{14}\,;\,y=\dfrac{-31+3\sqrt{323}}{14}\,;\,z=\dfrac{-1+\sqrt{323}}{14}$

d) Puisque d coupe la sphère en deux points distincts, c'est que D < 5.

3. a) d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=5+4t\\ y=-3 \qquad (t\in\mathbb{R})\\ z=5-3t\end{cases}$$

b) $\begin{cases}x=5+4t\\ y=-3\\ z=5-3t\\ (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=25\end{cases}$

est successivement équivalent à

$$\begin{cases}x=5+4t\\ y=-3\\ z=5-3t\\ (4t+3)^2+(4-3t)^2=25\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=5+4t\\ y=-3\\ z=5-3t\\ 16t^2+24t+9+16-24t+9t^2-25=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=5+4t\\ y=-3\\ z=5-3t\\ 25t^2=0\end{cases}\quad\begin{cases}x=5\\ y=-3\\ z=5\\ t=0\end{cases}$$

La droite d est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ au point A.

c) La distance du point I à la droite d est IA = 5.

4. a) d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=10+2t \quad (t\in\mathbb{R})\\ z=-2+t\end{cases}$$

b) • On calcule les coordonnées du projeté orthogonal H de I sur d.

$\vec{n}(1;2;1)$ est un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ passant par I et orthogonal à la droite d.

$\mathcal{P}$ a une équation de la forme :

$x + 2y + z + d = 0$. Or $\mathrm{I}(2\ ;\ -3\ ;\ 1) \in \mathcal{P}$, donc $2 + 2 \times (-3) + 1 + d = 0$ donc $-3 + d = 0$ et $d = 3$.

Ainsi, $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$x + 2y + z + 3 = 0$.

Le point H est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et d, ses coordonnées sont solutions du système suivant, que l'on résout :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 10 + 2t \\ z = -2 + t \\ x + 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

qui est successivement équivalent à

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 10 + 2t \\ z = -2 + t \\ (1+t) + 2(10 + 2t) + (-2 + t) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 10 + 2t \\ z = -2 + t \\ 6t + 22 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{8}{3} \\ y = \dfrac{8}{3} \\ z = -\dfrac{17}{3} \\ t = -\dfrac{11}{3} \end{cases}$$

Donc $\mathrm{H}\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3};-\dfrac{17}{3}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{IH}}\left(-\dfrac{14}{3};\dfrac{17}{3};-\dfrac{20}{3}\right)$

La distance de I à d est donc :

$$\mathrm{IH} = \sqrt{\left(-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{17}{3}\right)^2 + \left(-\frac{20}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{885}}{3}$$

$\mathrm{IH} > 5$ donc la droite d ne coupe pas la sphère $\mathcal{S}$.

c) On en déduit que le système (**S**) n'a pas de solution.

107 **1. a)** M est sa propre image par f si, et seulement si, $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$. Ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{1}{3}z \\ y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z \\ z = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{2}{3}z \end{cases} \quad \text{soit } -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 0.$$

Ce qui correspond à un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $-\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{1}{3}z = 0$.

b) On remplace les coordonnées de M′ dans l'équation de $\mathcal{P}$:

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z\right)$$

$$-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z\right) = \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}y + \frac{1}{9}z + \frac{1}{9}x$$

$$+\frac{2}{9}y + \frac{1}{9}z + \frac{1}{9}x - \frac{1}{9}y - \frac{2}{9}z$$

$$= \left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right)x + \left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right)y + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9}\right)z$$

$= 0$.

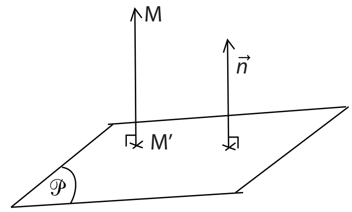
Donc $\mathrm{M}' \in \mathcal{P}$.

c) $\vec{n}\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z;\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z;-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z\right)$$

Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = (x - y + z)\vec{n}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

d)



f est la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P}$.

2. a) $-\dfrac{1}{3}\times 10 + \dfrac{1}{3}\times 1 - \dfrac{1}{3}\times(-7) = -\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{2}{3} \neq 0$, donc $\mathrm{A} \notin \mathcal{P}$.

b) $$\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}\times 10 + \dfrac{1}{3}\times 1 - \dfrac{1}{3}\times(-7) \\ y' = \dfrac{1}{3}\times 10 + \dfrac{2}{3}\times 1 + \dfrac{1}{3}\times(-7) \\ z' = -\dfrac{1}{3}\times 10 + \dfrac{1}{3}\times 1 + \dfrac{2}{3}\times(-7) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{28}{3} \\ y' = \dfrac{5}{3} \\ z' = -\dfrac{23}{3} \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{A}'\left(\dfrac{28}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{23}{3}\right)$

c) Il s'agit de la droite d, passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ (elle est orthogonale à $\mathcal{P}$).

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}'}\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right).$$

d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 10 - \dfrac{2}{3}t \\ y = 1 + \dfrac{2}{3}t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -7 - \dfrac{2}{3}t \end{cases}$$

108 **1. a)** $\vec{n}(12;4;3)$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $\vec{m}(-3;12;-4)$ est un vecteur normal de $\mathcal{Q}$. Or les coordonnées de $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas proportionnelles, donc $\vec{n}$ et $\vec{m}$ ne sont pas colinéaires et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants.

b) On vérifie pour cela que les coordonnées des points de d vérifient les équations des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

• $12(1-52t)+4(1+39t)+3(1+156t)-19 = 12-624t+4+156t+3+468t-19=0$ donc Δ est incluse dans $\mathcal{P}$.

• $-3(1-52t)+12(1+39t)-4(1+156t)-5 = -3+156t+12+468t-4-624t-5=0$ donc Δ est incluse dans $\mathcal{Q}$.

Ainsi, Δ est la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

2. a) La distance du point M au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d(\mathrm{M}\,;\mathcal{P})=\frac{|12x+4y+3z-19|}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}}$$

La distance du point M au plan $\mathcal{Q}$ est :

$$d(\mathrm{M}\,;\mathcal{Q})=\frac{|-3x+12y-4z-5|}{\sqrt{(-3)^2+12^2+(-4)^2}}$$

Or M appartient aux plans bissecteurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ si, et seulement si, $d(\mathrm{M}\,;\mathcal{P})=d(\mathrm{M}\,;\mathcal{Q})$ c'est-à-dire $d(\mathrm{M}\,;\mathcal{P})^2=d(\mathrm{M}\,;\mathcal{Q})^2$ soit

$$\frac{(12x+4y+3z-19)^2}{169}=\frac{(-3x+12y-4z-5)^2}{169}$$

Finalement, $d(\mathrm{M}\,;\mathcal{P})=d(\mathrm{M}\,;\mathcal{Q})$ si, et seulement si, $(12x+4y+3z-19)^2=(-3x+12y-4z-5)^2$.

b) On utilise l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$d(\mathrm{M}\,;\mathcal{P})=d(\mathrm{M}\,;\mathcal{Q})$ est successivement équivalent à $[(12x+4y+3z-19)-(-3x+12y-4z-5)]\times[(12x+4y+3z-19)+(-3x+12y-4z-5)]=0$

$(15x-8y+7z-14)(9x+16y-z-24)=0$

$15x-8y+7z-14=0$ ou $9x+16y-z-24=0$.

Les plans bivecteurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont donc pour équation $15x-8y+7z-14=0$ et $9x+16y-z-24=0$.

109 $\mathrm{I}\left(\frac{7}{2}\,;\frac{3}{2}\,;1\right)$ est le milieu de [AB].

Les médiatrices de [AB] passent par le point I et admettent pour vecteur directeur un vecteur $\vec{u}$ normal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-3\,;-5\,;4)$.

On pose $\vec{u}(a\,;b\,;c)$ et on choisit, par exemple, $a=1$, ainsi $\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ équivaut à $-3\times1-5\times b+4\times c=0$ soit $-3-5b+4c=0$ et $b=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}c$.

Ainsi, un vecteur directeur d'une médiatrice de [AB] a pour coordonnées $\left(1\,;-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}c\,;c\right)$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Les médiatrices de [AB] ont donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=\frac{7}{2}+t \\ y=\frac{3}{2}+\left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}c\right)t \quad (t\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}) \\ z=1+ct \end{cases}$$

110 Il suffit de prendre un plan $\mathcal{R}$ qui soit ni parallèle à $\mathcal{P}$, ni parallèle à $\mathcal{Q}$, c'est-à-dire dont un vecteur normal $\vec{n}$ n'est ni colinéaire à un vecteur normal $\vec{p}(1\,;-4\,;1)$ de $\mathcal{P}$, ni colinéaire à un vecteur normal $\vec{q}(2\,;1\,;-1)$ de $\mathcal{Q}$.

On peut choisir, par exemple $\vec{n}(1\,;0\,;1)$.

Ainsi, $\mathcal{R}$ a une équation de la forme : $x+z+d=0$ et choisir ensuite, par exemple, $d=1$.

Ainsi, $\mathcal{R}$ a pour équation cartésienne : $x+z+1=0$.

(Il existe une infinité de tels plans, donc une infinité de réponses possibles).

6 Limites des suites

Questions-Tests

1 Pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 1$.
a) $u_{10} = 101$ réponse **(2)**.
b) $u_{n+1} = n^2 + 2n + 2$ réponse **(3)**.

2 $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = 10u_n + 1$.
a) $u_1 = 10 \times 1 + 1 = 11$, $u_2 = 10 \times 11 + 1 = 111$ et $u_3 = 10 \times 111 + 1 = 1111$
b) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = 10x + 1$ réponse **(3)**.

3 Si (u_n) est la suite arithmétique de raison 40 telle que $u_1 = 5$, alors pour tout entier naturel n, $u_n = 40n - 35$ réponse **(2)**.

4 $2 + 3 + 4 + \ldots + 100 = \dfrac{(100+2) \times 99}{2} = 5049$ réponse **(3)**.

5 Le premier entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$, $u_n \geqslant 1500$ est $\mathrm{N} = 12$. Réponse **(3)**.

6 Il semble que lorsque n prend de grandes valeurs, les termes w_n sont aussi proches de 0 que l'on veut. Réponse **(2)**.

Découvrir

1 Notion de suite qui tend vers $+\infty$

1 **a)** $x_2 = x_1 + h_1 = 2{,}9$ et $h_2 = \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2{,}9}$
b) Pour tout entier naturel n, $x_n \times h_n = 1$ donc $x_{n+1} = x_n + h_n = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

2 **a)** Tableau de valeurs

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	2	2,5	2,9	3,24	3,55	3,83	4,1

b) Le premier entier naturel N tel que $x_{\mathrm{N}} \geqslant 10$ est 48.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 48$, $x_n \geqslant 10$ car (x_n) est une suite croissante.

3. a) Pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1}{}^2 = \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 = x_n{}^2 + 2 + \frac{1}{x_n{}^2}.$$

b) Initialisation : $x_0{}^2 = 4$ et $4 + 2 \times 0 = 4$ donc $x_0{}^2 \geqslant 4 + 2 \times 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 0$, $x_k{}^2 \geqslant 4 + 2k$.

Alors $x_k{}^2 + 2 + \dfrac{1}{x_k{}^2} \geqslant x_k{}^2 + 2 \geqslant 4 + 2k + 2$

Donc $x_{k+1}{}^2 \geqslant 4 + 2(k+1)$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $x_n{}^2 \geqslant 4 + 2n$.

c) On applique la racine carrée qui est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout entier naturel n, $\sqrt{x_n{}^2} \geqslant \sqrt{4+2n}$ et, comme x_n est une longueur positive, on a $x_n \geqslant \sqrt{4+2n}$.

d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 48$, $x_n \geqslant \sqrt{4+2n}$ et $\sqrt{4+2n} \geqslant \sqrt{4 + 2 \times 48}$. Comme $\sqrt{4 + 2 \times 48} = 10$, on en déduit que $x_n \geqslant 10$.

e) Pour que $x_n \geqslant 1000$, il suffit que $\sqrt{4+2n} \geqslant 1000$.

C'est le cas pour $n = 499\,998$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 499998$, $x_n \geqslant \sqrt{4+2n} \geqslant \sqrt{4 + 2 \times 499998} \geqslant 1000$.

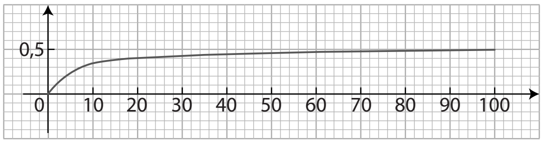
2 Notion de suite convergente

1 **a)** L'expérience aléatoire est modélisée par une situation équiprobable sur un univers de $2n+10$ issues (autant que de bonbons dans la boîte).

L'événement V_n comporte alors n issues favorables (autant que de bonbons à la violette).

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n = \dfrac{n}{2n+10}$.

b) Représentation graphique de la suite :



Les termes p_n se rapprochent de plus en plus (et autant que l'on veut) de 0,5.

2 **a)** On lit que $p_n \in]0{,}49\,;0{,}51[$ pour tout entier naturel $n \geqslant 246$.

b) On lit que $p_n \in]0{,}499\,;0{,}501[$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2496$.

Savoir-faire

3 **a)** Pour tout entier naturel n, $4n^2 \geqslant 10^9$ équivaut à $n \geqslant \sqrt{250\,000\,000}$.

Or $\sqrt{250\,000\,000} \approx 15811{,}4$, donc $u_n \geqslant 10^9$ pour tout $n \geqslant 15812$.

b) On se donne un intervalle $]A\,;+\infty[$ avec $A \geqslant 0$; pour tout entier naturel n, $u_n \in]A\,;+\infty[$ équivaut à $n^2 \geqslant \dfrac{A}{4}$, c'est-à-dire $n \geqslant \sqrt{\dfrac{A}{4}}$.

On note N le plus petit nombre entier supérieur ou égal à $\sqrt{\dfrac{A}{4}}$. Ainsi l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes u_n pour tout $n > N$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4 **a)** Pour tout entier naturel n, $-10\sqrt{n} \leqslant -10^7$ équivaut à $\sqrt{n} \geqslant 10^6$, c'est-à-dire $n \geqslant 10^{12}$.

b) On se donne un intervalle $]-\infty\,;A[$ avec $A \leqslant 0$; pour tout entier naturel n, $u_n \in]-\infty\,;A[$ équivaut à $\sqrt{n} \geqslant -\dfrac{A}{10}$, c'est-à-dire $n \geqslant \dfrac{A^2}{100}$.

On note N le plus petit nombre entier supérieur ou égal à $\dfrac{A^2}{100}$. Ainsi l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient tous les termes u_n pour tout $n > N$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

7 **a)** On se donne un intervalle $]-\alpha\,;\beta[$ (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$). Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \in]-\alpha\,;\beta[$.

équivaut à $-\alpha < \dfrac{2}{\sqrt{n}} < \beta$, c'est-à-dire $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2}\beta$, soit $\sqrt{n} > \dfrac{2}{\beta}$. Cette inégalité équivaut à $n > \dfrac{4}{\beta^2}$.

On note N le plus petit nombre entier supérieur ou égal à $\dfrac{4}{\beta^2}$. Ainsi l'intervalle $]-\alpha\,;\beta[$ contient tous les termes u_n pour tout $n > N$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

8 On conjecture que la limite de la suite (v_n) est 5.

	A	B
1	n	v_n
2	0	4
3	1	4,5
4	2	4,8
5	3	4,9
6	4	4,94117647
7	5	4,96153846
8	6	4,97297297
9	7	4,98
10	8	4,98461538
11	9	4,98780488
12	10	4,99009901
99	97	4,99989373
100	98	4,99989589
101	99	4,99989798
102	100	4,99990001

11 **a)** Pour tout entier naturel n,

$$\frac{2n+1}{3n+2} \geqslant 0 \text{ donc } u_n \geqslant n^2.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

12 **a)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$.

Donc $-2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2$ et $-3 \leqslant \cos(n) + 2\sin(n) \leqslant 3$.

D'où $\dfrac{-3}{n^2} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{3}{n^2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$ en tant que limites de références, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

14 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} 13n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 13n - 6 + \sqrt{n} = +\infty$ (limite d'une somme).

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = 2n - 30\sqrt{n} + 4 = n\left(2 - \frac{30}{\sqrt{n}} + \frac{4}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{30}{\sqrt{n}} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{30}{\sqrt{n}} + \dfrac{4}{n} = 2$ (limite d'une somme).

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(2 - \dfrac{30}{\sqrt{n}} + \dfrac{4}{n}\right) = +\infty$

(limite d'un produit)

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n \times 100}{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)} = \dfrac{100}{2+\dfrac{3}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{3}{n} = 2$ (limite d'une somme)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{100}{2} = 50$ (limite d'un quotient).

15 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 + 1 = +\infty$ (limite d'une somme) et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 - 20n = -\infty$ (limite d'une somme).

On ne peut pas conclure pour la limite de la suite (u_n), on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$11n^2 - 3n + 1 = n^2\left(11 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 11 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 11$.

Donc (limite d'un produit), on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} 11n^2 - 3n + 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(11 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$.

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} 13n + 10 = +\infty$.

On ne peut pas conclure pour la limite de la suite (v_n), on est en présence d'une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$n^3 - n^2 - 20n + 1 = n^3\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{20}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right),$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{20}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{20}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} = 1$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{20}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}\right) = +\infty$

(limite d'un produit)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{11n^2 - 3n + 1}{13n + 10} = \frac{n^2\left(11 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(13 + \dfrac{10}{n}\right)} = \frac{n\left(11 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{13 + \dfrac{10}{n}}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 11 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 11$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(11 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$ (limite d'un produit).

En outre, $\lim\limits_{n\to+\infty} 13 + \dfrac{10}{n} = 13$ (limite d'une somme).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (limite d'un quotient).

17 a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}0001\mathrm{e}^n = +\infty$ (suite de référence), donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{80}{0{,}0001\mathrm{e}^n + 2{,}0966} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}_n = 4{,}3$.

b) Programme Python

```python
from math import exp
def D(n):
    y=4.3+80/(0.0001*exp(n)+2.0966)
    return y

def Seuil(S):
    n=0
    while D(n)>=S:
        n=n+1
    return n
```

```
>>> Seuil(4.5)
16
```

Avec le programme ci-dessus, on exécute Seuil(4.5) et on obtient 16.

Cela signifie que l'entreprise rejettera moins de 4 500 tonnes de déchets après 16 ans, soit en 2036.

18 **a)** $r_1 = 1000 - \dfrac{500}{\mathrm{e}^1}$. Or $1000 - \dfrac{500}{\mathrm{e}^1} \approx 816$.

En 2020, le volume recyclé sera, à une mètre cube près, de 816 m^3.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{500}{\mathrm{e}^n} = 0$ (limite d'un quotient). D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1000 - \dfrac{500}{\mathrm{e}^n} = 1000$.

c) Programme Python

```python
from math import exp
def R(n):
    y=1000-500/exp(n)
    return y

def Seuil(S):
    n=0
    while R(n)<=S:
        n=n+1
    return n
```

```
>>> Seuil(980)
4
```

Avec le programme ci-dessus, on exécute Seuil(980) et on obtient 4. Cela signifie que l'entreprise recyclera plus de 980 m^3 de plastique en 2023.

Acquérir des automatismes

19 (u_n) tend vers $+\infty$. Les intervalles $]-3\,;+\infty[$ et $]10^9\,;+\infty[$ contiennent tous les termes u_n à partir d'un certain rang.Réponses **b)** et **c)**.

20 **a)** Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = -n + 200$:
(u_n) diverge vers $-\infty$.
b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = n + 200$:
(u_n) diverge vers $+\infty$.
c) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = -n - 200$:
(u_n) diverge vers $-\infty$.
d) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = n - 200$:
(u_n) diverge vers $+\infty$.

21 La suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors l'intervalle $]-\infty\,;0[$ contient tous les termes v_n à partir d'un certain rang. Donc à partir d'un certain rang, tous les termes sont négatifs.

22 (u_n) diverge vers $-\infty$ si pour tout entier naturel n, $u_n = -4n$ ou $u_n = -0{,}5n^2$.
(u_n) diverge vers $+\infty$ si pour tout entier naturel n, $u_n = 4n$ ou $u_n = 5\sqrt{n}$.

23 **a)**

	A	B
1	n	un
2	0	1
3	1	3
4	2	17
5	3	55
6	4	129
7	5	251
8	6	433
9	7	687
10	8	1025
11	9	1459
12	10	2001
13	11	2663
14	12	3457
15	13	4395
16	14	5489

b) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
c) Avec la calculatrice, on trouve que
$u_n \in]10000\,;+\infty[$ pour tout $n \geqslant 18$.

24 **a)** $x^2 + x \geqslant 10000$ équivaut à
$$x^2 + x - 10000 \geqslant 0.$$
Le trinôme $x^2 + x - 10000$ admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{40001}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{40001}}{2}$.
L'ensemble des solutions est $]-\infty\,;x_1] \cup [x_2\,;+\infty[$.
b) $\dfrac{-1+\sqrt{40001}}{2} \approx 99{,}5$ donc pour tout entier naturel $n \geqslant 100$, $v_n \geqslant 10000$.
c) Le trinôme $x^2 + x - 10^9$ admet deux racines réelles $y_1 = \dfrac{-1-\sqrt{4\times10^9+1}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{-1+\sqrt{4\times10^9+1}}{2}$.
$\dfrac{-1+\sqrt{4\times10^9+1}}{2} \approx 31622{,}3$ donc pour tout entier naturel $n \geqslant 31623$, $v_n \geqslant 10^9$.
d) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

25 **a)** $6 - 2n < -10$ équivaut à $n \geqslant 9$.
$6 - 2n < -100$ équivaut à $n \geqslant 54$.
b) $6 - 2n < \mathrm{A}$ équivaut à $n > 3 - 0{,}5\mathrm{A}$.
On note N le plus petit entier naturel supérieur à $3 - 0{,}5\mathrm{A}$.
L'inégalité $6 - 2n < \mathrm{A}$ est vérifiée dès que $n \geqslant \mathrm{N}$.
c) L'intervalle $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ (avec $\mathrm{A} \leqslant 0$) contient tous les termes h_n à partir du rang N.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = -\infty$.

26 **a)** A est un nombre réel négatif quelconque. Pour tout entier naturel n, $-n^2 < \mathrm{A}$ équivaut à $n^2 > -\mathrm{A}$, c'est-à-dire $n > \sqrt{-\mathrm{A}}$.
On note N le plus petit entier naturel supérieur à $\sqrt{-\mathrm{A}}$.
L'inégalité $-n^2 < \mathrm{A}$ est vérifiée dès que $n \geqslant \mathrm{N}$.
b) L'intervalle $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ (avec $\mathrm{A} \leqslant 0$) contient tous les termes t_n à partir du rang N.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = -\infty$.

27 **a)** On conjecture que :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{C}_n = -\infty$ si $\alpha < 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{C}_n = +\infty$ si $\alpha > 0$.
b) On suppose ici que $\alpha > 0$.
A est un nombre réel positif quelconque.
Pour tout entier naturel n, $\alpha n > \mathrm{A}$ équivaut à $n > \dfrac{\mathrm{A}}{\alpha}$.
On note N le plus petit entier naturel supérieur à $\dfrac{\mathrm{A}}{\alpha}$.
L'inégalité $\alpha n > \mathrm{A}$ est vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$.
c) L'intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ (avec $\mathrm{A} \geqslant 0$) contient tous les termes C_n à partir du rang $\mathrm{N}+1$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{C}_n = +\infty$.
d) On suppose ici que $\alpha < 0$.
A est un nombre réel négatif quelconque. Pour tout entier naturel n, $\alpha n < \mathrm{A}$ équivaut à $n > \dfrac{\mathrm{A}}{\alpha}$. On note N le plus petit entier naturel supérieur ou égal à $\dfrac{\mathrm{A}}{\alpha}$.
L'inégalité $\alpha n < \mathrm{A}$ est vérifiée pour tout entier naturel $n > \mathrm{N}$.
c) L'intervalle $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ (avec $\mathrm{A} \leqslant 0$) contient tous les termes C_n à partir du rang $\mathrm{N}+1$.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{C}_n = -\infty$.

28 **a)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $c_n = 4 + 3n$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $c_n > 10000$ équivaut à $4 + 3n > 10000$, c'est-à-dire $n > 3332$.
c) A est un nombre réel positif quelconque.
Pour tout entier naturel n, $4 + 3n > \mathrm{A}$ équivaut à :
$$n > \frac{\mathrm{A} - 4}{3}.$$
On note N le plus petit entier naturel strictement supérieur ou égal à $\frac{\mathrm{A}-4}{3}$.
L'inégalité $4 + 3n > \mathrm{A}$ est vérifiée pour tout entier naturel $n \geqslant \mathrm{N}$.
L'intervalle $]\mathrm{A}\,;+\infty[$ (avec $\mathrm{A} \geqslant 0$) contient donc tous les termes c_n à partir du rang N.
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$.

29 **a)** Le programme calcule le premier rang N tel que $u_{\mathrm{N}} < \mathrm{S}$.
b) Seuil(-100) renvoie 100 et Seuil($-1\,000$) renvoie 1 000.
c) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

30 (u_n) tend vers 5.
Les intervalles $]-6\,;6[$ et $]4{,}99\,;5{,}2[$, qui sont ouverts et auxquels 5 appartient, contiennent tous les termes u_n à partir d'un certain rang.
Réponses **a)** et **c)**.

31 **a)** Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = -\frac{n}{200}$:
(u_n) diverge vers $-\infty$.
b) Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{200}{-n}$:
(u_n) converge vers 0.
c) Pour tout entier $n > 0$, $u_n = -n + 1$:
(u_n) diverge vers $-\infty$.
d) Pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$:
(u_n) converge vers 0.

32 (h_n) converge vers 0,2. À partir d'un certain rang, tous les termes appartiennent donc à l'intervalle $]0{,}15\,;0{,}22[$ par exemple et les éléments de cet intervalle sont tous positifs.

33 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_n = \frac{2n-3}{n+1} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{1{,}3^{n+1}}.$$
On conjecture graphiquement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

34 **a)** Tableau de valeurs

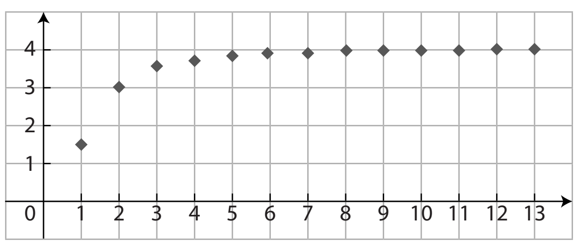
n	8	98	998	9 998	$10^9 - 2$
u_n	0,9	0,99	0,999	0,9 999	$1 - 10^{-9}$

b) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

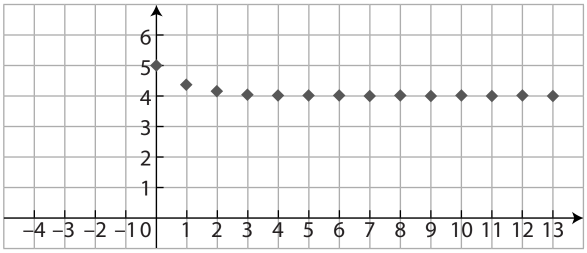
35 **a)** Pour tout entier $n \geqslant 100$,
$$0 < 101 \leqslant n + 1 \text{ donc } 0 < \frac{10}{n+1} \leqslant \frac{10}{101}$$
car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
D'où $-10^{-1} \leqslant e_n \leqslant 10^{-1}$.
b) Pour tout entier naturel n, $-10^{-5} < 0 < e_n$.
$-10^{-5} \leqslant e_n \leqslant 10^{-5}$ équivaut à $0 < \frac{10}{n+1} \leqslant 10^{-5}$, c'est-à-dire à $0 < \frac{1}{n+1} \leqslant 10^{-6}$.
La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $0 < \frac{1}{n+1} \leqslant 10^{-6}$ équivaut à $n + 1 \geqslant 10^6$.
$-10^{-5} \leqslant e_n \leqslant 10^{-5}$ est donc vérifié pour tout entier naturel $n \geqslant 999999$.
c) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$.

36 **a)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $5 - \frac{1}{n} < 5$.
$4{,}9 < l_n < 5{,}1$ équivaut à $4{,}9 < l_n < 5$, c'est-à-dire à $-0{,}1 < -\frac{1}{n} < 0$, soit $0{,}1 > \frac{1}{n} > 0$.
La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $0{,}1 > \frac{1}{n} > 0$ équivaut à $10 < n$.
$4{,}9 < l_n < 5{,}1$ est donc vérifié pour tout entier naturel $n \geqslant 11$.
b) De même, $4{,}99 < l_n < 5{,}01$ est vérifié pour tout entier naturel $n \geqslant 101$.
c) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont deux nombres réels.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $5 - \frac{1}{n} < 5$.
$5 - \alpha < l_n < 5 + \beta$ équivaut donc à $5 - \alpha < l_n < 5$.
d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $5 - \alpha < l_n < 5$ équivaut à $-\alpha < -\frac{1}{n} < 0$, c'est-à-dire $\alpha > \frac{1}{n} > 0$.
La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\alpha > \frac{1}{n} > 0$ équivaut à $\frac{1}{\alpha} < n$.
e) On note N le premier entier naturel strictement supérieur à $\frac{1}{\alpha}$. Ainsi l'intervalle $]5-\alpha\,;5+\beta[$ contient tous les termes l_n à partir du rang N.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = 5$.

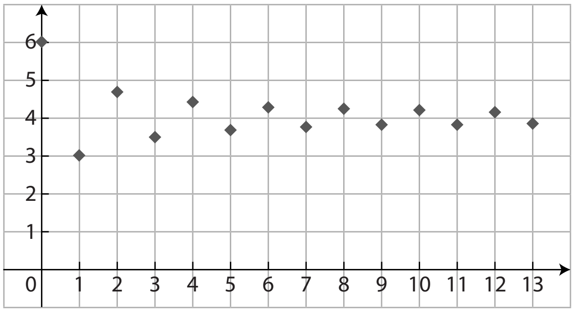
37 **a)** (F_n) est croissante et converge vers 4.



b) (F_n) est décroissante et converge vers 4.



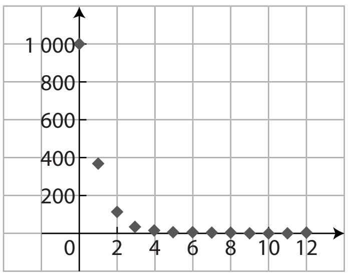
c) (F_n) n'est pas monotone et converge vers 4.



38 **a)** $q_1 = \sqrt{q_0} + \dfrac{q_0}{0+3} = \sqrt{1000} + \dfrac{1000}{3}$ donc $q_1 \approx 365$.

$q_2 = \sqrt{q_1} + \dfrac{q_1}{1+3}$ donc $q_1 \approx 110$.

b)



On conjecture que (q_n) converge vers 0.

c) Seuil(S) renvoie le nombre de jours nécessaires pour que le nombre de milliers de bactéries passent en deçà de la valeur S.

d) 13 jours d'antibiotiques sont donc suffisants et nécessaires pour le traitement antibiotique.

```
>>> Seuil(1.2)
13
```

39 L'affirmation de Sandrine est fausse : en effet, tous les termes de la suite sont égaux à 2 ou -2. Aucun terme n'appartient donc à l'intervalle $]-0{,}1;0{,}1[$: la suite ne converge pas vers 0.
En réalité, cette suite n'a pas de limite.

40 **a)** $u_n = -n^2 - 5$: pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant -n^2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b) $u_n = \sqrt{n} + 3$: pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

41 Les théorèmes de comparaison permettent de démontrer qu'une suite diverge et a une limite infinie. Le théorème des gendarmes permet de démontrer qu'une suite est convergente.

42 **a)** Tableau de valeurs.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h_n	0	1,414	2,449	3,454	4,475	5,477	6,481	7,483	8,485

b) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $n^2 + n \geqslant n^2$ donc $\sqrt{n^2+n} \geqslant \sqrt{n^2}$, c'est-à-dire $h_n \geqslant n$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = +\infty$.

43 **a)** On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $(-1)^n \geqslant -1$.
Donc $4 \times (-1)^n \geqslant -4$ puis $t_n \geqslant n - 4$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 4 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

d) L'affirmation de Fred est fausse. La suite (t_n) a une limite de $+\infty$ mais n'est jamais croissante à partir d'un certain rang. En effet, pour tout entier naturel n, $t_{2n} = 2n + 4$ et $t_{2n+1} = 2n + 1 - 4 = 2n - 3$.
Ce qui implique que $t_{2n} > t_{2n+1}$.

44 **a)** Tableau de valeurs

n	1	5	10	15	20	25	30
c_n	2	6,4	102,4	2 184,5	52 429	1E + 06	4E + 07

On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,

$$n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2.$$

Or, $(n-1)^2 - 2 \geqslant (4-1)^2 - 2$,
donc $n^2 - 2n - 1 \geqslant 7 \geqslant 0$.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$ équivaut à $n^2 \geqslant 2n + 1$ puis à $2n^2 \geqslant n^2 + 2n + 1$, c'est-à-dire $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

d) Initialisation : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$ donc $2^4 \geqslant 4^2$.
Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 4$, $2^k \geqslant k^2$.
Alors $2^{k+1} \geqslant 2k^2$ et on sait que $2k^2 \geqslant (k+1)^2$.
Donc $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.
Conclusion : Pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant n^2$.

e) On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 4$, $\dfrac{2^n}{n} \geqslant n$.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$.

45 Pour tout entier $n > 0$, $0 < n < n+5$.
La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{n+5} > 0$.
Pour tout entier $n > 0$, $0 \leqslant e_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$.

46 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -2-\dfrac{1}{n} = -2$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -2+\dfrac{3}{n} = -2$.
Or, pour tout entier $n \geqslant 20$, $-2-\dfrac{1}{n} \leqslant i_n \leqslant -2+\dfrac{3}{n}$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} i_n = -2$.

47 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\dfrac{2}{n} = 4$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4-\dfrac{1}{n} = 4$.
Or, pour tout entier $n \geqslant 1$, $4-\dfrac{2}{n} \leqslant f_n \leqslant 4-\dfrac{1}{n}$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 4$.
b) On peut poser pour tout entier $n \geqslant 1$, $f_n = 4-\dfrac{1{,}5}{n}$.

48 **a)** Pour tout entier naturel n, $n \leqslant 2n+3$.
La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $e^n \leqslant e^{2n+3}$ puis $-4e^n \geqslant -4e^{2n+3}$, c'est-à-dire $-4e^n \geqslant c_n$.
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} -4e^n = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = -\infty$.
c) Pour tout entier naturel n, $-4e^n \geqslant c_n$ donc $4e^n \leqslant -c_n$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 4e^n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} -c_n = +\infty$.

49 **a)** On conjecture graphiquement que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 \text{ d'où } \frac{-1}{n} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n}.$$
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ en tant que limites de références, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

50 **a)** Pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant -n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.
Pour tout entier naturel n, $c_n \geqslant 2n^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\dfrac{-1}{n^2} \leqslant b_n \leqslant \dfrac{2}{n}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ en tant que limites de références, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
c) On peut poser pour tout entier $n \geqslant 1$,
$a_n = -n-1$, $b_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $c_n = 3n^2+1$.

51 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -4$.
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 12+(-4) = 8$
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 2v_n = 12-2\times(-4) = 20$
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 12\times(-4) = -48$
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} {u_n}^2 = 12^2 = 144$
e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{12}{-4} = -3$
f) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 3v_n = 12+3\times(-4) = 0$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 12+(-4) = 8$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n+3v_n}{u_n+v_n} = \dfrac{0}{8} = 0$.

52 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 10$.
a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = -\infty$
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 10 - v_n = 0$.
On est en présence d'une F.I.
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 10 - v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10-v_n}{u_n} = 0$.

53 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n + n^2 = +\infty$ (limite d'une somme).
b) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\sqrt{n} = -\infty$ (limite d'un produit).
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - \dfrac{1}{n} = +\infty$ (limite d'une somme).
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + 3 = +\infty$ (limite d'une somme).
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+3} = 0$ (limite d'un quotient).

54 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} -4\sqrt{n} = -\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 8{,}2 - 4\sqrt{n} = -\infty$ (limite d'une somme).

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}} + 1 = 1$ (limite d'une somme).

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 8 - n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 + 1 = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (8-n)(2n^2+1) = -\infty$

(limite d'un produit).

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \dfrac{1}{n} = 5$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \sqrt{n} = -\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(5 - \dfrac{1}{n}\right)(2-\sqrt{n}) = -\infty$

(limite d'un produit).

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 + n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2$

(limites de sommes).

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4+n}{2-\frac{1}{n}} = +\infty$ (limite d'un quotient).

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n + 3 \overset{n}{=} +\infty$ (limite d'une somme).

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{40}{2n+3} = 0$ (limite d'un quotient).

55 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 6$.

a) Pour tout entier naturel n,

$$2u_n = (u_n + v_n) + (u_n - v_n).$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n = 4 + 6 = 10$ (limite d'une somme).

b) Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{2} \times 2u_n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2} \times 10 = 5$ (limite d'un produit).

c) Pour tout entier naturel n, $-u_n = -1 \times u_n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = -5$ (limite d'un produit).

Pour tout entier naturel n, $v_n = (u_n + v_n) + (-u_n)$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4 + (-5) = -1$ (limite d'une somme).

56 Pour tout entier n, $u_n = 4 - 0{,}5n$ et $v_n = 0{,}5n$.

a) Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n + v_n = 4$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = 4$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 - 0{,}5n = -\infty$

(limite de somme) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$ (limite d'un produit).

b) On pose, par exemple, pour tout entier naturel n,

$a_n = n + 1$ et $b_n = \dfrac{-7}{n+1}$.

57 **a)** On conjecture, à l'aide de la calculatrice, qu'à très long terme, la substance a disparu du sang du patient.

En effet $q_{24} < 10^{-9}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 35e^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 35e^n + 15 = +\infty$

(limite d'une somme).

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100}{35e^n + 15} = 0$ (limite d'un quotient).

c) 1^er cadre : $q \geqslant 0{,}01$.

2^nd cadre : 100/(35*exp(n)+15).

d) On trouve que la substance n'est plus agressive dès que 6 heures se sont écoulées.

58 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$-n^2 + 4n + 2 = n^2\left(-1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{2}{n^2} = -1$ (limite d'une somme).

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(-1 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right) = -\infty$

(limite d'un produit).

59 Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{n} = 1$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \dfrac{1}{1} = 1$

(limite d'un quotient).

60 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\frac{40n+1}{n^2+2} = \frac{n\left(40 + \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{40 + \frac{1}{n}}{n\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)}.$$

$\lim\limits_{n\leftarrow+\infty} 40 + \dfrac{1}{n} = 40$.

Puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$,

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

61 **a)** Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$u_n = 2n\sqrt{n} - n \times \sqrt{n}^2 = n\sqrt{n}(2 - \sqrt{n})$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \sqrt{n} = -\infty$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n}(2-\sqrt{n}) = -\infty$

(limite d'un produit).

Pour se tester

62 **1.** A **2.** D **3.** C **4.** B

63 **1.** A, C **2.** B, C, D **3.** C, D

64 **1. Faux.** Contre-exemple : on pose pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = 19n - 11$ et $v_n = 20 - 19n$.
Alors pour tout entier $n \geqslant 0$,
$u_n + v_n = 19n - 11 + 20 - 19n = 9$.
Donc la suite $(u_n + v_n)$ est convergente alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
2. Vrai. On peut poser pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = n + 1$ et $v_n = \dfrac{10}{n+1}$.
3. Faux. Contre-exemple : on pose pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Alors pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n + \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{n+1} + n + 1$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n + 1 = +\infty$
donc $\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.
4. Vrai.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, $w_n{}^4 + n - 500 \geqslant n - 500$.
Pour tout entier $n \geqslant 0$, $w_{n+1} \geqslant n - 500$ donc pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_n \geqslant n - 501$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} n - 501 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

S'entraîner

65 **1.** Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}.$$
Or, la fonction racine carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$
donc $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0$.
Donc la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante.
2. Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
3. Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
c'est-à-dire $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
4. La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$ et l'affirmation de Thomas est fausse.

66 **1.** Réciproque : « S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout entier naturel n, $m \leqslant u_n \leqslant M$, , alors (u_n) est convergente ».
2. Problème 1
a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$
d'où $-10 \leq 10 \times (-1)^n \leqslant 10$.
En divisant dans chaque membre par $n+1$, il vient
$\dfrac{-10}{n+1} \leqslant \dfrac{10 \times (-1)^n}{n+1} \leqslant \dfrac{10}{n+1}$
puis $4 + \dfrac{-10}{n+1} \leqslant v_n \leqslant 4 + \dfrac{10}{n+1}$.
$\lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \dfrac{-10}{n+1} = 4$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \dfrac{10}{n+1} = 4$,
donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$.
b) La suite $\left(\dfrac{10}{n+1}\right)$ est décroissante, donc pour tout $n \geqslant 9$,
$$\frac{10}{n+1} \leqslant \frac{10}{9+1} \text{ soit } \frac{10}{n+1} \leqslant 1.$$
De plus $\dfrac{-10}{n+1} \geqslant -1$.
Alors $4 - 1 \leqslant 4 + \dfrac{-10}{n+1} \leqslant v_n \leqslant 4 + \dfrac{10}{n+1} \leqslant 4 + 1$,
c'est-à-dire $3 \leqslant v_n \leqslant 5$.
c) Le plus grand des dix premiers termes de (v_n) est $v_0 = 14$ et le plus petit est $v_1 = -1$
d) On déduit des questions **b)** et **c)** que, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 14$.
3. Problème 2
a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$
d'où $-2 \leqslant 2 \times (-1)^n \leqslant 2$
puis $3 - 2 \leqslant 3 + 2 \times (-1)^n \leqslant 3 + 2$,
c'est-à-dire $1 \leqslant w_n \leqslant 5$.
Les termes de la suite sont alternativement égaux à 1 et à 5. Cette suite n'est donc pas convergente.
En effet, pour tout nombre réel L, il est possible de trouver un intervalle de longueur suffisamment réduite autour de L auquel tous les termes w_n ne peuvent appartenir à partir d'un certain rang.
b) La réciproque de la propriété est donc fausse : il existe ainsi des suites bornées mais non convergentes.

67 **a)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$$v_n = nu_n = \frac{n^3}{e^n}.$$

Donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{e} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{e}.$$

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{4}{3}$ d'où par passage au cube (fonction croissante sur $\mathbb{R}$) :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{e} \leqslant \frac{64}{27e}.$$

Or, $\frac{64}{27e} \approx 0{,}88$.

On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$.

Sachant que $v_n = \frac{n^3}{e^n} > 0$, il vient $v_{n+1} \leqslant v_n$.

La suite (v_n) est décroissante à partir du rang 3 et pour tout entier $n \geqslant 3$, $v_n \leqslant v_3$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 3$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{v_3}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_3}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

68 **Parcours 1**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$,

$$u_n = \frac{e^n\left(\frac{1}{e^n}+2\right)}{e^n\left(1+\frac{3}{e^n}\right)} = \frac{\frac{1}{e^n}+2}{1+\frac{3}{e^n}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}+2 = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{3}{e^n} = 1$ (limite de sommes).

Par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Parcours 2

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{11n+4\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5} = \frac{n\left(11+4\frac{\sqrt{n}}{n}\right)}{n\left(\sqrt{n}+\frac{5}{n}\right)} = \frac{11+\frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+\frac{5}{n}}.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 11+\frac{4}{\sqrt{n}} = 11$ (somme)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}+\frac{5}{n} = +\infty$.

c) On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{11+\frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+\frac{5}{n}} = 0.$$

69 **1. a)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $4(n-1)^2 - 3 = 4n^2 - 8n + 4 - 3 = u_n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4(n-1)^2 = +\infty$ (limite d'un produit) et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (limite d'une somme).

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = 4n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{4n^2}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{2}{n}+\frac{1}{4n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 4n^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (limite d'un produit).

3. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 2n^2$ équivaut à $2n^2 - 8n + 1 \geqslant 0$.

Les racines réelles du trinôme $2x^2 - 8x + 1$ sont $x_1 = 2 - 0{,}5\sqrt{14}$ et $x_2 = 2 + 0{,}5\sqrt{14}$.

Le trinôme $2x^2 - 8x + 1$ est positif sur $]x_2\,;+\infty[$ et $x_2 \approx 3{,}88$ donc, pour tout entier $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2n^2$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

70 Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = n^2\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ donc si $a > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (limite d'un produit), et si $a < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (limite d'un produit)

71 **a)** Tableau de valeurs

n	0	1	2	3	4	5	6	7
s_n	0	4	24	604	365 424	1E + 11	2E + 22	3E + 44

On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

b) Initialisation : $s_0 = 0$ donc $s_0 \geqslant 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 0$, $s_k \geqslant k$.

Alors $s_k{}^2 + s_k + 4 \geqslant s_k + 4 \geqslant k + 4 \geqslant k + 1$ donc $s_{k+1} \geqslant k + 1$.

Conclusion : Pour tout entier naturel n, $s_n \geqslant n$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

72 **a)** Pour tout entier naturel n,

$$n+1+\frac{5}{n+1} = \frac{(n+1)^2+5}{n+1} = \frac{n^2+2n+6}{n+1} = d_n.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n+1} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$ (limite d'une somme)

73 **a)** Pour tout entier $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leqslant 1$.

On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{-1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b) $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$, $v_2 = 4$, $v_3 = 9\sqrt{2}$, $v_4 = 4$, $v_5 = -25\sqrt{2}$, $v_6 = -36$, $v_7 = -49\sqrt{2}$, $v_8 = 8$, $v_9 = 81\sqrt{2}$, $v_{10} = 100$, $v_{11} = 121\sqrt{2}$.

c) Si n est divisible par 8, il existe un entier k tel que $n = 8k$. Alors $\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \sin(2k\pi) = 0$ donc $u_n = 0$ et $v_n = n$.

d) Si $n+1$ est divisible par 8, il existe un entier k tel que $n+1 = 8k$.

Alors $\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(2k\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $u_n = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ et $v_n = -n^2\sqrt{2}$ qui est négatif.

e) (v_n) ne peut avoir une limite finie puisque les termes de rang multiple de 8 deviennent aussi grand que l'on veut. (v_n) ne peut pas non plus avoir une limite infinie car les termes de rang précédant un multiple de 8 sont négatifs. Donc (v_n) est sans limite.

74 **a)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$,

$$v_n = \frac{3e^n + 8e^{2n}}{e^n + e^{3n}} = \frac{e^{2n}(3e^{-n} + 8)}{e^{2n}(e^{-n} + e^n)} = \frac{3e^{-n} + 8}{e^{-n} + e^n}.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3e^{-n} + 8 = 8$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} + e^n = +\infty$ (limite d'une somme).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (limite d'un quotient).

75 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} 8u_n = 8\ell$ (limite d'un produit)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n+1} + 14 = 14$

Donc par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 8\ell + 14$.

b) Si (u_n) et (v_n) ont la même limite, alors elle est solution de l'équation $8\ell + 14 = \ell$.

$8l + 14 = \ell$ équivaut à $\ell = -2$.

76 **a)** $S_1 = \dfrac{1}{1} = 1$, $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2} = 1{,}5$

et $S_3 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3} = 2$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} = 0{,}5n + 0{,}5.$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5n + 0{,}5 = +\infty$

77 **a)** On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) On conjecture pour tout $n \geqslant 1$, $3u_n + 1 = n^2$.

c) Initialisation : $u_1 = 0 = \dfrac{1}{3} \times 1^2 - \dfrac{1}{3}$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 0$, $u_k = \dfrac{1}{3}k^2 - \dfrac{1}{3}$.

Alors $ku_k = \dfrac{k}{3}(k^2 - 1) = \dfrac{k}{3}(k-1)(k+1)$.

Donc $u_{k+1} = \dfrac{ku_k}{k+1} + k = \dfrac{k}{3}(k-1) + k = \dfrac{k(k+2)}{3}$

Et $\dfrac{1}{3}(k+1)^2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}(k^2 + 2k + 1 - 1) = \dfrac{k(k+2)}{3}$.

Donc $u_{k+1} = \dfrac{1}{3}(k+1)^2 - \dfrac{1}{3}$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{3}n^2 - \dfrac{1}{3}$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3}n^2 - \dfrac{1}{3} = +\infty$.

78 **1. a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} 2{u_n}^2 = 2\ell^2$.

b) Par unicité de la limite, ℓ est solution de $2\ell^2 = \ell$.

$2\ell^2 = \ell$ équivaut à $\ell(2\ell - 1) = 0$, c'est-à-dire $\ell = 0$ ou $\ell = 0{,}5$.

2. a) Initialisation : $u_1 = 2{u_0}^2 = 2$ donc $u_1 \geqslant 1$

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 1$, $u_k \geqslant 1$.

Alors ${u_k}^2 \geqslant 1$ car la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$ puis $2{u_k}^2 \geqslant 2$.

Donc $u_{k+1} \geqslant 1$.

Conclusion : Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1$.

b) L'intervalle $]-0{,}2\,;0{,}6[$ ne contient aucun des termes de la suite (u_n) donc (u_n) ne tend ni vers 0, ni vers 0,5.

On en déduit que la supposition de départ est fausse : (u_n) est donc divergente.

3. a) La suite converge vers 0 (elle est même constante) si $u_0 = 0$.

b) La suite converge vers 0,5 (elle est même constante) si $u_0 = 0{,}5$.

79 **a)** On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

b) $v_1 = \dfrac{3}{1} \times 1 \times 0 = 0$, $v_2 = \dfrac{3}{2}(1 \times 0 + 2 \times 1) = 3$ et $v_3 = \dfrac{3}{3}(1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 2) = 8$.

c) On conjecture pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = n^2 - 1$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{v_n}{n^2} = 1 - \dfrac{1}{n^2}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n^2} = 1$.

80 **1.** $u_3 = 1 + \dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2+3} = 1{,}5$

$u_4 = 1 + \dfrac{1}{1+2} + \dfrac{1}{1+2+3} + \dfrac{1}{1+2+3+4} = 1{,}6$.

2. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{1}{1+\ldots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

$$\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2(n+1)-2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} = v_n.$$

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = v_1 + \ldots + v_n$.

La somme télescopique donne donc :

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{1+1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{2+1} + \ldots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{n+1}.$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \frac{2}{n+1} = 2.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 0.$

d) La somme de n termes généraux qui tendent vers 0 tend ici vers 2. L'affirmation est donc fausse.

81 Parcours 1

Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $e^{2n} + 3 \geqslant e^{2n} \geqslant 0$.

La fonction racine carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $\sqrt{e^{2n}+3} \geqslant \sqrt{e^{2n}}$, c'est-à-dire $u_n \geqslant e^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Parcours 2

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $e^n + 1 \geqslant 0$, donc $e^{2n} + e^n + 1 \geqslant e^{2n}$ et $e^{2n} = (e^n)^2$.

b) La fonction racine carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Donc pour tout entier $n \geqslant 0$, $\sqrt{e^{2n}+e^n+1} \geqslant \sqrt{e^{2n}}$, c'est-à-dire $v_n \geqslant e^n$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

82 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $n^2 + n \geqslant n^2$ donc $\sqrt{n^2+n} \geqslant \sqrt{n^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{n^2+n} \geqslant n$.

On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant -n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\leftarrow+\infty} u_n = -\infty$.

83 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $12n \geqslant n \geqslant 0$ donc $e^{12n} \geqslant e^n$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $-e^{12n} \leqslant -e^n$ puis $u_n \leqslant 1 - e^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^n = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

84 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\sin(n) \leqslant 1$ donc $n\sin(n) \leqslant n$ puis $n\sin(n) - n^2 \leqslant n - n^2$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$n - n^2 = n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} - 1 = -1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n - n^2 = -\infty$.

D'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

85 a) La fonction cos est décroissante sur $[0\,;\pi]$.

b) Pour tout $n \geqslant 3$, on a $0 \leqslant \frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{3} \leqslant \pi$.

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, c'est-à-dire $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

D'où $n \times \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant n \times \frac{1}{2}$, soit $u_n \geqslant \frac{n}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5n = +\infty$

D'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

86 a) Pour tout $n \geqslant 0$, $J_{n+1} = 1{,}005J_n + 100$ et $J_0 = 5000$

Initialisation : $J_0 = 5000$ donc $J_0 \geqslant 5000 + 100 \times 0$

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 0$, $J_k \geqslant 5000 + 100k$.

Alors $J_{k+1} \geqslant J_k + 100 \geqslant 5000 + 100k + 100$.

Donc $J_{k+1} \geqslant 5000 + 100(k+1)$.

Conclusion : Pour tout $n \geqslant 0$, $J_n \geqslant 5000 + 100n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5000 + 100n = +\infty$.

D'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = +\infty$.

c)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
J_n	5 000	5 125	5 251	5 377	5 504	5 531	5 759	5 888	6 018
n	9	10	11	12	13	14	15	16	17
J_n	6 148	6 279	6 410	6 542	6 675	6 808	6 942	7 077	7 212

Jenny disposera de plus de 7 000 € après 16 ans.

87 a) Pour tout $n \geqslant 0$ par $a_n = u_n + (-1)^n v_n$.

Comme pour tout $n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$, on en déduit que $a_n \geqslant u_n - v_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty} -v_n = 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = +\infty$ (limite d'une somme).

D'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

b) Pour tout $n \geqslant 0$, $b_n = 2\sin(u_n) - \frac{1}{v_n}$.

Comme pour tout $n \geqslant 0$, $\sin(u_n) \leqslant 1$, on en déduit que $b_n \leqslant 2 - \frac{1}{v_n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{v_n} = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{v_n} = -\infty$ (limite d'une somme).

D'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$.

88 **a)** Démonstration par récurrence.

Initialisation : $u_0 > 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 0$, $u_k > 0$.

Alors $\dfrac{1}{u_k} > 0$ d'où $u_k + \dfrac{1}{u_k} > 0$.

Donc $u_{k+1} > 0$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 0$.

L'affirmation de Cyril est correcte.

b) Initialisation : ${u_0}^2 > 0$ donc ${u_0}^2 \geqslant 2 \times 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 0$, ${u_k}^2 \geqslant 2k$.

Alors ${u_{k+1}}^2 = \left(u_k + \dfrac{1}{u_k}\right)^2 = {u_k}^2 + \dfrac{1}{{u_k}^2} + 2$.

Donc ${u_{k+1}}^2 \geqslant {u_k}^2 + 2 \geqslant 2k + 2$, soit ${u_{k+1}}^2 \geqslant 2(k+1)$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, ${u_n}^2 \geqslant 2n$.

c) La fonction racine carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc, pour tout $n \geqslant 0$, $\sqrt{{u_n}^2} \geqslant \sqrt{2n}$, c'est-à-dire $u_n \geqslant \sqrt{2n}$ puisque $u_n \geqslant 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n} = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

L'affirmation de Magali est correcte et celle d'Olivier est fausse.

89 **a)** Le plus petit nombre entier naturel tel que $2^n \geqslant n^3$ est $n = 1$.

Le suivant est $n = 10$.

b) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1$.

La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ en tant que fonction polynôme.

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$.

$3x^2 - 6x - 3$ possède deux racines réelles $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

f est donc décroissante sur $[0\,;1+\sqrt{2}]$ puis croissante sur $[1+\sqrt{2}\,;+\infty[$

c) Démonstration par récurrence.

Initialisation : $2^{10} = 1024$ et $10^3 = 1000$ donc $2^{10} \geqslant 10^3$

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 10$, $2^k \geqslant k^3$.

Alors $2^{k+1} \geqslant 2k^3$.

Or, la fonction f est croissante sur $[10\,;+\infty[$, donc $f(k) \geqslant f(10)$ c'est-à-dire $2k^3 - (k+1)^3 \geqslant 669$ ce qui implique que $2k^3 \geqslant (k+1)^3$.

On en déduit donc que $2^{k+1} \geqslant 2k^3 \geqslant (k+1)^3$

Conclusion : Pour tout $n \geqslant 10$, $2^n \geqslant n^3$.

d) Pour tout $n \geqslant 10$, $\dfrac{2^n}{n^2} \geqslant n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{n^2} = +\infty$.

90 **a)** On conjecture que pour tout $n \geqslant 5$, $v_n \leqslant -n$.

b) Initialisation : $v_5 \approx -9{,}59$ et $v_5 = -5$ donc $v_5 \leqslant -5$

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 5$, $v_k \leqslant -k$.

Alors $1{,}02v_k \leqslant -1{,}02k$ et donc

$v_{k+1} \leqslant -1{,}02k - k^2 + 4$

Or, $-1{,}02k \leqslant -k$ et $-k^2 + 4 \leqslant -1$.

Donc $v_{k+1} \leqslant -(k+1)$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 5$, $v_n \leqslant -n$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n = -\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

91 **Parcours 1**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$,

$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ d'où $n^2 - n \leqslant n^2 + n(-1)^n \leqslant n^2 + n$.

En divisant dans chaque membre par $n^2 + 6$, il vient

$\dfrac{n^2 - n}{n^2 + 6} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n^2 + n}{n^2 + 6}$,

puis $\dfrac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{6}{n^2}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{6}{n^2}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{6}{n^2}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{6}{n^2}} = 1$ (limites de quotients) donc, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Parcours 2

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$

b) On en déduit que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$2n - 1 \leqslant 2n + \sin(n) \leqslant 2n + 1.$$

En divisant dans chaque membre par n, il vient

$\dfrac{2n-1}{n} \leqslant \dfrac{2n + \sin(n)}{n} \leqslant \dfrac{2n+1}{n}$,

soit $2 - \dfrac{1}{n} \leq v_n \leq 2 + \dfrac{1}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{n} = 2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{n} = 2$.

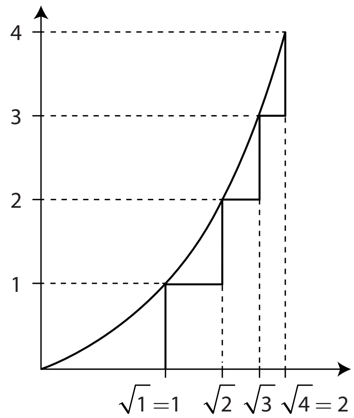
d) Le théorème des gendarmes assure alors que (v_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

92 **a)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, $n^2 \leqslant n^2+4$ et $(n+2)^2 = n^2+4n+4$, donc $n^2+4 \leqslant (n+2)^2$.
b) La fonction racine carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$\sqrt{n^2} \leqslant \sqrt{n^2+4} \leqslant \sqrt{(n+2)^2}$,
c'est-à-dire $n \leqslant \sqrt{n^2+4} \leqslant n+2$.
En divisant chaque membre par n, il vient $1 \leqslant u_n \leqslant 1+\dfrac{2}{n}$.
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

93 **a)** On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$,
$u_n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$
Donc $u_n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) = n+1-n = 1$
c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$ donc $u_n \geqslant 0$
De plus, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
Or, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n}$, donc $u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

94 **a)** La fonction f est dérivable sur $[0\,;1]$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0\,;1]$.
Pour tout $x \in [0\,;1]$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 4$.
La fonction exponentielle est croissante sur $[0\,;1]$ donc pour tout $x \in [0\,;1]$, $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^1$.
Donc $\mathrm{e}^x - 4 \leqslant \mathrm{e} - 4 < 0$.
On en déduit que f est décroissante sur $[0\,;1]$.
b) Donc pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \leqslant f(0)$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^x - 4x - 1 \leqslant 0$.
De plus, la fonction exponentielle est croissante sur $[0\,;1]$ donc pour tout $x \in [0\,;1]$, $\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^x$.
On conclut que, pour tout $x \in [0\,;1]$,
$$1 \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1+4x.$$
c) Pour tout $n \geqslant 8$, on a $0 \leqslant \dfrac{8}{n} \leqslant 1$.
En posant $x = \dfrac{8}{n}$ dans la double inégalité précédente, il vient $1 \leqslant u_n \leqslant 1+\dfrac{2}{n}$.
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{2}{n} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

95 **1. a)**



b) Le volume V est encadré par la somme des volumes des cylindres blancs V_4 et la somme des volumes des cylindres rouges U_4.
$U_4 = \pi\times(\sqrt{1})^2 + \pi\times(\sqrt{2})^2 + \pi\times(\sqrt{3})^2 = 6\pi$ et
$V_4 = \pi(\sqrt{1})^2 + \pi(\sqrt{2})^2 + \pi(\sqrt{3})^2 + \pi(\sqrt{4})^2 = 10\pi$.
Donc $6\pi \leqslant V \leqslant 10\pi$.
2. a) Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$,
$$u_n = \pi\times\frac{4}{n}\left(\sqrt{\frac{4}{n}}\right)^2 + \pi\times\frac{4}{n}\left(\sqrt{2\times\frac{4}{n}}\right)^2 + \ldots + \pi\times\frac{4}{n}\left(\sqrt{\frac{(n-1)\times 4}{n}}\right)^2$$
$$= \frac{4\pi}{n}\times\left[\frac{4}{n} + 2\times\frac{4}{n} + \ldots + (n-1)\times\frac{4}{n}\right]$$
$$= \frac{16\pi}{n^2}[1+2+\ldots+(n-1)]$$
De même, $v_n = \dfrac{4\pi}{n}\times\left[\dfrac{4}{n} + 2\times\dfrac{4}{n} + \ldots + n\times\dfrac{4}{n}\right]$
$$= \frac{16\pi}{n^2}[1+2+\ldots+n]$$
b) Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$,
$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$
donc $v_n = \dfrac{16\pi}{n^2}\times\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{8\pi(n+1)}{n}$
et $u_n = \dfrac{16\pi}{n^2}\times\dfrac{(n-1)\times n}{2} = \dfrac{8\pi(n-1)}{n}$.
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 8\pi\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 8\pi\times n\left(\dfrac{1+\frac{1}{n}}{n}\right)$
$$= \lim_{n\to+\infty} 8\pi\left(1+\frac{1}{n}\right) = 8\pi$$
De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 8\pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 8\pi$
En utilisant le théorème des gendarmes, on en déduit que $V = 8\pi$.

96 **a)** $S_1 = \dfrac{1}{1^2+1} = 0{,}5$,

$S_2 = \dfrac{2}{2^2+1} + \dfrac{2}{2^2+2} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{6} = \dfrac{11}{15}$ et

$S_3 = \dfrac{3}{3^2+1} + \dfrac{3}{3^2+2} + \dfrac{3}{3^2+3} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{11} + \dfrac{3}{12} = \dfrac{181}{220}$.

b)

```
def S(n):
    S=0
    for i in range(1,n+1):
        S=S+n/(n**2+i)
    return S
```

c) Au millième près $S_{100} = 0{,}995$, $S_{1000} = 0{,}999$ et $S_{100\,000} = 1$.

d) On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$.

e) Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $1 \leqslant k \leqslant n$, $n^2 \leqslant n^2 + k \leqslant n^2 + n$ donc, en passant à l'inverse, $\dfrac{1}{n^2+n} \leqslant \dfrac{1}{n^2+k} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ puis $\dfrac{n}{n^2+n} \leqslant \dfrac{n}{n^2+k} \leqslant \dfrac{n}{n^2}$.

f) En sommant terme à terme les membres de l'inégalité pour k allant de 1 à n, on obtient

$n \times \dfrac{n}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant n \times \dfrac{n}{n^2}$, soit $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leqslant S_n \leqslant 1$.

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, (S_n) converge vers 1.

97 **a) Vrai.** (u_n) converge donc $(2u_n)$ converge (produit).
(v_n) converge donc $(-3v_n)$ converge (produit).
Donc $(2u_n - 3v_n)$ converge (somme).

b) Vrai. Pour tout n, $v_n = (u_n + v_n) - u_n$
(v_n) converge car c'est la différence de deux suites convergentes.

c) Faux. Contre exemple : pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$.
Alors (u_n) converge vers 0, $(u_n v_n)$ converge vers 0 mais (v_n) diverge vers $+\infty$.

d) Faux. Contre exemple : pour tout $n \geqslant 0$, on pose $u_n = v_n = (-1)^n$.
(u_n) et (v_n) divergent car elles n'ont pas de limite.
En revanche, la suite $(u_n v_n)$ est constante égale à (1) et se trouve donc convergente.

98 **a) Faux.** La suite $((-1)^n)$ diverge alors que $(|(-1)^n|)$ converge.

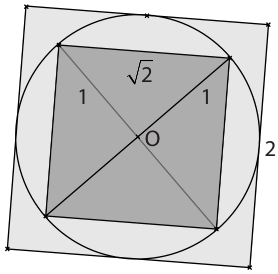
b) Vrai. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = nR + u_0$ où R est la raison.
Si (u_n) diverge alors $R \neq 0$ et $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$.
Réciproquement, si $(|u_n|)$ diverge, alors nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$, donc $R \neq 0$ et (u_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de R.

c) Faux. $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge vers 0 d'après le théorème des gendarmes mais $((-1)^n)$ n'a pas de limite.

d) Faux. $\left(\dfrac{1}{-n}\right)$ converge vers 0 mais $(-n)$ diverge vers $-\infty$.

99 **1. a)** La forme du polygone «s'approche» de celle du cercle… On conjecture donc que (p_n) tend vers la périmètre du cercle, à savoir 2π.

b) Le carré inscrit dans le cercle a une diagonale égale au diamètre du cercle, à savoir 2. Son côté est donc $\sqrt{2}$ et son périmètre, qui est inférieur à 2π est $4\sqrt{2}$.



Le carré circonscrit au cercle a un côté au diamètre du cercle, à savoir 2.
Son périmètre, qui est supérieur à 2π est donc 8.
On en déduit que $2\sqrt{2} \leqslant \pi \leqslant 4$.

2. a) $\widehat{AOD}$ est la mesure de l'un des $2n$ angles au centre de même mesure dans le polygone à $2n$ côtés.
Donc $\widehat{AOD} = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$.

b) Dans le triangle AOH rectangle en H, $AH = OA \times \sin\widehat{AOD}$, soit $0{,}5c_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Donc $c_n = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ et $p_n = nc_n = 2n\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x) - 1$ donc $f'(x) \leqslant 0$.
f est donc décroissante sur $\mathbb{R}$.
g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une somme de fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ et donc $g''(x) = x - \sin(x) = -f(x)$.
g'' est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et $g''(0) = 0$.
Donc $g''(x) < 0$ équivaut à $x < 0$.
g' admet donc un minimum en 0, qui vaut 0.
Donc $g'(x) \geqslant 0$ pour tout nombre réel x.
g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant f(0)$,

soit $\sin x \leqslant x$ et $g(x) \geqslant g(0)$, soit $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x$.

d) On pose $x = \dfrac{\pi}{n}$ où $n \geqslant 1$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi^3}{6n^3} \leqslant \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{n}$.

D'où $2\pi - \dfrac{\pi^3}{3n^2} \leqslant p_n \leqslant 2\pi$.

d) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $2\pi - \dfrac{\pi^3}{3n^2} \leqslant p_n \leqslant 2\pi$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\pi - \dfrac{\pi^3}{3n^2} = 2\pi$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 2\pi$.

e) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $2\pi - \dfrac{\pi^3}{3n^2} \leqslant p_n \leqslant 2\pi$ ce qui équivaut à $-\dfrac{\pi^3}{6n^2} \leqslant \dfrac{1}{2}p_n - \pi \leqslant 0$.

Alors $\left|\dfrac{1}{2}p_n - \pi\right| \leqslant \dfrac{\pi^3}{6n^2}$. Or, $\pi \leqslant 4$. D'où $\dfrac{\pi^3}{6n^2} \leqslant \dfrac{4^3}{6n^2}$, c'est-à-dire $\dfrac{\pi^3}{6n^2} \leqslant \dfrac{32}{3n^2}$.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{1}{2}p_n - \pi\right| \leqslant \dfrac{32}{3n^2}$.

3. a) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OAH rectangle en H :

$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{1 - 0{,}25{c_n}^2}$.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle AHD rectangle en H : comme DH = 1 – OH,

$c_{2n} = \mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{DH}^2 + \mathrm{HA}^2} = \sqrt{(1 - \mathrm{OH})^2 + 0{,}25{c_n}^2}$.

b) Pour s'assurer 4 chiffres significatifs, il suffit que le nombre de côtés n vérifie $\dfrac{32}{3n^2} < 0{,}00005$, ce qui est le cas si $n \geqslant 462$.

```
from math import*

def Approx(n):
    # pour n au mois égal à 3
    # début avec un carré
    c=sqrt(2)
    for i in range(n-2):
        OH=sqrt(1-0.25*c**2)
        c=sqrt((1-OH)**2+0.25*c**2)
    return 0.5*c*2**n
```

Il suffit donc d'exécuter Approx(9) (ce qui correspond à 512 côtés)

On trouve alors 3.141572940367092.

100 **1. a)** Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$nu_u + n^2 v_n = n$ et $-nu_u + v_n = \mathrm{e}^{-n}$

donc $(n^2+1)v_n = n + \mathrm{e}^{-n}$ puis $v_n = \dfrac{n + \mathrm{e}^{-n}}{n^2+1}$.

De plus $u_u = 1 - nv_n = \dfrac{1 - n\mathrm{e}^{-n}}{n^2+1}$.

b) On conjecture que les deux suites ont une limite nulle.

c) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = \frac{n + \mathrm{e}^{-n}}{n^2+1} = \frac{n\left(1 + \dfrac{1}{n\mathrm{e}^n}\right)}{n\left(n + \dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1 + \dfrac{1}{n\mathrm{e}^n}}{n + \dfrac{1}{n}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n\mathrm{e}^n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n + \dfrac{1}{n} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ (limite d'un quotient).

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$nv_n = \frac{n^2 + n\mathrm{e}^{-n}}{n^2+1} = \frac{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n\mathrm{e}^n}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1 + \dfrac{1}{n\mathrm{e}^n}}{1 + \dfrac{1}{n^2}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n\mathrm{e}^n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n^2} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = \dfrac{1}{1} = 1$ (limite d'un quotient).

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_u = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - nv_n = 0$.

d)

$n \leftarrow 0$
V $\leftarrow 1$
U $\leftarrow 1$
Tant que V $\geqslant 0{,}01$ ou U $\geqslant 0{,}01$
  $n \leftarrow n+1$
  V $\leftarrow \dfrac{n + \mathrm{e}^{-n}}{n^2+1}$
  U $\leftarrow 1 - n \times \mathrm{V}$
Fin Tant que

101 Pour tout x de $[0\,;100]$,

$f'(x) = 2 - 2\mathrm{e}^{x-55} = 2(1 - \mathrm{e}^{x-55})$.

D'où le tableau de variations.

x	0		55		100
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	↗		143		↘

Or $u_n = f(n)$, donc la température de la fusée ne dépassera jamais 143°C.

102 On nomme C_n (resp. B_n) l'aire en m² de la surface colorée (resp. blanche) après n étapes de découpage et coloriage. Ainsi $\mathrm{B}_0 = 1$ et $\mathrm{C}_0 = 0$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 0$,

$\mathrm{B}_n = 1 - \mathrm{C}_n$ et $\mathrm{C}_{n+1} = \mathrm{C}_n + \dfrac{1}{9}\mathrm{B}_n$.

On en déduit que $\mathrm{C}_{n+1} = \dfrac{8}{9}\mathrm{C}_n + \dfrac{1}{9}$.

On démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 8$, $1 - \dfrac{9}{n} \leqslant \mathrm{C}_n \leqslant 1$.

Initialisation : $0 \leqslant \mathrm{C}_8 \leqslant 1$ et $1 - \dfrac{9}{8} \leqslant 0$.

Donc $1 - \dfrac{9}{8} \leqslant \mathrm{C}_8 \leqslant 1$.

Hérédité : on suppose que, pour un entier k, $k \geqslant 8$, $1 - \dfrac{9}{k} \leqslant \mathrm{C}_k \leqslant 1$.

Alors $\dfrac{8}{9} - \dfrac{8}{k} \leqslant \dfrac{8}{9}\mathrm{C}_k \leqslant \dfrac{8}{9}$ et donc $1 - \dfrac{8}{k} \leqslant \mathrm{C}_{k+1} \leqslant 1$.

Or, $1 - \dfrac{9}{k+1} \leqslant 1 - \dfrac{8}{k}$ équivaut à $k \geqslant 8$.

Donc $1-\dfrac{9}{k+1} \leqslant 1-\dfrac{8}{k} \leqslant C_{k+1} \leqslant 1$

Conclusion : pour tout $n \geqslant 8$, $1-\dfrac{9}{n} \leqslant C_n \leqslant 1$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1-\dfrac{9}{n} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = 1$.

103 Pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2}{n} \times \ldots \times \dfrac{n}{n}$.

Pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, $0 \leqslant \dfrac{k}{n} \leqslant 1$.

On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

104 a) Sophia coupe un demi pied puis la plante grandit de 20 % de sa taille (après la coupe).
Donc pour tout entier $n \geqslant 0$,
$h_{n+1} = 1{,}2(h_n - 0{,}5) = 1{,}2h_n - 0{,}6$.
De plus, $h_0 = 4$.
b) Initialisation : $h_0 = 4$ donc $h_0 \geqslant 4 + 0{,}2 \times 0$.
Hérédité : on suppose que, pour un entier k, $k \geqslant 0$, $h_k \geqslant 4 + 0{,}2k$.
Alors $1{,}2h_k \geqslant 4{,}8 + 0{,}24k$ et $h_{k+1} \geqslant 4{,}2 + 0{,}24k$.
Or $4{,}2 + 0{,}24k \geqslant 4 + 0{,}2 + 0{,}2k$.
Donc $h_{k+1} \geqslant 4 + 0{,}2(k+1)$.
Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 0$, $h_n \geqslant 4 + 0{,}2n$.
c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 + 0{,}2n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n = 0$.
d) $h_n \geqslant 20$ équivaut à $n \geqslant 16$.

105 **a)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $a > 0$, $b = c = 0$ et $d > 0$.
b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ si $a = \ell$, $b = 0$ et $c = d = 1$.
c) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ si $a = 0$ et $b = c = d = 1$.
d) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si $a < 0$, $b = c = 0$ et $d > 0$.

106 **a)** Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{1}{2} \times \frac{10}{n} \times \left(4 + \frac{4(-1)^n}{n}\right) \times n = 20 + 20\frac{(-1)^n}{n}$$

$$20 - \frac{20}{n} \leqslant a_n \leqslant 20 + \frac{20}{n}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 20 - \dfrac{20}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 20 + \dfrac{20}{n} = 20$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 20$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, les deux côtés égaux d'un triangle mesurent (en employant le théorème de Pythagore) $\sqrt{\left(\dfrac{10}{2n}\right)^2 + \left(4 + \dfrac{4(-1)^n}{n}\right)^2}$.

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_n = 2n\sqrt{\left(\frac{10}{2n}\right)^2 + \left(4 + \frac{4(-1)^n}{n}\right)^2} + 10.$$

Or, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sqrt{\left(\frac{10}{2n}\right)^2 + \left(4 + \frac{4(-1)^n}{n}\right)^2} \geqslant \sqrt{\left(4 + \frac{4(-1)^n}{n}\right)^2} \geqslant 4 - \frac{4}{n}.$$

Donc $p_n \geqslant 8n + 2$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 8n + 2 = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = +\infty$.

Objectif BAC

107 **Partie A**

a) L'algorithme 3 convient : il renvoie bien n valeurs successives de v sans réinitialisation de v comme dans le second algorithme.

b) Conjectures : la suite (v_n) est croissante et converge vers 3.

Partie B

a) Initialisation : $v_0 = 1$ donc $0 < v_0 < 3$.

Hérédité : on suppose que, pour un entier k, $k \geqslant 0$, $0 < v_k < 3$.

Alors $-3 < -v_k < 0$ et donc $3 < 6 - v_k < 6$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6 - v_k} < \dfrac{1}{3}$.

Alors $\dfrac{9}{6} < v_{k+1} < \dfrac{9}{3}$, ce qui implique que $0 < v_{k+1} < 3$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $0 < v_n < 3$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9}{6 - v_n} - \frac{v_n(6 - v_n)}{6 - v_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{9 - 6v_n + v_n^2}{6 - v_n} = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$$

c) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $(3 - v_n)^2 \geqslant 0$ et, vu que $0 < v_n < 3$, $6 - v_n > 3 > 0$.

Donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$: la suite (v_n) est croissante.

d) La suite (v_n) est croissante et majorée par 3 donc elle est convergente.

Partie C

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}-3} = \frac{1}{\dfrac{9}{6-v_n}-3}$$
$$= \frac{6-v_n}{9-18+3v_n} = \frac{6-v_n}{3v_n-9}$$

Donc $w_{n+1} = \frac{1}{3}\times\frac{3-v_n}{v_n-3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{v_n-3} = -\frac{1}{3}+w_n$.

La suite (w_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$w_n = w_0 - \frac{1}{3}\times n = -\frac{3+2n}{6}$.

Alors $v_n = \frac{1}{w_n}+3 = 3-\frac{6}{3+2n}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+2n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{6}{3+2n} = 0$ (limite d'un quotient) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

108 Partie A

$u_0+u_1 = u_0u_1$ équivaut à $3+u_1 = 3u_1$, c'est-à-dire $u_1 = 1{,}5$.

$u_0+u_1+u_2 = u_0u_1u_2$ équivaut à $4{,}5+u_2 = 4{,}5u_2$, c'est-à-dire $u_2 = \frac{4{,}5}{3{,}5} = \frac{9}{7}$.

Partie B

a) Pour tout entier $n \geqslant 0$,

$s_{n+1} = u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n$

$s_{n+1} = (u_0+u_1+\ldots+u_{n-1})+u_n = s_n+u_n$

De plus, $u_0+u_1+\ldots+u_{n-1} \geqslant u_0$, donc $s_n \geqslant u_0 > 1$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $s_{n+1} = s_nu_n = s_n+u_n$.

Donc $(s_n-1)u_n = s_n$ et comme $s_n-1 \neq 0$, on en déduit que $u_n = \frac{s_n}{s_n-1}$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 0$, $s_n > s_n-1$; en divisant dans les deux membres par le nombre positif s_n-1, on obtient $u_n > 1$.

Partie C

a)

```
Pour i allant de 1 à n
    u ← s/(s − 1)
    s ← s + u
Fin Pour
```

b) On conjecture que (u_n) converge vers 1.

Partie D

a) Initialisation : $s_1 = u_0 > 1$

Hérédité : on suppose que, pour un entier k, $k \geqslant 0$, $s_k > k$.

Alors $s_{k+1} = s_k+u_k$;

$s_k > k$ et $u_k > 1$ donc $s_{k+1} > k+1$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 1$, $s_n > n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc, d'après un théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

De plus, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n\left(1-\dfrac{1}{s_n}\right)} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{s_n}}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{s_n} = 0$ (limite d'un quotient)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{s_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

(limite d'un quotient).

109 1. a) $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{4}$.

On conjecture que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Initialisation : $u_0 = 0$ et $\frac{0}{1} = 0$ donc $u_0 = \frac{0}{0+1}$.

Hérédité : on suppose que, pour un entier k, $k \geqslant 0$, $u_k = \frac{k}{k+1}$.

Donc $u_{k+1} = \dfrac{1}{2-\dfrac{k}{k+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{2k+2-k}{k+1}} = \dfrac{k+1}{k+2}$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{n}{n+1}$

b) Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

c) Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$ et $u_n = \frac{n}{n+1}$,

donc $u_{n+1}-u_n = \frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{(n+1)^2-n(n+2)}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}-u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

2.

```
Tant que |b − a| > 0,001
    n ← n + 1
    a ← b
    b ← 1/(2 − b)
Fin Tant que
```

110 a) Théorèmes de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d›un certain rang ;

(i) si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors la suite (v_n) diverge vers $+\infty$,

(ii) si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorèmes des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

(i) $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d›un certain rang,

(ii) (u_n) et (w_n) convergent vers le même nombre réel L.

Alors la suite encadrée (v_n) converge vers L.

b) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = -n^2 - n + (-1)^n.$$

Alors pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant -n+1$.

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n+1 = -\infty$, d'après un théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Pour tout entier naturel n, on pose

$v_n = n\sqrt{n} + 1000\cos(n)$.

Alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant n\sqrt{n} - 1000$.

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sqrt{n} - 1000 = +\infty$, d'après un théorème de comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = \dfrac{6n + 4(-1)^n}{n+1}$.

Alors $\dfrac{6n-4}{n+1} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{6n+4}{n+1}$

donc $6 - \dfrac{10}{n+1} \leqslant w_n \leqslant 6$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 6 - \dfrac{10}{n+1} = 6$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 6$.

111 **a)** On pose $x = \dfrac{1}{n}$ puis $x = \dfrac{-1}{n+1}$ (avec $n \geqslant 1$).

Alors $e^{\frac{1}{n}} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n}$ et $e^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \geqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,

c'est-à-dire $e \geqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $e^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant 1 - \dfrac{1}{n+1}$,

soit $e^{\frac{-1}{n+1}} \geqslant \dfrac{n}{n+1}$.

La fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $e^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$, soit $e^{\frac{1}{n+1}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

De plus, la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc $\left(e^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$,

c'est-à-dire $e \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

d) On en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{e}{1} = e$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

112 **a)** Pour tout $n \geqslant 0$, $c_n = \dfrac{e^n + 1}{e^n + 2} = \dfrac{1 + e^{-n}}{1 + 2e^{-n}}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + e^{-n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + 2e^{-n} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, $1 - \dfrac{8}{n} \leqslant s_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{8}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{n} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1$.

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $-e^{-n} \leqslant f_n \leqslant e^{-n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} -e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$.

d) On démontre par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 11n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 11n = +\infty$ donc, par comparaison,

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Pour aller plus loin

113 **1. a)** Pour tout $n \geqslant 0$,

$$\frac{(h_n - \sqrt{2})^2}{2h_n} = \frac{h_n^{\,2} - 2h_n\sqrt{2} + 2}{2h_n}$$

$$= \frac{h_n}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{h_n} = h_{n+1} - \sqrt{2}$$

b) Initialisation : $h_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \geqslant 0$

et $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 (h_0 - \sqrt{2}) = h_0 - \sqrt{2}$,

donc $0 \leqslant h_0 - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 (h_0 - \sqrt{2})$.

Hérédité : on suppose que, pour un entier k, $k \geqslant 0$,

$0 \leqslant h_k - \sqrt{2} \leqslant \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^k (h_0 - \sqrt{2})$.

Alors $h_{k+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(h_k - \sqrt{2})^2}{2h_k} \geqslant 0$ puisque $h_k \geqslant \sqrt{2}$.

De plus,

$$0 \leqslant (h_k - \sqrt{2})^2 \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^k (h_0 - \sqrt{2})\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^k (h_0 - \sqrt{2})$$

Sachant que $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^k \leqslant 1$, que $0 \leqslant h_0 - \sqrt{2} \leqslant 1$,

on en déduit que $0 \leqslant (h_k - \sqrt{2})^2 \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^k (h_0 - \sqrt{2})$.

De plus, $h_k \geqslant \sqrt{2}$, d'où $0 < \frac{1}{h_k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $0 < \frac{1}{2h_k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Finalement $0 \leqslant \frac{(h_k - \sqrt{2})^2}{2h_k} \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^k (h_0 - \sqrt{2}) \times \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Donc $0 \leqslant h_{k+1} - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{k+1} (h_0 - \sqrt{2})$.

Conclusion : pour tout $n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant h_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n (h_0 - \sqrt{2}).$$

c) Comme $-1 < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n (h_0 - \sqrt{2}) = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} h_n - \sqrt{2} = 0$.

La suite (h_n) converge donc vers $\sqrt{2}$.

2. a) Pour tout $n \geqslant 0$, $\left|h_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|h_n - \sqrt{2}\right|^2 \times \left|\frac{1}{2h_n}\right|$.

Sachant que pour tout $n \geqslant 0$, $h_n \geqslant \sqrt{2}$, on en déduit que $0 < \frac{1}{2h_n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et donc que $\left|\frac{1}{2h_n}\right| \leqslant 1$.

Finalement, pour tout $n \geqslant 0$, $\left|h_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|h_n - \sqrt{2}\right|^2$.

b) On démontre aisément par récurrence que, pour tout $n \geqslant 3$, $\left|h_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|h_3 - \sqrt{2}\right|^{2^{n-3}}$.

Vu que $\left|h_3 - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-1}$, on en déduit que $\left|h_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 10^{-2^{n-3}}$ car $x \mapsto x^p$ est croissante sur $[0\,; +\infty[$ pour tout entier $p \geqslant 0$.

c) Approx(10**(-10)) fournit 1.4142135623746899 qui possède bien 10 chiffres significatifs.

```python
from math import *

def Approx(p):
    h=2
    n=0
    while n<=3 and 10**(-2**(n-3))>p:
        h=(h+2/h)/2
        n=n+1
    return h
```

114 a) $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{n+1} = \ell$ (ce sont les mêmes termes avec un rang de décalage)

b) Par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{n+1} - S_n = \ell - \ell = 0$.

c) Pour tout $n \geqslant 0$, $S_{n+1} - S_n = u_n$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2. Pour tout $k \geqslant 0$, $\frac{2k+1}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1}$.

$\lim\limits_{k \to +\infty} 1 + \frac{1}{k+1} = 1$.

La suite $\left(\frac{2k+1}{k+1}\right)$ ne converge pas vers 0 donc la suite (S_n) diverge.

3. a) Tout intervalle ouvert auquel appartient ℓ contient tous les termes de la suite (S_n) à partir d'un certain rang. Donc il contient aussi tous les termes de la suite (S_{2n}), ce qui montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} = \ell$.

Par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n} - S_n = \ell - \ell = 0$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Pour tout entier k tel que $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$.

Donc $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2n} \times n$.

c) L'intervalle $]-0{,}1\,; 0{,}1[$ devrait contenir tous les termes de la suite $(S_{2n} - S_n)$ à partir d'un certain rang, mais il n'en contient aucun… Donc (S_n) diverge.

115 **a)** Pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+2}{k^2(k+1)^2}.$$

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Donc $S_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1$.

116 Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$.

a) L'aire du triangle OBI est $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

L'aire du secteur angulaire $\widehat{\text{OBI}}$ est $\frac{1}{2n}$.

En appliquant le théorème de Thalès, on calcule

$$\text{IC} = \frac{\text{OI}}{\text{OD}} \times \text{BD} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$ que l'on note $\tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

L'aire du triangle OIC est donc $\frac{1}{2}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'où l'inégalité : $0 \leqslant \frac{1}{2}\sin\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\tan\frac{1}{n}$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \sin\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\frac{1}{n} = 0$.

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $n\sin\frac{1}{n} \leqslant 1$.

De plus $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{2}\tan\frac{1}{n}$ donc $\cos\frac{1}{n} \leqslant n\sin\frac{1}{n}$.

Or pour tout nombre réel $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

Donc $\sqrt{1-\sin^2\frac{1}{n}} \leqslant n\sin\frac{1}{n} \leqslant 1$.

d) Pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$,, $\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1-\sqrt{x})$.
Or, $\sqrt{x} \geqslant 0$ et $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{1}$, c'est-à-dire $1-\sqrt{x} \geqslant 0$.
Donc, pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\sqrt{x} - x \geqslant 0$,
soit $x \leqslant \sqrt{x}$.

e) $0 \leqslant 1-\sin^2\frac{1}{n} \leqslant 1$, donc :

$$1-\sin^2\frac{1}{n} \leqslant \sqrt{1-\sin^2\frac{1}{n}} \leqslant n\sin\frac{1}{n} \leqslant 1.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\sin^2\frac{1}{n} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$.

On en déduit que $\sin\frac{1}{n}$ est équivalent à $\frac{1}{n}$.

117 **a)** $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont deux nombres réels positifs. Tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à l'intervalle $]\ell-\alpha\,;\ell+\beta[$ à partir d'un certain rang N.
Alors à partir du même rang, tous les termes des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) appartiennent aussi à l'intervalle $]\ell-\alpha\,;\ell+\beta[$. Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent donc vers ℓ.
b) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ sont deux nombres réels positifs.
Tous les termes de la suite (u_{2n}) appartiennent à l'intervalle $]\ell-\alpha\,;\ell+\beta[$ à partir d'un certain rang N.
Tous les termes de la suite (u_{2n+1}) appartiennent à l'intervalle $]\ell-\alpha\,;\ell+\beta[$ à partir d'un certain rang N′.
On pose N″ le maximum des rangs 2N et 2N′ + 1.
Pour tout $n \geqslant \mathrm{N}''$, u_n appartient à l'intervalle $]\ell-\alpha\,;\ell+\beta[$ que n soit pair ou impair.
Donc (u_n) converge vers ℓ.
c) La convergence des deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne suffit pas pour que (u_n) converge.
En effet, si on pose pour tout entier n, $u_n = (-1)^n$, alors, pour tout entier n, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.
Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont constantes et convergent, mais (u_n) diverge. Il est donc nécessaire que les deux sous-suites aient la même limite.

118 **a)** (u_n) converge vers 0 : pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang N_1 à partir duquel tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle $]-0{,}5\varepsilon\,;0{,}5\varepsilon[$.
Donc pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_1$, $u_n \in\,]-0{,}5\varepsilon\,;0{,}5\varepsilon[$, ce qui équivaut à $|u_n| < 0{,}5\varepsilon$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_1|+\ldots+|u_{\mathrm{N}_1}|}{n} = 0$ donc il existe un rang N_2 à partir duquel tous les termes $\frac{|u_1|+\ldots+|u_{\mathrm{N}_1}|}{n}$ appartiennent à l'intervalle $]-0{,}5\varepsilon\,;0{,}5\varepsilon[$.
Donc pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_2$, $\frac{|u_1|+\ldots+|u_{\mathrm{N}_1}|}{n} < 0{,}5\varepsilon$.
c) On pose N le maximum des deux rangs N_1 et N_2 ; pour tout entier $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$|v_n| = \frac{|u_1+\ldots+u_n|}{n} \leqslant \frac{|u_1|+\ldots+|u_{\mathrm{N}_1}|+|u_{\mathrm{N}_1+1}|+\ldots+|u_n|}{n}$$

Alors $\frac{|u_1|+\ldots+|u_{\mathrm{N}_1}|}{n} < 0{,}5\varepsilon$ puisque $n \geqslant \mathrm{N}_2$.
Et pour tout $\mathrm{N}_1+1 \leqslant k \leqslant n$,, $|u_k| < 0{,}5\varepsilon$, donc $\frac{|u_{\mathrm{N}_1+1}|+\ldots+|u_n|}{n} < 0{,}5\varepsilon \times \frac{n-\mathrm{N}_1}{n} \leqslant 0{,}5\varepsilon$.
On en déduit que $|v_n| < \varepsilon$, ce qui équivaut à $v_n \in\,]-\varepsilon\,;\varepsilon[$. La suite (v_n) converge donc vers 0.

119 Pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + (n-1)a_{n-1} = \frac{2(n-1)+2}{(n-1)+2} = \frac{2n}{n+1}.$$

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + (n-1)a_{n-1} + na_n = \frac{2n+2}{n+2}$$

En effectuant la différence membre à membre, on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$na_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

et $a_n = \frac{2}{(n+2)(n+1)n} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\frac{1}{1\times2} - \frac{1}{2\times3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n\times(n+1)} - \frac{1}{(n+1)\times(n+2)}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)\times(n+2)}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\times(n+2)} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}$.

120 Si $u_0 \leqslant 0{,}5$, alors $u_1 = 1$ et $u_2 = 0{,}5$.
Si $u_0 > 0{,}5$, alors $u_1 = 0$ et $u_2 = 0{,}5$.
On démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$0{,}5 - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 0{,}5 + \frac{1}{n}.$$

Initialisation : À l'évidence, $0{,}5 - \frac{1}{2} \leqslant u_2 \leqslant 0{,}5 + \frac{1}{2}$.
Hérédité : on suppose que, pour un entier k, $k \geqslant 2$, $0{,}5 - \frac{1}{k} \leqslant u_k \leqslant 0{,}5 + \frac{1}{k}$.
Si $0{,}5 - \frac{1}{k} \leqslant u_k \leqslant 0{,}5$, alors le nombre de termes de rang inférieur ou égal à k dans $[0\,;0{,}5]$ est $ku_k + 1$.

Donc $u_{k+1} = \dfrac{ku_k + 1}{k+1}$.

Comme $0,5 - \dfrac{1}{k} \leqslant u_k \leqslant 0,5$,

il vient $0,5k \leqslant ku_k + 1 \leqslant 0,5k + 1$

et $\dfrac{0,5k}{k+1} \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{0,5k+1}{k+1}$.

$0,5 - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{0,5k - 0,5}{k+1} \leqslant \dfrac{0,5k}{k+1}$

Et $0,5 + \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{0,5k + 1,5}{k+1} \geqslant \dfrac{0,5k+1}{k+1}$.

Donc $0,5 - \dfrac{1}{k+1} \leqslant u_{k+1} \leqslant 0,5 + \dfrac{1}{k+1}$.

Si $0,5 < u_k \leqslant 0,5 + \dfrac{1}{k}$, alors le nombre de termes de rang inférieur ou égal à k dans $[0\,;0,5]$ est ku_k.

Donc $u_{k+1} = \dfrac{ku_k}{k+1}$.

Comme $0,5 < u_k \leqslant 0,5 + \dfrac{1}{k}$,

il vient $0,5k < ku_k \leqslant 0,5k + 1$

et $\dfrac{0,5k}{k+1} < u_{k+1} \leqslant \dfrac{0,5k+1}{k+1}$.

Comme précédemment,

$0,5 - \dfrac{1}{k+1} \leqslant u_{k+1} \leqslant 0,5 + \dfrac{1}{k+1}$.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$0,5 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 0,5 + \dfrac{1}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} 0,5 + \dfrac{1}{n} = 0,5$.

D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 0,5.

7 Compléments sur les suites

Questions-Tests

1 (1) **2** (3) **3** (2) **4** (3)

5 **a)** 3) **b)** (1) **6** **a)** (1) **b)** (2) **7** (3)

Découvrir

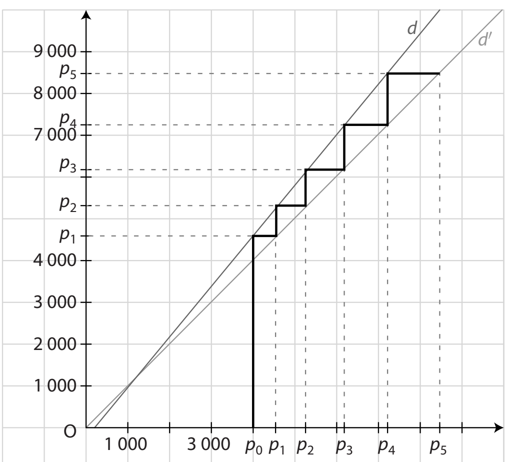
1 Représenter graphiquement une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1 **a)** $p_{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{20}{100}\right)p_n}_{\text{augmentation de 20 \%}} \underbrace{-200}_{\text{disparition de 200 fourmis}}$.

b) Au premier mars 2020 la population est de 4 205 fourmis.

2 **a)** Pour tout nombre entier naturel n, $p_{n+1} = f(p_n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1{,}2x - 200$.

b)



c) La suite (p_n) semble strictement croissante. La population de fourmis semble s'accroître et tendre vers l'infini.

2 Une suite croissante majorée

1 On démontre par récurrence que pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.

Initialisation : $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 4 = 5$.

On a donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 8$.

On démontre alors que $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 8$.

De l'hypothèse de récurrence $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 8$, on déduit que $\frac{1}{2}u_k \leqslant \frac{1}{2}u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}\times 8$

et $\frac{1}{2}u_k + 4 \leqslant \frac{1}{2}u_{k+1} + 4 \leqslant \frac{1}{2}\times 8 + 4$

et $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 8$.

Conclusion : pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.

2 **a)** La suite (a_n) est constante donc $a_{n+1} = a_n$ soit $a_n = \frac{1}{2}a_n + 4$ donc,

$$\frac{1}{2}a_n = 4 \text{ et } a_n = 8.$$

b) $u_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}(u_n - 4) - 8 = \frac{1}{2}(u_n - 8)$.

La suite $(u_n - 8)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c) On a donc $u_n - 8 = 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

soit $u_n = 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8$.

La limite de la suite (u_n) semble être 8.

Savoir-faire

3 **a)** Pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 2n^2 \geqslant 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.
b) Pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2-3x}$.
Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -3\mathrm{e}^{2-3x}$ d'où le tableau de variations de la fonction f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\mathrm{e}^2 \searrow$

La fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, la suite (v_n) est décroissante.

4 On démontre par récurrence que pour tout entier n, $v_n \geqslant -3{,}75$.
Initialisation : $v_0 = 2$. On a donc $v_0 \geqslant -3{,}75$.
Hérédité : De l'hypothèse de récurrence, $v_n \geqslant -3{,}75$, on démontre alors que $0{,}2v_k \geqslant -0{,}75$ et $0{,}2v_k - 3 \geqslant -3{,}75$.
Ainsi $v_{k+1} \geqslant -3{,}75$.
Conclusion : pour tout entier n, $v_n \geqslant -3{,}75$.
La suite (v_n) est minorée par $-3{,}75$.

7 **a)** $\dfrac{3}{2} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1} = -\infty$.

b) $v_n = 1\times(1-\sqrt{2})^n$. $1-\sqrt{2} \approx -0{,}4$.
$-1 \leqslant 1-\sqrt{2} \leqslant 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\sqrt{2})^n = 0$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

8 $u_n = \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \ldots + \dfrac{7}{10^n}$, soit

$$= 7\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^n}\right)$$

$$u_n = 7\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n}\right) - 7$$

$$= 7\left(\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}}\right) - 7$$

et $\quad u_n = \dfrac{70}{9}\left(1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n+1}\right) - 7.$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n+1} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{70}{9} - 7 = \dfrac{7}{9}$.

11 **a)** Pour tout entier naturel $n > 1$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2}{n} \geqslant 0$; donc la suite (a_n) est croissante.
b) On raisonne par l'absurde.
On suppose que la suite (a_n) est majorée. La suite (a_n) étant croissante, elle converge alors vers un nombre réel ℓ.
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n + \dfrac{2}{n}\right) = +\infty$.

La limite de la suite (a_n) étant unique, on arrive à une contradiction, donc la suite (t_n) n'est pas majorée.
c) La suite (t_n) est une suite croissante non majorée donc elle admet pour limite $+\infty$.

12 **1. Initialisation** : $v_0 = 100$,
$v_1 = 0{,}4\times 100 + 40 = 80$. On a donc $65 \leqslant v_1 \leqslant v_0$.
Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $65 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k$, on démontre alors que $65 \leqslant v_{k+2} \leqslant v_{k+1}$.
De l'hypothèse de récurrence $65 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k$,
on déduit $66 \leqslant 0{,}4v_{k+1} + 40 \leqslant 0{,}4v_k + 40$
soit $65 \leqslant 66 \leqslant v_{k+2} \leqslant v_{k+1}$.
Conclusion : pour tout entier n, $65 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
2. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 65, donc elle converge vers un nombre réel ℓ tel que $\ell \geqslant 65$.

14 **a) Initialisation** : $u_0 = -1$, $4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = -1$.

On a donc $u_0 = 4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $u_k = 4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$,

on veut démontrer que $u_{k+1} = 4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $u_k = 4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$,

on déduit $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\right) + 2$

et $u_{k+1} = 2 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} + 2$, soit $u_{k+1} = 4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}$.

Conclusion : pour tout entier n, $u_n = 4 - 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b) $-1 < 1/2 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$
et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 4$.

c)

```python
from math import*
def seuil(p):
    n=0
    u=-1
    While 4-u>=10**(-p):
        n=n+1
        u=4-5*0.5**n
    return n,u
>>> seuil(5)
(19, 3.999990463256836)
```

La valeur pour laquelle $4-u_n<10^{-5}$ est $n=19$.

Acquérir des automatismes

15 $u_{n+1}-u_n=3\geqslant 0$. Julia a raison.

16 $v_{n+1}-v_n=2\geqslant 0$. Paolo a tort.

17 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$. La suite (u_n) est décroissante.

18 **a)** $u_{n+1}-u_n=5-(n+3)^2-5+(n+2)^2$

$u_{n+1}-u_n=(n+2-n-3)(n+2+n+3)$

$u_{n+1}-u_n=-(2n+5)$.

b) Pour entier naturel n, $u_{n+1}-u_n<0$.

La suite (u_n) est décroissante.

19 **a)** $h_{n+1}-h_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}$

$=-\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

b) $h_{n+1}-h_n<0$, la suite (h_n) est décroissante.

20 **a)** La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=2x^2+x-3$ est telle que $u_{n+1}=f(u_n)$.

b) $f'(x)=4x+1>0$ pour tout $x\in]0\,;+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0\,;+\infty[$.

c) La suite (u_n) est donc croissante.

21 **a)** $1{,}2^n>0$ et $n>0$. Donc $\dfrac{2^n}{n}>0$.

b) $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}=\dfrac{2^{n+1}}{n+1}\times\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{2n}{n+1}$.

c) $2n-(n+1)=n-1$.

Comme $n\geqslant 1$, $n-1\geqslant 0$ et $2n>n+1$.

On en déduit que $\dfrac{2n}{n+1}\geqslant 1$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

La suite (u_n) est croissante.

22 **a)** On obtient :

n	u_n
0	−2
1	1.5
2	3.25
3	4.125
4	4.5625
5	4.78125
6	4.890625

La suite (t_n) semble croissante.

b) Initialisation : $t_0=-2$, $t_1=1{,}5$.

On a donc $t_1\geqslant t_0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $t_{k+1}\geqslant t_k$, on veut démontrer que $t_{k+2}\geqslant t_{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $t_{k+1}\geqslant t_k$, on déduit $\dfrac{1}{2}t_{k+1}\geqslant\dfrac{1}{2}t_k$ et $\dfrac{1}{2}t_{k+1}+\dfrac{5}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}t_k+\dfrac{5}{2}$

soit $t_{k+2}\geqslant t_{k+1}$.

Conclusion : pour tout entier n, $t_{n+1}\geqslant t_n$, la suite (t_n) est croissante.

23 Pour tout entier naturel $n>0$,

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{e^{2n+2}}{5^{n+3}}\times\dfrac{5^{n+2}}{e^{2n}}=\dfrac{e^2}{5}>1$.

La suite (u_n) est donc croissante.

24 Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1}-u_n=1-\dfrac{2}{n+4}-1+\dfrac{2}{n+3}$ soit

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{-2(n+3)+2(n+4)}{(n+3)(n+4)}=\dfrac{2}{(n+3)(n+4)}$

donc $u_{n+1}-u_n>0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

25 **a)** La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^x-x$ est telle que $u_n=f(n)$.

b) $f'(x)=e^x-1>0$ pour tout $x\in]0\,;+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0\,;+\infty[$.

c) La suite (u_n) est donc croissante.

26 Pour tout entier naturel $n>0$,

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\times\dfrac{n^n}{n!}=\dfrac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n<1$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

27 Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1}-u_n$

$=1^2+2^2+\ldots+(n+1)^2-(1^2+2^2+\ldots+n^2)$

$=(n+1)^2>0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

28 **Initialisation** : $u_0=-1$, $u_1=-1{,}5$.

On a donc $u_1<u_0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $t_{k+1} < t_k$, on veut démontrer $t_{k+2} < t_{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $t_{k+1} < t_k$, on déduit $\frac{3}{2}t_{k+1} < \frac{3}{2}t_k$ soit $t_{k+2} < t_{k+1}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

29 Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. On en déduit 1 est un minorant et 3 est un majorant de la suite (u_n).

30 0 est un minorant et 1 est un majorant de la suite (u_n).

31 Pour tout entier naturel $n > 0$,

$$u_n - \frac{3}{2} = \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{3}{2}$$

soit $u_n - \frac{3}{2} = \frac{4n+2-9n+3}{2(3n-1)} = \frac{-5n+5}{2(3n-1)}$.

Pour tout entier $n > 0$, $-5n+5 \leqslant 0$ et $3n-1 > 0$.

$u_n - \frac{3}{2} \leqslant 0$, on en déduit que $\frac{3}{2}$ est un majorant de la suite (u_n).

32 **a)** La fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-2}{3x+1}$ est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

b) $f'(x) = \frac{10}{(3x+1)^2} > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0\,;+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

c) On tabule la suite à l'aide de la calculatrice, on obtient le tableau ci-dessous.

n	u_n
0	−2
10	1.225806
20	1.278689
30	1.296703
40	1.305785
50	1.311258
60	1.314917

La suite (u_n) semble majorée par 2.

On étudie le signe de $u_n - 2$ pour tout entier naturel n, $u_n - 2 = \frac{-4n-4}{3n+1} < 0$: pour tout entier naturel n, $u_n < 2$: la suite (u_n) est majorée par 2.

33 **Initialisation** : $u_0 = 5$. On a donc $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 5$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant 5$. On veut démontrer que $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$.

De l'hypothèse de récurrence $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant 5$,

on déduit $-\frac{1}{2} \times 5 \leqslant -\frac{1}{2}u_k \leqslant -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

soit $-\frac{1}{2} \times 5 + 3 \leqslant -\frac{1}{2}u_k + 3 \leqslant -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 3$

d'où $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{11}{4}$, soit $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 5$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 5$: la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$ et majorée par 5.

34 **a)** Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ soit $-2 \leqslant -2\cos n \leqslant 2$ et $3 \leqslant 5 - 2\cos n \leqslant 5$.

La suite (w_n) est bornée par 3 et 5.

b) 6, 10 et 15 sont trois majorants de la suite (w_n).

− 5, 0 et 1 sont trois minorants de la suite (w_n).

35 **a)** Pour tout entier naturel n,

$26 - v_n = n^2 - 10n + 25 = (n-5)^2 \geqslant 0$

soit $26 \geqslant v_n$. La suite (v_n) est majorée par 26.

b) La fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 10x + 1$ est telle que $v_n = f(n)$.

$f'(x) = -2x + 10$.

La fonction f est donc décroissante pour $x \geqslant 5$.

La suite (v_n) est décroissante à partir du rang **c.** Supposons que la suite (v_n) est minorée par m.

Donc pour tout entier $n \geqslant 5$ tel que $v_n \geqslant m$.

Comme la suite (v_n) est décroissante $v_{n+1} \leqslant v_n$ soit $v_{n+1} \leqslant m$.

Il y a donc contradiction avec l'hypothèse retenue : la suite (v_n) n'admet pas de minorant.

36 **a)**

n	u_n	5	3
0	0	6	2.95082
1	1.153846	7	2.837838
2	2.068966	8	2.696629
3	2.647059	9	2.54717
4	2.926829	10	2.4

Il semble que 0 est un minorant de la suite (t_n) et que 3 en soit un majorant.

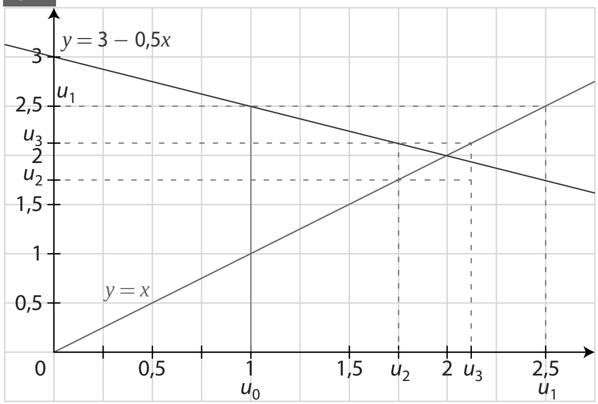
b) Pour tout entier naturel n, $30n \geqslant 0$ et $25 + n^2 > 0$ donc $t_n \geqslant 0$.

$$t_n - 3 = \frac{30n - 75 - 3n^2}{25 + n^2} = \frac{-3(n^2 - 10n + 25)}{25 + n^2}$$

$$= \frac{-3(n-5)^2}{25 + n^2} \leqslant 0.$$

Donc pour tout entier naturel n, $t_n \leqslant 3$.

37 **a)** on obtient



b) Il semble que la suite (u_n) est bornée par 1 et 2,5.

c) Initialisation : $u_0 = 1$. On a donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2{,}5$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $1 \leqslant u_k \leqslant 2{,}5$. On veut démontrer $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2{,}5$.

De l'hypothèse de récurrence $1 \leqslant u_k \leqslant 2{,}5$,

on déduit $-\dfrac{1}{2} \times 2{,}5 \leqslant -\dfrac{1}{2}u_k \leqslant -\dfrac{1}{2} \times 1$

soit $-\dfrac{1}{2} \times 2{,}5 + 3 \leqslant -\dfrac{1}{2}u_k + 3 \leqslant -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + 3$

d'où $1{,}75 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2{,}25$ soit $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant 2{,}5$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2{,}5$: la suite (u_n) est minorée par 1 et majorée par 2,5.

38 **a)** $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, la suite (u_n) tend vers 0.

b) $2 > 1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

c) $\dfrac{7}{6} > 1$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

d) $-1 < 0{,}99 < 1$, la suite (w_n) tend vers 0.

e) $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, la suite (t_n) tend vers 0.

f) $\pi > 1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

39 Pour tout entier naturel n, $u_n = -1 \times \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$. $\dfrac{5}{4} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$. La suite (u_n) tends vers $-\infty$.

40 $S_n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, la limite de la suite (S_n) est 2. Jade a tort.

41 **a)** $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

La suite (u_n) tend vers 0.

b) $\dfrac{5}{3} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n = +\infty$.

Comme $4 \times 10^{-3} > 0$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

c) $\dfrac{9}{4} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{4}\right)^n = +\infty$.

Comme $-7 < 0$, la suite (t_n) tend vers $-\infty$.

42 **a)** $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}1)^n = 0$, donc la suite (u_n) tend vers 40.

b) $1 + \dfrac{1}{100} > 0$ donc la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

c) $-1 < 0{,}3 < 1$ et $-1 < 0{,}5 < 1$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}3)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}5)^n = 0$.

La suite (w_n) tend vers 3.

d) $3 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (3)^n = +\infty$, $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}5)^n = 0$.

La suite (t_n) tend vers $+\infty$.

43 $v_n = 3 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

$\dfrac{3}{2} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = +\infty$.

La suite (v_n) tend vers $+\infty$.

44 **a)** La probabilité d'obtenir n faces différentes de 6 pour n lancers est $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$. La probabilité d'obtenir au moins un 6 sur n lancers est donc $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

b) $-1 < \dfrac{5}{6} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$.

La suite (p_n) tend vers 1.

45 **a)** $4 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (4)^n = +\infty$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

b) $s_n + t_n = \left(\dfrac{1}{5} - 3\right)4^n = -\dfrac{14}{5}4^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} (4)^n = +\infty$.

La suite $(s_n + t_n)$ tend vers $-\infty$.

$s_n \times t_n = -\dfrac{3}{5} \times 4^{2n}$.

La suite $(s_n \times t_n)$ tend vers $-\infty$.

46 **a)** Cet algorithme permet de savoir à quel rang la suite $(0{,}25)^n$ devient inférieure ou égale à 10^{-p}, p étant donné.

b) $-1 < 0{,}25 < 1$, la suite $(0{,}25^n)$ est décroissante et tend vers 0. L'algorithme va s'arrêter.

47 **a)** $c_n = \dfrac{1}{4}c_{n-1}$.

La suite des aires des carrés est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $c_1 = 16$.

b) $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 16 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-\dfrac{1}{4}}$

$= 16 \times \dfrac{4}{3} \times \left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right),$

soit $S_n = \dfrac{64}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right).$

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$, (S_n) tend vers $\dfrac{64}{3}$.

48 **a)** $u_n = 10 \times \left(1+\dfrac{25}{100}\right)^n = 10 \times 1{,}25^n.$

b) Comme $1{,}25 > 1$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

c)

```
from math import*
def seuil(p):
    n=1
    L=sqrt(2)
    while 2*sqrt(2)-L>=10**(-p):
        n=n+1
        L=2*sqrt(2)*(1-0.5**n)
    return n,L
```

d)

```
>>> seuil(4)
10097.41958682895 31
>>> seuil(5)
117549.43506222875 42
>>> seuil(6)
1094764.4252537633 52
```

$u_n > 10^4$ au bout de 31 h , $u_n > 10^5$ au bout de 42 h, $u_n > 10^6$ au bout de 52 h.

49 La suite (u_n) est décroissante, elle n'est pas minorée.
La suite (u_n) tend vers $-\infty$.

50 **a)** La suite (v_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
b) La limite de la suite (v_n) est supérieure ou égale à -1.

51 **a)** La suite (v_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.
b) La limite de la suite (u_n) est inférieure ou égale à 5.

52 **a)** $v_{n+1} - v_n = 2n+1 > 0$, la suite (v_n) est croissante.
b) Supposons que la suite (v_n) est majorée par le nombre réel M, alors pour tout nombre entier naturel n, $v_n \leqslant M$, soit $n^2+2 \leqslant M$ et $v_{n+1} \leqslant M$, soit $n^2+2n+3 \leqslant M$.
On en déduit $2n+1 \leqslant 0$ ce qui contredit l'hypothèse n entier naturel.
La suite (v_n) n'est pas majorée.
c) La suite (v_n) est croissante et non majorée, elle tend vers $+\infty$.
À est un nombre réel donné, comme la suite (v_n) est croissante et non majorée, il existe un rang N tel que pour tout $n > N$, $v_n > A$.
Cela signifie que la suite (v_n) a pour limite $+\infty$.

53 **a)** $30 - \dfrac{30n}{25+n} = \dfrac{750}{25+n} > 0$, la suite (u_n) est majorée par 30.
b) La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{30x}{25+x}$ est telle que $u_n = f(n)$.

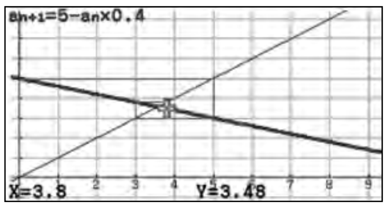
$f'(x) = \dfrac{750}{(25+x)^2} > 0.$

Comme la fonction f est croissante sur $]0\,;+\infty[$, la suite (u_n) est croissante.
c) La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

54 **a) Initialisation** : $u_0 = 1$. On a donc $u_0 > 0$.
Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $u_k > 0$. On veut démontrer $u_{k+1} > 0$.
D'après l'hypothèse de récurrence $u_k > 0$.
On déduit que comme $e^{u_k} > 0$, $u_k e^{u_k} > 0$
soit $u_{k+1} > 0$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} < 1$ car $u_n > 0$.
La suite (u_n) est décroissante.
c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

55 **a) Initialisation** : $v_0 = 1$. On a donc $v_0 \leqslant 8$.
Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $v_k \leqslant 8$. On veut démontrer $v_{k+1} \leqslant 8$.
D'après l'hypothèse de récurrence $v_k \leqslant 8$, on déduit $0{,}75v_k \leqslant 6$ et $0{,}75v_k + 2 \neq 8$, soit $v_{k+1} \leqslant 8$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant 8$, la suite (v_n) est majorée par 8.
b) pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 2 - 0{,}25v_n$.
Comme $v_n \leqslant 8$, $2 - 0{,}25v_n \geqslant 0$.
La suite (v_n) est croissante.
c) La suite (v_n) est croissante et majorée par 8, elle converge vers un nombre réel $\ell \leqslant 8$.

56 **1. a)**



b) la suite (u_n) ne semble ni croissante ni décroissante.
Cette suite semble majorée par 4 et minorée par 3.
2. Si la suite converge, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$
et $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = 5 - 0{,}4\ell$.
Par unicité de la limite on a $5 - 0{,}4\ell = \ell$, soit $\ell = \dfrac{25}{7}$.

57 **1. a)**

b) La suite (u_n) semble décroissante et minorée par 0. Elle semble converger vers 0.

2. a) La fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x - x^2$ est telle que $u_n = f(n)$.

b) $f'(x) = 1 - 2x > 0$ pour tout réel $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$.

On obtient :

x	0	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{4}$

c) Initialisation : $u_0 = 0{,}4$, $u_1 = 0{,}24$.

On a donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k,

$$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2},$$

on veut démontrer $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

De l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant \dfrac{1}{2}$, on déduit que comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{1}{2}\right]$,

alors $f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,

soit $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}.$$

d) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

58 **a)**

La suite (v_n) semble décroissante et minorée par 1,4.

b) Initialisation : $v_0 = 3$, $u_1 = 1{,}9$.

On a donc $1{,}5 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $1{,}4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$,

on veut démontrer $1{,}4 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $1{,}4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$,

on déduit que $0{,}3 \times 1{,}4 \leqslant 0{,}3 \times u_{k+1} \leqslant 0{,}3 \times u_k$

et $0{,}3 \times 1{,}4 + 1 \leqslant 0{,}3 \times u_{k+1} + 1 \leqslant 0{,}3 \times u_k + 1$

soit $1{,}42 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$1{,}4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

c) La suite (v_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

59 **1. a)**

b) La suite (w_n) semble croissante et majorée par 3.

La suite (w_n) semble converger vers 3.

c) La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x+3}$ est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

x	0	3
$f(x)$	$\sqrt{3}$ ↗	3

d) Initialisation : $w_0 = 0$, $w_1 = \sqrt{5}$.

On a donc $0 \leqslant w_0 \leqslant w_1 \leqslant 3$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k,

$$0 \leqslant w_k \leqslant w_{k+1} \leqslant 3,$$

on veut démontrer $0 \leqslant w_{k+1} \leqslant w_{k+2} \leqslant 3$.

De l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 3$,

on déduit que comme la fonction f est croissante $f(0) \leqslant f(w_k) \leqslant f(w_{k+1}) \leqslant f(3)$

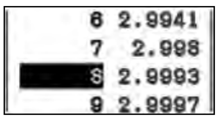
soit $0 \leqslant \sqrt{3} \leqslant w_{k+1} \leqslant w_{k+2} \leqslant 3$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant w_n \leqslant w_{n+1} \leqslant 3.$$

e) La suite (w_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

f)



$w_n \geqslant 2{,}999$ pour $n = 8$.

60 **a) Initialisation** : $t_0 = 2$. On a donc $1 \leqslant t_0 \leqslant 2$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $1 \leqslant t_k \leqslant 2$, on veut démontrer $1 \leqslant t_{k+1} \leqslant 2$.

De l'hypothèse de récurrence $1 \leqslant t_k \leqslant 2$, on déduit que $4 \leqslant t_k + 3 \leqslant 5$, $-\dfrac{16}{4} \leqslant -\dfrac{16}{t_k+3} \leqslant -\dfrac{16}{5}$

et $5 - \dfrac{16}{4} \leqslant 5 - \dfrac{16}{t_k+3} \leqslant 5 - \dfrac{16}{5}$

soit $1 \leqslant t_{k+1} \leqslant 1{,}8 \leqslant 2$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leqslant t_n \leqslant 2$.

b) $t_{n+1} - t_n = 5 - \dfrac{16}{t_n + 3} - t_n = \dfrac{-t_n^2 + 2t_n + 1}{t_n + 3}$

$= -\dfrac{(t_n - 1)^2}{t_n + 3}$.

Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant t_n$ et $-\dfrac{(t_n - 1)^2}{t_n + 3} \leqslant 0$.

La suite (t_n) est décroissante.

c) La suite (t_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

61 **a)** $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 3000$.

b) Initialisation : $u_0 = 15000$, $u_1 = 13500$.

On a donc $10000 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $10000 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$,

on veut démontrer $10000 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $10000 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$, on déduit que

$$0{,}7 \times 10000 + 3000 \leqslant 0{,}7 \times u_{k+1} + 3000 \leqslant 0{,}7u_k + 3000$$

soit $10000 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$10000 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

d) Le nombre de clients du supermarché va se stabiliser à 10 000 clients.

Pour se tester

62 **1.** A **2.** A **3.** D **4.** C

63 **1.** A, B, C et D **2.** B et D **3.** A **4.** A, B et C

64 **1. Affirmation fausse.** Par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = (-2)^n$ n'est pas majorée et elle n'a pas de limite.

2. Affirmation fausse. Par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 2 + \cos(n)$ est bornée par 1 et 3 et elle n'est pas convergente.

3. Affirmation fausse.

$S_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$

d'où $S_n = \dfrac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$.

Comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n - 1 = +\infty$.

4. Affirmation vraie. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc vers un nombre réel $\ell \geqslant 1$.

S'entraîner

65 **(1)** Écrire la définition d'une suite minorée : Il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.

(2) Prendre la négation d'une proposition : la suite (u_n) est non minorée donc quel que soit le réel A, il existe un entier naturel N tel que $u_N \leqslant A$.

(3) Utiliser la décroissance de (u_n) : pour tout entier naturel $n > N$, $u_n \leqslant u_N$.

(4) Tirer des conséquences : de **(2)** et **(3)**, il résulte que pour tout entier naturel $n > N$, $u_n \leqslant A$.

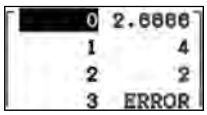
(5) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, on se donne un intervalle $I =]-\infty\,; A[$ (avec A réel).

D'après ce qui précède, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $u_n \in I$ donc I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

(6) Conclure par une phrase : Si une suite est décroissante et non minorée alors elle diverge vers $-\infty$.

66 **1.**

a)



b) u_3 n'est pas défini.

c) Les relations précédentes ne définissent pas une suite.

2. a) Initialisation : $u_0 \in I$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $u_k \in I$ d'où $f(u_k) \in I$ soit $u_{k+1} \in I$.

Conclusion : on peut définir une suite (u_n) par u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

b) $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2} < 0$ pour tout $x \in [0\,;2]$.

x	0	2
$f(x)$	2 ↘	$\frac{4}{3}$

f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ telle que pour tout pour tout nombre réel $x \in [0\,;2]$, $f(x) \in [0\,;2]$,

$u_0 \in [0\,;2]$ alors on définit la suite (u_n) par u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

67 **a)** On considère la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 0{,}2^n$.
La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ est telle que $u_n = f(v_n)$.
Pour tout nombre entier naturel n.
b) La limite de la fonction f est 0, donc la limite de la suite (u_n) est -1.

68 **Parcours 1**
Pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$.
La suite (a_n) est la suite géométrique de premier terme $a_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.
$a_n = \dfrac{\pi}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$,
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$: la limite de la suite (a_n) est 0.

Parcours 2
a) Pour tout nombre entier naturel $b_{n+1} = -0{,}5b_n$. La suite (b_n) est la suite géométrique de premier terme $b_0 = 1$ et de raison $-\dfrac{1}{2}$.
b) $b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
c) $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, la limite de la suite (b_n) est 0.

69 **1. a)** La longueur du côté du carré c_{n+1} est la moitié de celle du côté du carré c_n.
La suite (c_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
b) $c_n = 1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
2. a) $\mathrm{L}_n = \sqrt{2}(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$.
b) $\mathrm{L}_n = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \sqrt{2} \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}$
soit $\mathrm{L}_n = 2\sqrt{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{L}_n = 2\sqrt{2}$.
3. a) Au début de cet algorithme, on affecte $\sqrt{2}$ à la variable n et on saisit un nombre entier naturel $p \geqslant 1$.

```
Tant que 2√2 − L_n ⩾ 10^(−p)
    Affecter à n la valeur n + 1
Fin Tant que
```

L'algorithme renvoie la valeur de n.

b)

```python
from math import*
def seuil(p):
    n=1
    L=sqrt(2)
    while 2*sqrt(2)-L>=10**(-p):
        n=n+1
        L=2*sqrt(2)*(1-0.5**n)
    return n,L
```

On obtient pour $p = 6$

```
>>> seuil(6)
22 2.828426450396614
```

70 **a)** D'après le théorème de Pythagore,
$$\ell_1^2 = \left(\frac{3}{4}\ell_0\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\ell_0\right)^2,$$
soit $\ell_1^2 = \dfrac{10}{16}\ell_0^2$. et $\ell_1 = \sqrt{\dfrac{5}{8}}\ell_0$.
De même $\ell_2 = \sqrt{\dfrac{5}{8}}\ell_1 = \sqrt{\dfrac{5}{8}}^2\ \ell_0$.
b) On obtient par un même raisonnement
$$\ell_{n+1} = \sqrt{\frac{5}{8}}\ell_n.$$
La suite (ℓ_n) est géométrique de raison $\sqrt{\dfrac{5}{8}}$.
c) $\ell_n = \ell_0\left(\sqrt{\dfrac{5}{8}}\right)^n$.
d) Comme $-1 < \sqrt{\dfrac{5}{8}} < 1$ la limite de la suite (ℓ_n) est 0.
2. a)

```python
from math import*
def seuil(p):
    n=1
    L=1
    while L>=10**(-p):
        n=n+1
        L=5/8*L
    return n,L
```

b)

```
>>> seuil(4)
21 8.271806125530277e-05
```

71 **1.** $m_{n+1} = 0{,}9m_n$, la suite (m_n) est géométrique de raison 0,9.
Comme $-1 < 0{,}9 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$.
La limite de la suite (m_n) est 0.
2. a) Comme $m_0 = 25000$ et la raison de la suite (m_n) est inférieure à 1, cette suite est donc décroissante. Il restera un jour moins de 1 kg de glace.
b)

```python
from math import*
def seuil(p):
  n=0
  m=25000
  while m>=1:
    n=n+1
    m=0.9*m
  return n,m
```

```
>>> seuil(1)
(97, 0.9108847355139755)
```

Il restera moins d'un kilogramme de glace au bout de 97 jours.

72 **a)** Une réduction de 20 % fait passer la quantité de médicament de q à $0{,}8q$. On ajoute 1 mL.

On a donc $q_{n+1} = 0{,}8q_n + 1$.

b) La suite (u_n) est constante, donc $u_n = 0{,}8u_n + 1$, soit $u_n = 5$.

c) $v_{n+1} = q_{n+1} - 5 = 0{,}8q_n - 4 = 0{,}8(q_n - 5)$.

On a donc $v_{n+1} = 0{,}8v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8.

d) On a donc $v_n = 10 \times 0{,}8^n$ et $u_n = 5 + 10 \times 0{,}8^n$.

e) Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$.

Quand elle sera stabilisée la quantité de médicament présent dans le sang sera de 5 mL.

73 **a)** Une réduction de 10 % fait passer la quantité p à $0{,}9p$. On ajoute 1 200 habitants, soit 1,2 milliers. On a donc $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 1{,}2$.

b)

c) La suite (u_n) est telle que $k = 0{,}9k + 1{,}2$ soit $k = 12$.

d) $v_{n+1} = p_{n+1} - 12 = 0{,}9p_n - 10{,}8 = 0{,}9(p_n - 12)$.

On a donc $v_{n+1} = 0{,}9v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

e) $v_n = 10 \times 0{,}9^n$, soit $p_n = 12 + 10 \times 0{,}9^n$.

Comme $-1 < 0{,}9 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ et la suite (p_n) converge vers 12.

74 **a)** $0 < q < 1$ donc $p > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{p^n} = 0$.

b) $-1 < q < 0$. On considère la suite de terme général $|q|^n$.

$|q|^n = |q^n|$ et comme $0 < |q| < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$.

c) La suite géométrique (q_n) converge vers 0 quand $-1 < q < 1$.

75 **a)** Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3}{4}(u_n + v_n).$$

La suite $(u_n + v_n)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $u_0 + v_0 = 80$.

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n).$$

La suite $(v_n - u_n)$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 - u_0 = 40$.

b) $u_n + v_n = 80 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ et $v_n - u_n = 40 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

c) On en déduit que pour tout entier naturel n :

$v_n = 40 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 20 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$,

$u_n = 40 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 20 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

d) $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$

$-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

76 **Partie A**

1. Pour tout nombre entier n :

$v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{b}{1-a}$

$v_{n+1} = au_{n+b} - \dfrac{b}{1-a}$

$v_{n+1} = au_n - \dfrac{ab}{1-a}$

$v_{n+1} = a\left(u_n - \dfrac{b}{1-a}\right)$

$v_{n+1} = av_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.

Pour tout nombre entier n, $v_n = v_0 \times a^n$ donc

$u_n = v_n + \dfrac{b}{1-a}$

$u_n = v_0 \times a^n + \dfrac{b}{1-a}$.

Si a appartient à $]-1\,;1[$ c'est-à-dire - $1 < a < 1$ alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2021 la hauteur de la plante sera de :

$$\frac{3}{4} \times 80 + 30 = 110 \text{ cm}.$$

Une réduction de $\dfrac{1}{4}$ fait passer la hauteur de h à $\dfrac{3}{4} \times h$.

La plante grandit de 30 cm. Donc $h_{n+1} = 0{,}75h + 30$.

Comme $-1 < 0{,}75 < 1$, la suite (h_n) converge vers $\dfrac{30}{1-0{,}75} = 120$ cm comme démontré dans la **partie A**.

77 **Parcours 1**

La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$ est telle que $u_n = f(n)$.

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $xe^{-x} \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 0$.

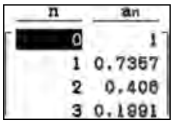
$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0 ↗	$e^{-1} \approx 0{,}37$	↘ 0

La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1 et minorée par 0.

La suite (u_n) est convergente et sa limite est supérieure ou égale à 0.

Parcours 2

a) 

La suite (u_n) semble décroissante. Elle semble minorée par 0 et majorée par 1.

b) La fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$ est telle que $u_n = f(n)$. $f'(x) = -xe^{-x} \leqslant 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	1 ↘	0

c) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) > 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge vers un nombre supérieur ou égal à 0.

78 **a)** $u_1 = \dfrac{1}{16}$ et $u_1 = \dfrac{1}{256}$.

La fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2$ est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

b) $f'(x) = 2x > 0$, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

c) Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{4}$, $u_1 = \dfrac{1}{16}$.

On a donc $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 1$.

On veut montrer que $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

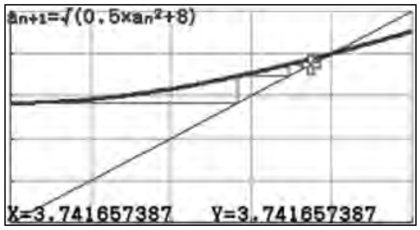
De l'hypothèse de récurrence et comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, alors $f(0) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$,

soit $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

d) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

79 **1. a)** 

b) La suite (u_n) semble croissante et bornée.

c) $u_1 = \sqrt{8}$. .

d) Initialisation : $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{8}$.

On a donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.

On veut montrer que $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.

De l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$,

on déduit $0 \leqslant (u_{k+1})^2 \leqslant (u_k)^2 \leqslant 16$

et $0 \leqslant 0{,}5(u_{k+1})^2 \leqslant 0{,}5(u_k)^2 \leqslant 8$,

$8 \leqslant 0{,}5(u_{k+1})^2 + 8 \leqslant 0{,}5(u_k)^2 + 8 \leqslant 16$

et $\sqrt{8} \leqslant \sqrt{0{,}5(u_{k+1})^2 + 8} \leqslant \sqrt{0{,}5(u_k)^2 + 8} \leqslant 4$

soit $0 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant 4$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

e) La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

2. $v_{n+1} = 0{,}5u_n^2 + 8 - 16 = 0{,}5(u_n^2 - 4) = 0{,}5v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = -16$. Donc $v_n = -16 \times 0{,}5^n$ d'où $u_n = \sqrt{16 - 16 \times 0{,}5^n}$.

Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, $0{,}5^n$ tend

vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

80 **a) Affirmation fausse :** la suite $(n^2 + (-1)^n)$ tends vers $+\infty$ sans être croissante.

b) Affirmation vraie : Si la suite (u_n) n'est pas minorée, pour tout nombre réel A, il existe un rang N tel que pour tout $n > \mathrm{N}$, $u_\mathrm{N} \in]-\infty ; \mathrm{A}[$. La suite (u_n) tend vers $-\infty$.

c) Affirmation fausse : si la suite est majorée elle ne tend pas vers $+\infty$.

d) Affirmation fausse : si la suite est minorée elle ne tend pas vers $-\infty$.

81 **1.** $b_1 = \frac{1}{2}b_0 + 100 = 25$

$a_1 = \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{2}a_0 + 7 = 445.$

2. a) On obtient $A = \frac{25}{2} + \frac{45}{2} + 7 = 42.$

$B = 250.$

Les résultats ne sont pas cohérents car on n'obtient pas a_1.

b) Il suffit d'intervertir les lignes

Affecter à B la valeur $\frac{B}{2} + 10$

et Affecter à A la valeur $\frac{B}{2} + \frac{A}{2} + 7.$

3) Initialisation : $b_0 = 30,\ b_1 = 25.$

On a donc $20 \leqslant b_0 \leqslant b_1$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $20 \leqslant b_{k+1} \leqslant b_k$.

On veut montrer que $20 \leqslant b_{k+2} \leqslant b_{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $20 \leqslant b_{k+1} \leqslant b_k$,

on déduit $\frac{1}{2} \times 20 \leqslant \frac{1}{2} \times b_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \times b_k$,

$\frac{1}{2} \times 20 + 10 \leqslant \frac{1}{2} \times b_{k+1} + 10 \leqslant \frac{1}{2} \times b_k + 10$ d'où

$$10 \leqslant b_{k+2} \leqslant b_{k+1}.$$

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $20 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$.

La suite (b_n) est décroissante et minorée par 20, elle est donc convergente vers un nombre réel $\ell \geqslant 20$.

c) Initialisation : $20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 30 = b_0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $u_k = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On veut montrer que $u_k = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence $u_k = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$,

on déduit $u_{k+1} = \frac{1}{2} \times \left(20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) + 10$

soit $u_{k+1} = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d) Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et $\ell = 20$.

4) a) $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$

pour $n \geqslant 1 + \sqrt{2}$.

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 3$,

$$2n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

b) Initialisation : $2^4 = 16, , 4^2 = 16$, donc $2^4 \geqslant 4^2$.

Hérédité :

On suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 4, ,$ $2^k \geqslant k^2$.

On veut montrer que $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.

De l'hypothèse de récurrence on déduit $2^{k+1} \geqslant 2k^2$

et comme $k \geqslant 4$, $2k^2 \geqslant (k+1)^2$

d'où $2^{k+1} \geqslant (k+1)^2$.

Conclusion :

pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

c) On a donc tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2 > 0$

d'où $0 < \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2}$, soit $0 < 10n \times \frac{1}{2^n} \leqslant 10n \times \frac{1}{n^2}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,

$$0 < 10n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{10}{n}.$$

d) $a_n = 10n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34.$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ la limite de la suite (a_n) est donc 34.

82 **1.** $a_1 = 2400,\ a_2 = 2320$

80 % de renouvellement correspond à un coefficient de 0,8, il y a chaque année 400 nouveaux adhérents.

On a donc $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 400$.

2. a) Initialisation : $a_0 = 2500,\ a_1 = 2400$, donc

$$2000 \leqslant a_0 \leqslant a_1$$

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel $2000 \leqslant a_{k+1} \leqslant a_k$.

On veut montrer que

$2000 \leqslant a_{k+2} \leqslant a_{k+1}$.

De l'hypothèse de récurrence

$2000 \leqslant a_{k+1} \leqslant a_k$,

on déduit

$0{,}8 \times 2000 \leqslant 0{,}8 \times a_{k+1} \leqslant 0{,}8 \times a_k$ et

$0{,}8 \times 2\,000 + 400 \leqslant 0{,}8 \times a_{k+1} + 400 \leqslant 0{,}8 \times a_k + 400$.

Soit $2000 \leqslant a_{k+2} \leqslant a_{k+1}$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $2000 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.

b) La suite (a_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

3. a) Initialisation : $500 \times (0{,}8)^0 + 2000 = 2500 = a_0$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $u_k = 500 \times (0{,}8)^k + 2000$.

On veut montrer que :

$$u_{k+1} = 500 \times (0{,}8)^{k+1} + 2000.$$

De l'hypothèse de récurrence

$$u_k = 500 \times (0{,}8)^k + 2000,$$

on déduit $u_{k+1} = 0{,}8(500 \times (0{,}8)^k + 2000) + 400$
soit $u_{k+1} = 500 \times (0{,}8)^{k+1} + 2000$.

Conclusion :
pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times (0{,}8)^n + 2000$.

b) Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, $(0{,}8)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ la limite de la suite (a_n) est donc 2 000.

c) Si le schéma d'inscription reste le même le nombre d'adhérents se stabilisera à 2 000.

83 **1. a)** $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{x}\right)\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{x}\right)$

$$= \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$$

b)

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	

2) a) Initialisation : $u_0 = \dfrac{3}{2}$, $u_1 = \dfrac{17}{12}$.

On a donc $\sqrt{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $\sqrt{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant \dfrac{3}{2}$.

On veut montrer que $\sqrt{2} \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{17}{12} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

De l'hypothèse de récurrence $\sqrt{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant \dfrac{3}{2}$ et comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{2}\,; +\infty[$, on déduit :

$$f(\sqrt{2}) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)$$

soit $\sqrt{2} \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \dfrac{17}{12} \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Conclusion :
pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3}{2}$.

b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, elle est donc convergente.

c) $u_{n+1} - \sqrt{2} = f(u_n) - \sqrt{2} = f(u_n) - f(\sqrt{2})$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) - \frac{u_n - \sqrt{2}}{\sqrt{2}u_n}$$

Comme $u_n > \sqrt{2}$,, $\dfrac{u_n - \sqrt{2}}{\sqrt{2}u_n} > 0$.

Donc $u_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$

d) Initialisation :
$u_0 - \sqrt{2} = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$, $\dfrac{1}{2^0}\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2}$.

On a donc $0 < u_0 - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2^0}\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $0 < u_k - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2^k}\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$.

Alors d'après la question précédente :
$u_{k+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2}(u_k - \sqrt{2}) \leqslant \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2^k}\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$,

soit $0 < u_{k+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{1}{2^{k+1}}\left(\dfrac{3}{2} - \sqrt{2}\right)$.

Conclusion :
pour tout entier naturel n,

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right).$$

e) D'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

84 **a)** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots$

$$+ \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

soit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n}$ et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)n}$$

$$= \frac{-3n-2}{(2n+1)(2n+2)n}$$

$-3n - 2 < 0$ et $(2n+1)(2n+2)n > 0$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est décroissante.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est convergente.

85 **a)** La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ est telle que $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout nombre entier naturel n.

$f'(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$, la fonction f est croissante sur $]0\,; +\infty[$.

b) Initialisation : $v_0 = 0{,}5$, $v_1 = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

On a donc $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant 2$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $0 \leqslant v_k \leqslant v_{k+1} \leqslant 2$.

Comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{2}\,; +\infty[$,, $f(0) \leqslant f(v_{k+1}) \leqslant f(v_k) \leqslant f(2)$

soit $0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant \dfrac{4\sqrt{5}}{5} \leqslant 2$.

Conclusion :
pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$.

c) La suite (v_n) est croissante et majorée, elle est convergente vers un nombre réel $0 \leqslant \ell \leqslant 2$.

d) Comme la suite (v_n) converge, à partir d'un certain rang $f(\ell) = \ell$. Soit $\ell = \sqrt{3}$.

86 **a) Affirmation fausse.** En effet si $u_n = \dfrac{1}{n}$ alors $v_n = -2n$. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

b) Proposition vraie.

Pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n$ donc $\dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $-\dfrac{2}{u_n} \geqslant -1$, c'est-à-dire $v_n \geqslant -1$.

c) Proposition fausse.

La suite $(1/n)$ est décroissante et $v_n = -\dfrac{2}{\dfrac{1}{n}} = -2n$.

La suite (v_n) est donc décroissante.

d) Proposition fausse.

La suite (u_n) telle que $u_n = (-1)^n$ est divergente.

$$v_n = -\frac{2}{(-1)^n} = -2(-1)^{-n}.$$

La suite (v_n) est donc également divergente.

87 **a) Si P, alors Q est vraie.**

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Si Q, alors P est fausse.

La suite (u_n) définie pour tout entier $n > 0$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$ est convergente et n'est pas croissante.

b) Si P, alors Q est vraie.

On utilise un raisonnement par l'absurde :

si la suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ, alors pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$.

C'est impossible puisque la suite (u_n) n'est pas majorée.

Si Q, alors P est fausse.

La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n + n$ n'est pas croissante.

c) Si P, alors Q est fausse.

La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n n$ n'est pas majorée et n'a pas de limite.

Si Q, alors P est vraie.

Dire que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que pour tout réel $A > 0$, il existe un rang p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n > A$.

88 **1. a)** Les suites $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $(0{,}7^n)$ et $(0{,}3^n)$ convergent vers 0.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Seuil	0,0001					
2							
3	n	1/n²	Seuil atteint	0,7ⁿ	Seuil atteint	0,3ⁿ	Seuil atteint
4	1	1	FAUX	0,7	FAUX	0,3	FAUX
5	2	0,25	FAUX	0,49	FAUX	0,09	FAUX
6	3	0,11111111	FAUX	0,343	FAUX	0,027	FAUX
7	4	0,0625	FAUX	0,2401	FAUX	0,0081	FAUX
8	5	0,04	FAUX	0,16807	FAUX	0,00243	FAUX

b) Pour $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, on trouve $n = 32$.

Pour $(0{,}7^n)$, on trouve $n = 20$.

La suite qui semble converger le moins rapidement vers 0 est $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

2. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{\dfrac{1}{(n+1)^2} - 0}{\dfrac{1}{n^2} - 0} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^2 = 1$.

La suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ a une convergence lente car $k = 1$.

b) $\dfrac{0{,}7^{n+1} - 0}{0{,}7^n - 0} = 0{,}7$.

$0 < 0{,}7 < 1$ donc la suite $(0{,}7^n)$ a pour vitesse de convergence 0,7.

$\dfrac{0{,}3^{n+1} - 0}{0{,}3^n - 0} = 0{,}3$.

$0 < 0{,}3 < 1$, donc la suite $(0{,}3^n)$ a pour vitesse de convergence 0,3.

$0{,}3 < 0{,}7 < 1$, donc la suite $(0{,}3^n)$ tend plus rapidement vers 0 que la suite $(0{,}7^n)$ qui tend plus rapidement vers 0 que la suite $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3. a) Initialisation :

$u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{3}$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$.

Hérédité :

La fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout nombre entier naturel n.

Elle est croissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

On suppose que pour un entier naturel k,

$$0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2.$$

On veut montrer que $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2$.

D'après l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant (2)$ soit

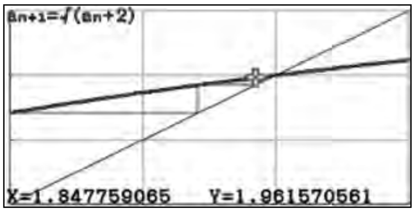
$$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2.$$

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, elle converge vers un nombre réel $\ell \leqslant 2$.

b)



La suite (u_n) converge vers 2.

$$\frac{\sqrt{u_n+2}-2}{u_n-2}=\frac{u_n-2}{(u_n-2)(v)}=\frac{1}{(\sqrt{u_n+2}+2)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n+2}+2=4$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{1}{\sqrt{u_n+2}+2}\right|=\dfrac{1}{4}.$

La vitesse de convergence de la suite (u_n) est $\dfrac{1}{4}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4u_{n+1}-u_n}{3}=2.$

d)

	A	B	C	D	E
2					
3	n	u	Seuil atteint	v	Seuil atteint
4	0	1	FAUX	1,976068	FAUX
5	1	1,732051	FAUX	1,998452	FAUX
6	2	1,931852	FAUX	1,999902	VRAI
7	3	1,98289	FAUX	1,999994	VRAI
8	4	1,995718	FAUX	2	VRAI
9	5	1,998929	FAUX	2	VRAI
10	6	1,999732	VRAI	2	VRAI

La suite (u_n) converge moins vite que la suite (v_n).

89 **a)** $f'(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}>0$ sur $[0\,;2]$.

La fonction f est donc croissante sur $[0\,;2]$.

Donc si $0\leqslant x\leqslant 2$, alors $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(2)$,

c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 2$ donc $0\leqslant f(x)\leqslant 2$.

b) Initialisation : $u_0=\dfrac{1}{2}$, donc $u_0\in[0\,;2]$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $u_k\in[0\,;2]$.

On veut démontrer $u_{k+1}\in[0\,;2]$.

D'après l'hypothèse de récurrence $u_k\in[0\,;2]$, on déduit $f(u_k)\in[0\,;2]$ soit $u_{k+1}\in[0\,;2]$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n\in[0\,;2]$.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{8}u_n^2-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{8}(u_n^2-4u_n+4)$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{8}(u_n-2)^2\geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 2, elle converge vers un nombre réel $\ell\leqslant 2$.

90 **a)** La fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ est telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout nombre entier naturel n.

$$f'(x)=\frac{1}{(2-x)}>0,$$

la fonction f est croissante sur $[0\,;+\,1]$.

Initialisation : $u_0=0,\ u_1=\dfrac{1}{2}$ donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 1$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k,

$$0\leqslant u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant 1.$$

On veut montrer que $0\leqslant u_{k+1}\leqslant u_{k+2}\leqslant 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence $0\leqslant u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant 1$, on déduit $f(0)\leqslant f(u_k)\leqslant f(u_{k+1})\leqslant f(1)$ soit $0\leqslant u_{k+1}\leqslant u_{k+2}\leqslant 1$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, elle converge vers un nombre réel $\ell\leqslant 1$.

b) $u_0=0,\ u_1=\dfrac{1}{2},\ u_2=\dfrac{2}{3}$,

il semble que $u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

Initialisation : $\dfrac{0}{0+1}=0=u_0$,

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $u_k=\dfrac{k}{k+1}$, on veut démontrer que $u_{k+1}=\dfrac{k+1}{k+2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence $u_k=\dfrac{k}{k+1}$,

on déduit $u_{k+1}=\dfrac{1}{2-\left(\dfrac{k}{k+1}\right)}=\dfrac{1}{\dfrac{k+2}{k+1}}=\dfrac{k+1}{k+2}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{n}{n+1}$.

pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}$,

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, la suite (u_n) a pour limite 1.

91 Pour obtenir u_{n+1}, on ajoute à u_n un nombre décimal positif. La suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant 0{,}2$.

La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

92 **a)** Pour tout nombre réel de l'intervalle $\mathrm{I}=[1\,;2]$, $f'(x)=\dfrac{2}{(x+2)^2}>0$, la fonction f est croissante sur I.

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$\dfrac{1}{3}$

b) Initialisation : $u_0=1$, donc $u_0\in[0\,;1]$.

Hérédité :

on suppose que pour un entier naturel k, $0\leqslant u_k\leqslant 1$.

On veut démontrer $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant u_k \leqslant 1$,

on déduit $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$ soit $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{1}{3}$

d'où $0 \leqslant u_{k+1} \leqslant 1$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \in [0\,;1]$. .

c) La suite (U_n) est décroissante et minorée : elle est convergente.

93 **a)** La fonction f définie sur $[0\ ;\ +\ \infty[$ par $f(x) = \frac{n}{2(n+1)}x + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout nombre entier naturel n.

Comme $n \geqslant 1$, $\frac{n}{2(n+1)} > 0$.

La fonction f est croissante.

Initialisation : $u_0 = -1$, $u_1 = 2$ donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k,

$$u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 3.$$

Alors $f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(3)$ soit $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 3$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

La suite (u_n) est croissante et majorée elle est donc convergente.

b) $v_{n+1} = (n+1)\left(3 - \frac{n}{2(n+1)}u_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)$ soit

$v_{n+1} = (n+1)\left(\frac{6(n+1)}{2(n+1)} - \frac{n}{2(n+1)}u_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)$ et

$v_{n+1} = (n+1)\left(\frac{3n}{2(n+1)} - \frac{n}{2(n+1)}u_n\right) = \left(\frac{3n}{2} - \frac{n}{2}u_n\right)$

On a donc $v_{n+1} = \frac{n}{2}(3 - u_n) = \frac{1}{2}v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = 4$. Donc pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ et } u_n = 3 - \frac{4}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

c) La suite (u_n) converge vers 3.

94 **a)** P(n) est la proposition :

• 1[re] étape (initialisation)

$u_0 = -1$ et $4 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = -1$ donc P(0) est vraie.

• 2[e] étape (hérédité)

On considère un nombre entier naturel k pour lequel, $u_k = 4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^k$, (hypothèse de récurrence), et on montre qu'alors $u_{k+1} = 4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

De $u_{k+1} = \frac{u_k}{2} + 2$, on obtient $u_{k+1} = \frac{1}{2}\left[4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] + 2$

$u_{k+1} = 4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$.

• Conclusion : pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$S_n = 4 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 4 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \ldots + 4 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$S_n = 4(n+1) - \frac{5}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$S_n = 4n + 4 - \frac{5}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

$S_n = 4n + 4 - 5\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

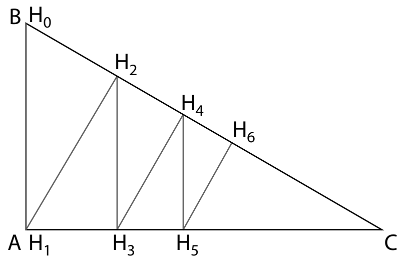
$\frac{S_n}{n} = 4 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S}{n} = 0$

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 4$.

95 **a)**



b) Dans le triangle rectangle ABC, $\cos\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$ donc $\widehat{ABC} = 60°$.

L'angle $\widehat{ACB}$ est complémentaire de l'angle $\widehat{ABC}$ donc $\widehat{ACB} = 30°$.

c) Initialisation :

Dans le triangle $H_0H_1H_2$, $\widehat{H_1H_0H_2} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{H_0H_1H_2} = \widehat{ACB}$.

Les angles du triangle $H_0H_1H_2$ ont même mesure que ceux du triangle ABC.

Hérédité :

On suppose que pour un entier naturel k,

Les angles du triangle $H_kH_{k+1}H_{k+2}$ ont même mesure que ceux du triangle ABC.

Les droites (H_kH_{k+1}) et $(H_{k+2}H_{k+3})$ sont parallèles coupées par la sécante $(H_{k+1}H_{k+2})$.

Les angles $\widehat{H_kH_{k+1}H_{k+2}}$ et $\widehat{H_{k+1}H_{k+2}H_{k+3}}$ sont en position d'alternes internes et ont donc même mesure de même que les angles qui leur sont opposés dans le triangle $H_{k+1}H_{k+2}H_{k+3}$.

Par conséquent les angles du triangle $H_{k+1}H_{k+2}H_{k+3}$ ont même mesure que ceux du triangle $H_kH_{k+1}H_{k+2}$ et du triangle ABC.

Conclusion : pour tout entier naturel n, les angles du triangle $H_nH_{n+1}H_{n+2}$ ont les mêmes mesures que ceux du triangle ABC.

d) Pour tout entier naturel n impair, $\dfrac{l_{n+1}}{l_n} = \sin(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour tout entier naturel n pair, $\dfrac{l_{n+1}}{l_n} = \sin(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $l_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} l_n$.

e) La suite (l_n) des longueurs est géométrique de premier terme $l_0 = 4$ et de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $L_n = 4\left(\dfrac{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right)$.

Comme $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 16 + 8\sqrt{3}$.

Objectif BAC

96 **1. a)**

```
from math import*
def T(n):
    T=0.9
    for i in range(1,n):
        T=T-0.1*T**2
    return T
```

b)

Année	2018	2019	2020	2023	2028	2033	2038
n	0	1	2	5	10	15	20
T_n	0,9	0,819	0,752	0,647	0,459	0,370	0,310

2. Le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,105 en 2028.

3. a) $f'(x) = 1 - 0{,}2x > 0$ pour tout $x \in [0\,;+1]$, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+1]$.

b) Initialisation :

$T_0 = 0{,}9$, $T_1 = 0{,}819$ donc $0 \leqslant T_1 \leqslant T_0 \leqslant 1$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k,

$$0 \leqslant T_{k+1} \leqslant T_k \leqslant 1.$$

Alors, comme f est croissante $f(T_k) \leqslant f(T_{k+1}) \leqslant f(1)$ soit : $0 \leqslant T_{k+2} \leqslant T_{k+1} \leqslant 0{,}9$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n \leqslant 1$.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée elle est donc convergente.

4. a)

```
Tant que T ⩾ 0,2
    n ← n+1
    T ← T − 0,1T²
Fin tant que
```

b) À la calculatrice on obtient $n = 38$.

97 **Partie A. 1.** `=2/3*B2+1/2*C2+2/3*D2`

2. Il semble que la probabilité de la présence du lapin dans la galerie C est la plus grande.

Partie B.

1. a) $u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n - \dfrac{1}{4}b_n - \dfrac{1}{3}c_n$ d'où $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n$.

La suite (a_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) $u_n = 1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

2. Le lapin est dans une des trois galeries, donc comme la somme des probabilités est égale à 1 $a_n + b_n + c_n = 1$.

$v_{n+1} = b_{n+1} - \dfrac{4}{7} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{2}{3}c_n - \dfrac{4}{7}$ soit

$v_{n+1} = \dfrac{2}{3}(a_n + c_n) + \dfrac{1}{2}b_n - \dfrac{4}{7} = \dfrac{2}{3}(1 - b_n) + \dfrac{1}{2}b_n - \dfrac{4}{7}$

et $v_{n+1} = -\dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{2}{21} = -\dfrac{1}{6}\left(b_n - \dfrac{4}{7}\right) = -\dfrac{1}{6}v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = -\dfrac{4}{7}$. $v_n = -\dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$.

3. On a vu que, pour tout n, $b_n = v_n + \dfrac{4}{7}$ et que $v_n = -\dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$.

On en déduit que $b_n = \dfrac{4}{7} - \dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$.

On a vu précédemment que $a_n + c_n = 1 - b_n$.

On en déduit que $a_n + c_n = 1 - \left(\dfrac{4}{7} - \dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right)$

soit $a_n + c_n = 1 - \dfrac{4}{7} + \dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n = \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$.

On a vu aussi que, pour tout n, $u_n = a_n - c_n$ et que $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, on en déduit que $a_n - c_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

a_n et c_n sont les solutions du système :

$$\begin{cases} a_n + c_n = \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n \\ a_n - c_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_n = \dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ c_n = a_n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{14} + \dfrac{2}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ c_n = \dfrac{3}{14} + \dfrac{2}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{3}{14} + \dfrac{2}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ c_n = \dfrac{3}{14} + \dfrac{2}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \end{cases}.$$

4. La position du lapin après un très grand nombre d'étapes est donnée par les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

$-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$; $-1 < \dfrac{1}{6} < 1$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n = 0$.

On en déduit que

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{3}{14}$,, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{4}{7}$

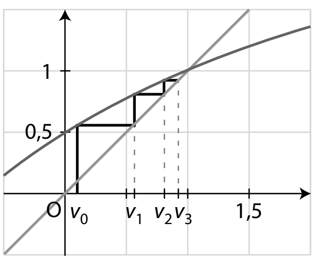
et $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \dfrac{3}{14}$.

La probabilité qu'après un très grand nombre d'étapes, le lapin

- se trouve dans la galerie A tend vers $\dfrac{3}{14}$
- se trouve dans la galerie B tend vers $\dfrac{4}{7}$
- se trouve dans la galerie C tend vers $\dfrac{3}{14}$

98 **1.** $f'(x) = \dfrac{10}{(x+4)^2} > 0$, la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+2]$.

2. a.



b. La suite (v_n) semble croissante et converger vers 1.

3. a. Initialisation :

$v_0 = 0{,}1$, $v_1 = 0{,}56$ donc $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant 1$

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k,

$$0 \leqslant v_k \leqslant v_{k+1} \leqslant 1.$$

On veut prouver que $0{,}5 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant v_k \leqslant v_{k+1} \leqslant 1$, on déduit $0 \leqslant f(v_k) \leqslant f(v_{k+1}) \leqslant f(1)$

soit $0{,}5 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 1$

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$.

b) La suite (v_n) est croissante et majorée elle est donc convergente.

99 **a)** Pour montrer qu'une suite (u_n) est majorée (minorée) par $\mathrm{M}(m)$ on peut :

(1) Démontrer $\mathrm{M} - u_n \geqslant 0$ $(u_n - m \geqslant 0)$.

(2) Utiliser un raisonnement par récurrence.

b) pour (1) exemple exercice 31, pour (2) exemples exercices 4, 33, 65.

100 **Initialisation** : $\dfrac{2^0}{1+2^0} = \dfrac{1}{2} = u_0$,

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k,

$$u_k = \frac{2^k}{1+2^k}$$

alors $u_{k+1} = \dfrac{2u_k}{1+u_k} = \dfrac{2\dfrac{2^k}{1+2^k}}{1+\dfrac{2^k}{1+2^k}} = \dfrac{2^{k+1}}{1+2^{k+1}}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

On affecte à n une valeur entière positive ou nulle	On affecte à u la valeur 0,5
$u \leftarrow \dfrac{2^n}{1+2^n}$	Pour i de 0 à n $u \leftarrow \dfrac{2u}{1+u}$

```
from math import*
def u(n):
    u=2**n/(1+2**n)
    return u
```

```
from math import*
def u(n):
    u=0.5
    for i in range(0,n):
        u=2*u/(1+u)
    return u
```

101 **a. Affirmation fausse.**

La fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 4x + 4$ telle que $u_n = f(n)$ n'est pas monotone.

b. Affirmation vraie.

La suite (u_n) est croissante et majorée elle est donc convergente.

c. Affirmation fausse.

Comme $5 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(5)^n = +\infty$.

La suite(v_n) tend vers $+\infty$.

Pour aller plus loin

102 Partie A. 1.

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n)$$
$$= (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$$

Comme la suite (v_n) est décroissante, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.

Comme la suite (u_n) est croissante, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Donc $w_{n+1} - w_n \leqslant 0$.

2. La suite (w_n) est donc décroissante.

Elle converge vers 0 donc $w_n > 0$.

3. Pour tout entier n, $v_n - u_n \geqslant 0$ donc $v_n \geqslant u_n$.

4. La suite (v_n) est décroissante $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

La suite (u_n) est croissante $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. La suite (v_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

5. On pose $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell'$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ donc $\ell - \ell' = 0$ soit $\ell = \ell'$.

Les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

Partie B. 1.

$$w_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n + 4v_n - 3u_n - 3v_n}{6}$$

soit $w_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{6} = \dfrac{1}{6} w_n$.

La suite (w_n) est géométrique de premier terme 12 et de raison $\dfrac{1}{6}$.

Elle est donc décroissante.

$$w_n = 12\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

La suite (w_n)converge vers 0. Ses termes sont positifs.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{3} - u_n = \dfrac{1}{3}(v_n - u_n) = \dfrac{1}{3} w_n \geqslant 0$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = -\frac{2}{3} w_n \leqslant 0.$$

La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante.

3. Les suites (u_n) et (v_n) ont des croissances contraires et la limite de la suite $(v_n - u_n)$ est nulle.

Elles sont donc adjacentes.

4. a.

Tant que $v - u > 10^{-n}$
- $u \leftarrow \dfrac{u + v}{3}$
- $v \leftarrow \dfrac{u + 2v}{3}$

Fin tant que

```
from math import*
def encadrement(n):
    u=0
    v=12
    i=0
    while v-u>10**(-n):
        i=i+1
        u=(u+v)/3
        v=(u+2*v)/3
    print(u,"<l<",v,"au rang",i)
```

```
>>> encadrement(6)
1.7629732344751552e-06 <l< 2.730111738478245e-06
au rang 93
```

103 a) $u_2 = 52$, $u_3 = 200$, $u_4 = 3104$ et $u_5 = 12352$.

b) Dire que (r_n) satisfait à la relation (1) signifie que $r^{n+2} - 6r^{n+1} + 8r^n = 0$ soit $r^2 - 6r + 8 = 0$.

Soit $r_1 = 2$ et $r_2 = 4$.

c) $v_n = \mathrm{A} \times 2^n + \mathrm{B} \times 4^n$, , $v_{n+1} = \mathrm{A} \times 2^{n+1} + \mathrm{B} \times 4^{n+1}$,

$6(\mathrm{A} \times 2^{n+1} + \mathrm{B} \times 4^{n+1}) - 8(\mathrm{A} \times 2^n + \mathrm{B} \times 4^n) =$

$3\mathrm{A} \times 2^{n+2} + 6\mathrm{B} \times 4^{n+1} - 2\mathrm{A} \times 2^{n+2} - 2\mathrm{B} \times 4^{n+1} =$

$\mathrm{A} \times 2^{n+2} + \mathrm{B} \times 4^{n+2} = v_{n+2}$.

d) Les nombres A et B sont solution du système $\begin{cases} \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0 \\ 2\mathrm{A} + 4\mathrm{B} = 14 \end{cases}$

soit $\mathrm{A} = -7$ et $\mathrm{B} = 7$.

e) $u_n = -7 \times 2^n + 7 \times 4^n = 2^n(-7 + 2^n)$.

Comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

104 a) $u_2 = 8$, $u_3 = 28$, $u_4 = 80$ et $u_5 = 208$.

b) Dire que (r_n) satisfait à la relation (1) signifie que $r^{n+2} - 4r^{n+1} + 4r^n = 0$

soit $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$.

Soit $r_1 = 2$.

c) $v_n = (\mathrm{A}n + \mathrm{B}) \times 2^n$, $v_{n+1} = (\mathrm{A}(n+1) + \mathrm{B}) \times 2^{n+1}$,

$4(\mathrm{A}(n+1) + \mathrm{B}) \times 2^{n+1} - 4(\mathrm{A}n + \mathrm{B}) \times 2^n$

$= 2(\mathrm{A}(n+1) + \mathrm{B}) \times 2^{n+2} - (\mathrm{A}n + \mathrm{B}) \times 2^{n+2}$

$= (2(\mathrm{A}(n+1) + \mathrm{B}) - (\mathrm{A}n + \mathrm{B})) \times 2^{n+2}$

$= (2\mathrm{A}n + 2\mathrm{A} + 2\mathrm{B} - \mathrm{A}n - \mathrm{B}) \times 2^{n+2}$

$= (\mathrm{A}(n+2) + \mathrm{B}) \times 2^{n+2} = v_{n+2}$.

d) $v_0 = B = -1$ et $v_1 = 1 = 2(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ donc $\mathrm{A} = \dfrac{3}{2}$ et $\mathrm{B} = -1$, soit $u_n = (1{,}5n - 1) \times 2^n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

105 Partie A. 1. $u_{n+1}^2 = \dfrac{1}{4}\left(u_n^2 + 2a + \dfrac{a^2}{u_n^2}\right)$, soit

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(u_n^2 + 2a + \frac{a^2}{u_n^2} - 4a\right), \text{ soit}$$

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^4 - 2au_n^2 + a^2}{u_n^2}\right) = \frac{1}{4u_n^2}\left(u_n^2 - a\right)^2.$$

2. Pour tout entier n, $u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4u_n^2}(u_n^2 - a)^2 \geq 0$,

donc $u_{n+1}^2 \geqslant a$ soit $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.

Comme u_0 est fixé par l'énoncé on peut dire que pour tout $n \geqslant 1$, , $u_n \geqslant \sqrt{a}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right).$$

Comme $u_n \geqslant \sqrt{a}$, on a $\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{u_n^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(1+1)$, soit $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$, elle converge donc vers un nombre $\ell \geqslant \sqrt{a}$.

Partie B. 1. La suite (u_n) est décroissante et converge donc vers un nombre $\ell \geqslant \sqrt{a}$.

On choisit pour $u \geqslant 0$ un entier plus grand que $\sqrt{a}$.

Il est habile de choisir pour u, le plus petit entier supérieur ou égal à $\sqrt{a}$.

2. On obtient un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-6} en cinq étapes.

3.

Nombre de décimales exactes	Nombre d'étapes
1	
2	3
3	4
5	4
10	5
15	6

La suite converge très rapidement.

106 **a) Faux.** Contre-exemple, $u_0 = 2500$ et $q = 0{,}85$ ($u_0 > 2000$ et $u_1 > 2000$)

b) Vrai. Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et l'intervalle $\left]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right[$ contient 0 donc il contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Par ailleurs, pour tout n, $u_n = 1 \times q^n$ donc $u_n > 0$.

c) Vrai. Pour tout n, $u_n = q^n$ et $S_n = 1 + q + \ldots + q^n$

soit $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

$q > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

d) Vrai. Si $q = 1$, alors pour tout n, $u_n = 1$ et $S_n = n + 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

On a donc $q \neq 1$ et pour tout n, $S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ donc la suite (S_n) converge si, et seulement si la suite (q^{n+1}) converge soit, si, et seulement si, $0 < q < 1$.

Dans ce cas, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\frac{1}{q-1}$.

L'égalité $-\frac{1}{q-1} = 2$ donne $q = \frac{1}{2}$.

107 **1. a)** f est croissante et $u_1 \geqslant u_0$.

Par conséquent si on suppose qu'il existe un entier naturel k, tel que $u_{k+1} \geqslant u_k$ alors $f(u_{k+1}) \geqslant f(u_k)$ et donc pour tout entier n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

La suite (u_n) est croissante.

b) De même on démontre que la suite (u_n) est décroissante.

c) Deux termes successifs u_{k+1} et u_k de la suite (u_n) se rangent dans le sens inverse de u_{k+1} et u_k.

La suite n'est ni croissante ni décroissante.

d) Il en est de même que pour la suite de la question précédente.

2. La fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$ est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant 1$.

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

$u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{2}$ donc $u_0 < u_1$.

La suite (u_n) est croissante.

108 $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ la suite (u_n) est croissante.

$n!$ est le produit de $n - 1$ facteurs supérieurs ou égaux à 2.

On a donc $n! \leqslant 2^{n-1}$ et $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

On en déduit que $u_n \leqslant 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}}$, on a donc

$$u_n \leqslant 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Soit $u_n \leqslant 3$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, elle est donc convergente.

109 On a $0 < u_{n+1} \leqslant 2 - \frac{1}{u_n}$ (1) donc

$u_{n+1} - u_n \leqslant 2 - \frac{1}{u_n} - u_n$ soit

$u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n}$ et

$u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n} \leqslant 0$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle est donc convergente vers un nombre réel $\ell \geqslant 0$.

On a donc $0 < 2 - \frac{1}{\ell}$ soit $\ell > \frac{1}{2}$.

L'inégalité (1) entraîne $\ell \leqslant 2 - \frac{1}{\ell}$ et comme $\ell > 0$, ,

$\ell^2 - 2\ell + 1 \leqslant 0$ soit $(\ell - 1)^2 \leqslant 0$ d'où $\ell = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

8 Limites des fonctions

Questions-Tests

1 **a) (3)** En effet, $u_n \geqslant 1\,000$ équivaut à $n^2 \geqslant 1\,000$ c'est-à-dire $n \geqslant \sqrt{1000}$ (car $n \geqslant 0$).
Or $\sqrt{1000} \approx 31{,}6$. Donc le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 1\,000$ est 32.
b) (2) Pour tout entier $n > 10^{50}$, $n^2 > 10^{100}$ c'est-à-dire $u_n \in]10^{100}\,;+\infty[$.
c) (2) En effet, pour tout réel $A > 0$, $u_n \in]A\,;+\infty[$ pour tout entier $n > \sqrt{A}$.

2 **a) (2)** En effet, $3 \leqslant u_n \leqslant 3{,}01$ équivaut à $3 \leqslant 3 + \dfrac{1}{n} \leqslant 3{,}01$ c'est-à-dire $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 0{,}01$ soit $n \geqslant 100$.
Donc le plus petit entier naturel n tel que $3 \leqslant u_n \leqslant 3{,}01$ est 100.
b) (3) En effet pour tout entier $n \geqslant 10^6$, $3 \leqslant u_n \leqslant 3 + 10^{-6}$.
c) (2) En effet, pour tout réel $A > 0$, $u_n \in]3\,;3 + A[$ pour tout entier $n > \dfrac{1}{A}$.

3 **(2)** En effet, $f(x) = e^{3x}\left(\dfrac{1}{e^{-x}} - 2e^{-2x}\right)$
$f(x) = e^{3x}(e^x - 2e^{-2x})$
$f(x) = e^{3x+x} - 2e^{3x-2x}$
$f(x) = e^{4x} - 2e^x$

4 **(3)** En effet, pour tout nombre réel x :
$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$;
c'est-à-dire $g'(x) = (x+1)e^x$.

5 **a) (3)** En effet pour tout réel x : $\cos(x) \leqslant 1$. Ainsi, $3 + \cos(x) \leqslant 4$ et $x^2 + 1 > 0$. Donc $f(x) \leqslant \dfrac{4}{x^2+1}$.
b) (1) En effet pour tout nombre réel x : $-1 \leqslant \cos(x)$. Ainsi, $2 \leqslant 3 + \cos(x)$ et $x^2 + 1 > 0$.
Donc $\dfrac{2}{x^2+1} \leqslant f(x)$.

Découvrir

1 Fonction de limite réelle en $+\infty$

1 **a)** Pour tout réel $x > 0$: $f(x) = \dfrac{4}{x}$.
b) Lorsque x prend de grandes valeurs $f(x)$ se rapproche de 0 en restant positive.

2 **a)** La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $0 < \dfrac{4}{x} < 0{,}01$ équivaut à $\dfrac{x}{4} > \dfrac{1}{0{,}01}$ c'est-à-dire $x > 4 \times 100$ soit $x > 400$.
b) • $f(x) \in]0\,;0{,}001[$ équivaut à $0 < f(x) < 0{,}001$ c'est-à-dire $0 < \dfrac{4}{x} < 0{,}001$ soit $x > 4\,000$.
Pour tout réel $x > 4\,000$, $f(x) \in]0\,;0{,}001[$.
• $f(x) \in]0\,;0{,}000\,1[$ équivaut à $0 < f(x) < 0{,}000\,1$ c'est-à-dire $0 < \dfrac{4}{x} < 0{,}0001$ soit $x > 40\,000$.
Pour tout réel $x > 40\,000$, $f(x) \in]0\,;0{,}000\,1[$.
• $f(x) \in]0\,;10^{-6}[$ équivaut à $0 < f(x) < 10^{-6}$ c'est-à-dire $0 < \dfrac{4}{x} < 10^{-6}$, soit $x > 4 \times 10^6$.
Pour tout réel $x > 4 \times 10^6$, $f(x) \in]0 : 10^{-6}[$.
c) $f(x) \in]0\,;a[$ équivaut à $0 < f(x) < a$ c'est-à-dire $0 < x < a$ soit $x > \dfrac{4}{a}$.
Pour tout réel $x > \dfrac{4}{a}$, $f(x) \in]0\,;a[$.

2 Fonction de limite $+\infty$ en un réel

1 **a)** Pour tout nombre réel $x > 1$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sont $(x-1\,;-2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AN}$ sont $(-1\,;g(x)-2)$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires donc $(x-1) \times (g(x)-2) - (-2) \times (-1) = 0$.

C'est-à-dire $(x-1) \times g(x) = 2(x-1)+2$ soit $g(x) = \dfrac{2x}{x-1}$.

b) Lorsque x se rapproche de 1, $g(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes.

c) • Pour tout réel $x \in \,]1\,;1{,}25[$, $g(x) \in \,]10\,;+\infty[$.

1.21	11.52381
1.22	11.09091
1.23	10.69565
1.24	10.33333
1.25	10
1.26	9.692308

• Pour tout réel $x \in \,]1\,;1{,}02[$, $g(x) \in \,]100\,;+\infty[$.

1.016	127
1.017	119.6471
1.018	113.1111
1.019	107.2632
1.02	102
1.021	97.2381

• Pour tout réel $x \in \,]1\,;1{,}0002[$, $g(x) \in \,]10^4\,;+\infty[$.

1.00016	12502
1.00017	11765.71
1.00018	11113.11
1.00019	10528.32
1.0002	10002
1.00021	9525.81

Savoir-faire

3 **a)** $f(x) > 100$ équivaut à $\sqrt{x}+2 > 100$ c'est-à-dire $\sqrt{x} > 98$.

La fonction carré étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $\sqrt{x} > 98$ équivaut à $x > 98^2$ soit $x > 9\,604$.

b) $f(x)$ appartient à l'intervalle $]A\,;+\infty[$ équivaut à $\sqrt{x}+2 > A$ c'est-à-dire $\sqrt{x} > A-2$.

La fonction carré étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, $\sqrt{x} > A-2$ équivaut à $x > (A-2)^2$.

Ainsi l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout réel $x > (A-2)^2$.

c) On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

4 **a)** $g(x)$ appartient à l'intervalle $]1\,;\alpha[$ équivaut à $1 < \dfrac{1}{x}+1 < \alpha$ c'est-à-dire $0 < \dfrac{1}{x} < \alpha - 1$.

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$, $0 < \dfrac{1}{x} < \alpha-1$ équivaut à $x > \dfrac{1}{\alpha-1}$.

Ainsi, l'intervalle $]1\,;\alpha[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour tout réel $x > \dfrac{1}{\alpha-1}$.

b) On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

c) La droite d d'équation $y = 1$, est une asymptote horizontale en $+\infty$ à $\mathscr{C}$.

7 D'après l'écran de calcul formel, pour tout réel $A > 0$, $f(x) > A$ équivaut à $2 < x < \dfrac{2A+1}{A}$ c'est-à-dire $2 < x < 2+\dfrac{1}{A}$.

Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout réel $x > 2$ et x assez proche de 2. Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$.

8 L'intervalle $J = \,]2{,}5\,;3{,}5[$ de centre 3, ne contient pas toutes les valeurs $g(x)$ lorsque x est proche de 2. En effet, J ne contient pas l'image 1 des nombres proches de 2 mais supérieures à 2.

b) Graphiquement, on lit que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} g(x) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = 1$.

11 Pour tout nombre réel x, $\cos(x) \leqslant 1$ et alors $-4\cos(x) \geqslant -4$. Donc $f(x) \geqslant 5x-4$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x-4) = +\infty$, donc d'après un théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

12 **a)** On peut conjecturer que :

• la limite de h en $+\infty$ semble être $-\infty$;

• la limite de h en $-\infty$ semble être $-\infty$;

b) Pour tout nombre réel x : $2\sin(x) \leqslant 2$, donc $h(x) \leqslant 2 - x^2$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x^2) = -\infty$, donc d'après un théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x^2) = -\infty$, donc d'après un théorème de comparaison : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

13 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$: $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

Or pour tout nombre réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $-\dfrac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

14 Pour tout nombre réel $x < -1$:

$1 - \dfrac{1}{x} \leqslant 3 - 2h(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x}$

donc $-2 - \dfrac{1}{x} \leqslant -2h(x) \leqslant -2 + \dfrac{1}{x}$

et alors $1 - \dfrac{1}{2x} \leqslant h(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2x}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2x}\right)=0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)=1$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)=1$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=1$.

17 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^4)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x)=+\infty$, donc FI « $\infty-\infty$ ».

b) Pour tout nombre réel $x\neq 0$:

$$f(x)=x^4\left(-1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right).$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}=0$ donc, d'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)=-1$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$.

Donc d'après la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

18 **a)** Pour tout réel $x>0$,

$$f(x)=\frac{4x\left(1+\dfrac{5}{4x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=4\times\frac{1+\dfrac{5}{4x}}{1+\dfrac{1}{x}}.$$

D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{5}{4x}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$.

b) $\lim\limits_{x\to-1}(4x+5)=1$ et $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ avec $x+1>0$ (car $x>-1$).

Donc, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$.

21 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.

Donc, d'après le résultat de l'exercice 19, pour tout réel x, $f'(x)\geqslant 0$ et la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$f(0)=0$ donc f est négative sur $]-\infty\,;0[$ et f est positive sur $]0\,;+\infty[$.

22 **a)** Pour tout réel $x\neq 0$,

$$h(x)=x^2\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right).$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)=+\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}-1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)=+\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$ donc d'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

b) Pour tout réel $x\neq 0$,

$$h(x)=\mathrm{e}^x+x^2\left(-1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right).$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\dfrac{2}{x}+x\right)=-1$.

D'après la limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(-1+\dfrac{2}{x}+x\right)=-\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ donc d'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$.

24 **1.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=-\,\mathrm{e}^x$.

Pour tout réel x, $f'(x)<0$ et la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. a)

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	$1-\mathrm{e}$	$1-\mathrm{e}^2$	$1-\mathrm{e}^3$	$1-\mathrm{e}^4$	$1-\mathrm{e}^5$
$f(x)<\mathrm{A}$	Faux	Faux	Faux	Faux	Faux	Vrai

Le plus petit entier naturel n tel que $f(n)<-100$ est 5.

f est décroissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel $x>5$, $f(x)<-100$.

b) On est certain que l'algorithme se termine.

En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ donc pour tout réel négatif A, l'intervalle $]-\infty\,;\mathrm{A}[$ contient tous les nombres $f(x)$ pour x assez grand.

25 a fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $g'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

Pour tout réel $x>0$, $g'(x)<0$ et la fonction g est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

2. a)

x	1	2	3	4
$g(x)$	3	$\dfrac{9}{4}$	$\dfrac{19}{9}$	$\dfrac{33}{16}$
$g(x)<2{,}1$	Faux	Faux	Faux	Vrai

Le plus petit entier naturel n tel que $g(n)<2{,}1$ est 4.

g est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, donc pour tout réel $x>4$, $g(x)<2{,}1$.

b) On est certain que l'algorithme se termine.

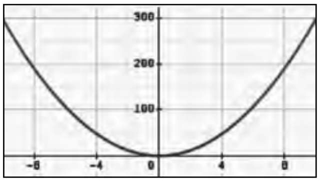
En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$ et $g(x)>2$ donc pour tout réel positif A, l'intervalle $]2\,;2+\mathrm{A}[$ contient tous les nombres $g(x)$ pour x assez grand.

Acquérir des automatismes

26 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

27 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

28 **a)** D'après l'écran ci-dessous la limite de la fonction f en $+\infty$ semble être $+\infty$.



b) D'après l'écran de calcul formel, pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout nombre réel $A > 0$, $f(x) > A$ équivaut à $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{A+1}$.

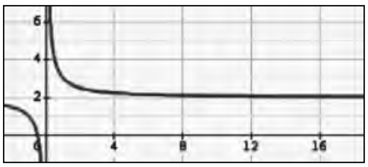
Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout nombre réel $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{A+1}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) • $f(x) > 1\,000$ pour tout réel $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1000+1}$ c'est-à-dire $x > \dfrac{\sqrt{3003}}{3}$.

• $f(x) > 10^6$ pour tout réel $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{10^6+1}$ c'est-à-dire $x > \dfrac{\sqrt{3\times10^6+3}}{3}$.

29 **a)** D'après l'écran ci-dessous la limite de la fonction g en $+\infty$ semble être 2.



b) D'après l'écran de calcul formel, pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout nombre réel $A > 0$, $g(x) > A$ équivaut à $x > \dfrac{1}{A}$.

Ainsi, l'intervalle $]2\,;2+A[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour tout réel $x >$ $x > \dfrac{1}{A}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

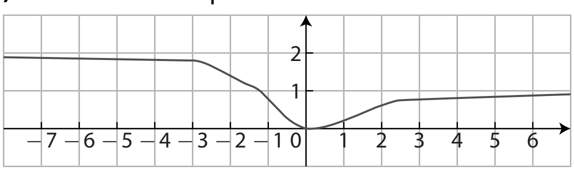
c) On a $2 < g(x) < 2 + 0{,}001$ et $x > 0$ pour tout réels $x > \dfrac{1}{0{,}001}$ c'est-à-dire $x > 1\,000$.

30 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

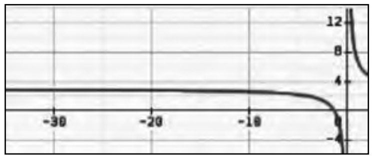
b) • La droite d d'équation $y = 2$, est une asymptote horizontale en $-\infty$ à $\mathscr{C}$.

• La droite d' d'équation $y = 1$, est une asymptote horizontale en $+\infty$ à $\mathscr{C}$.

c) Voici une courbe possible.



31 **a)** D'après l'écran ci-dessous la limite de la fonction h en $-\infty$ semble être 3.



b) D'après l'écran de calcul formel, pour tout réel $x < 0$ et pour tout réel $A < 0$, $3 + A < h(x) < 3$ équivaut à $x < \dfrac{4}{A}$.

Ainsi, l'intervalle $]3+A\,;3[$ contient toutes les valeurs $h(x)$ pour tout réel $x < \dfrac{4}{A}$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 3$.

c) La droite d d'équation $y = 3$, est une asymptote horizontale en $-\infty$ à $\mathscr{C}$.

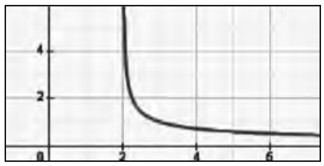
32 On peut étudier les limites de f en tout nombre réel (-1 et 1 compris), en $-\infty$ et en $+\infty$.

33 **a)** La limite de f en -1 est $+\infty$.

b) La limite à gauche de f en 1 est $-\infty$.

La limite à droite de f en 1 est $+\infty$.

34 **a)** D'après l'écran ci-dessous la limite de la fonction f en 2 semble être $+\infty$.



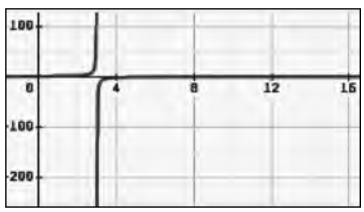
b) D'après l'écran de calcul formel, pour tout nombre réel $x > 0$ et pour tout réel $A > 0$, $f(x) > A$ équivaut à $2 < x < \dfrac{2A^2+1}{A^2}$ c'est-à-dire $2 < x < 2 + \dfrac{1}{A^2}$.

Ainsi, l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout réel $2 < x < 2 + \dfrac{1}{A^2}$ (c'est-à-dire quand x est assez proche de 2).

Donc $\lim\limits_{x\to2} f(x) = +\infty$.

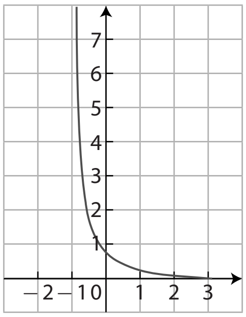
c) $f(x) > 100\,000$ équivaut à $x \in \left]2\,;2+\dfrac{1}{100\,000^2}\right[$ c'est-à-dire $x \in \,]2\,;2+10^{-10}[$.

35 **a)** D'après l'écran ci-dessous la limite de la fonction g en 3 semble être $-\infty$.

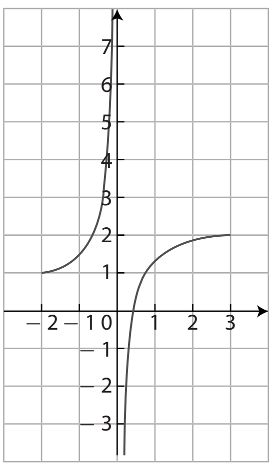


b) D'après l'écran de calcul formel, pour tout réel $x > 3$ et pour tout réel $A < 0$, $g(x) < A$ équivaut à $3 < x < \frac{3A-2}{A}$ c'est-à-dire $3 < x < 3 - \frac{2}{A}$.
Ainsi, l'intervalle $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs $g(x)$ pour tout réel $3 < x < 3 - \frac{2}{A}$ (c'est-à-dire quand x est assez proche de 3).
Donc $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -\infty$.
Remarque : $-\frac{2}{A}$ est positif car $A < 0$.
c) $g(x) < -10\,000$ équivaut à $x \in \left]3\,;3 - \frac{2}{-10000}\right[$ c'est-à-dire $x \in]3\,;3 + 2 \times 10^{-4}[$.

36 **a)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$.
b) La droite d d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
c) Voici une courbe possible.



37 **a)** La limite de f à gauche en 0 est $+\infty$.
La limite de f à droite en 0 est $-\infty$.
b) La droite d d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.
c) Voici une courbe possible.



38 $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

39 $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x) = -\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.

40 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$.

41 **a)** Pour tout nombre réel x, $\sin(x) \leqslant 1$, c'est-à-dire $-3\sin(x) \geqslant -3$.
Donc pour tout nombre réel x, $x^2 - 3\sin(x) \geqslant x^2 - 3$ c'est-à-dire $f(x) \geqslant x^2 - 3$.
b) • $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
• De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 3) = +\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

42 **a)** Pour tout réel $x > 0$: $x^2 \geqslant 0$ et donc $x^2 + x \geqslant x$.
La fonction racine est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x^2 + x} \geqslant \sqrt{x}$ c'est-à-dire $g(x) \geqslant \sqrt{x}$.
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

43 **a)** La limite en $+\infty$ de la fonction f semble être $+\infty$.
b) Pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \cos(x)$ c'est-à-dire $-3 \leqslant 3\cos(x)$.
Donc, pour tout nombre réel x, $2x - 3 \leqslant f(x)$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
c) Pour tout nombre réel x, $\cos(x) \leqslant 1$ c'est-à-dire $3\cos(x) \leqslant 3$.
Donc, pour tout nombre réel x, $f(x) \leqslant 2x + 3$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (2x + 3) = -\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

44 **a)** La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $x > 0$, $e^x > e^0$ c'est-à-dire $e^x > 1$.
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout réel $x > 0$,
$0 \leqslant \frac{1}{e^x} \leqslant 1$ c'est-à-dire $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$.
Ainsi pour tout réel $x > 0$, $0 \leqslant \frac{e^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}$.
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

45 **a)** Pour tout nombre réel $x \neq 0$:
$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $x^2 > 0$ donc $-\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{\cos(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$

et alors $4-\dfrac{1}{x^2}\leqslant 4+\dfrac{\cos(x)}{x^2}\leqslant 4+\dfrac{1}{x^2}$ c'est-à-dire $4-\dfrac{1}{x^2}\leqslant h(x)\leqslant 4+\dfrac{1}{x^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\dfrac{1}{x^2}\right)=4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{1}{x^2}\right)=4$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=4$.

On obtient de même $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=4$.

46 **a)** Pour tout réel $x>0$, $x^2\leqslant x^2+1$.

De plus, $2x>0$ et donc $x^2+1\leqslant x^2+1+2x$ c'est-à-dire $x^2+1\leqslant (x+1)^2$.

Finalement, pour tout réel $x>0$, $x^2\leqslant x^2+1\leqslant (x+1)^2$.

b) La fonction racine est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout réel $x>0$,

$\sqrt{x^2}\leqslant\sqrt{x^2+1}\leqslant\sqrt{(x+1)^2}$

c'est-à-dire $x\leqslant\sqrt{x^2+1}\leqslant x+1$.

Il vient alors pour tout réel $x>0$, $\dfrac{x}{x}\leqslant\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\leqslant\dfrac{x+1}{x}$

c'est-à-dire $1\leqslant f(x)\leqslant 1+\dfrac{1}{x}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

47 Pour tout nombre réel x, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ et alors $0\leqslant\cos^2(x)\leqslant 1$ (1).

• Pour tout nombre réel $x>0$, il vient $0\leqslant\dfrac{\cos^2(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$ et alors $2\leqslant 2+\dfrac{\cos^2(x)}{x}\leqslant 2+\dfrac{1}{x}$

c'est-à-dire $2\leqslant g(x)\leqslant 2+\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$.

• Pour tout réel $x<0$, on obtient à l'aide de (1)

$\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\cos^2(x)}{x}\leqslant 0$ et alors $2+\dfrac{1}{x}\leqslant 2+\dfrac{\cos^2(x)}{x}\leqslant 2$

c'est-à-dire $2+\dfrac{1}{x}\leqslant g(x)\leqslant 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=2$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=2$ donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

48 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x)=+\infty$

49 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

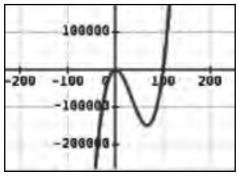
50 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-5x)=+\infty$ donc d'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x)=-\infty$ donc « FI » « $\infty-\infty$ ».

b. Pour tout nombre réel $x>0$, $f(x)=x^2\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ donc d'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

51 **a)** D'après l'écran ci-dessous on conjecture que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.



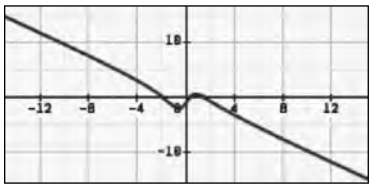
b) • Pour tout nombre réel $x\neq 0$,

$g(x)=x^3\left(1-\dfrac{100}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{100}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ donc d'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{100}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ donc d'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$.

52 **a)** D'après l'écran ci-dessous on conjecture que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.



b) • Pour tout nombre réel $x\neq 0$,

$$h(x)=\frac{x^3\left(-1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=x\times\frac{-1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}}.$$

• D'après les règles opératoires

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$.

D'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$.

• D'après les règles opératoires

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$.

D'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=+\infty$.

53 • Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f(x) = x^4\left(-2 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$.

• D'après les règles opératoires

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = -2$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^4) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

• D'après les règles opératoires

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = -2$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

54 • Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f(x) = x^3\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{9}{x^2}\right)$.

• D'après les règles opératoires

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{9}{x^2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• D'après les règles opératoires

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{9}{x^2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

55 • $f(x) = \dfrac{x^2\left(1+\dfrac{5}{x} - \dfrac{9}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{3}{x}\right)} = x \times \dfrac{1+\dfrac{5}{x} - \dfrac{9}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}}$.

• D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{5}{x} - \dfrac{9}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}} = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\dfrac{5}{x} - \dfrac{9}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}} = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

56 Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f(x) = \dfrac{x\left(3 - \dfrac{5}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{3-\dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$.

• D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-\dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 3$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-\dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 3$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

57 On utilise le schéma de décomposition ci-contre :

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{3 + \dfrac{1}{x}}_{\mathrm{X} \mapsto \sqrt{\mathrm{X}}}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{X} = 3$ et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to 3} \sqrt{\mathrm{X}} = \sqrt{3}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{3}$.

58 On utilise le schéma de décomposition ci-contre :

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{x^2 + 3}_{\mathrm{X} \mapsto \sqrt{\mathrm{X}}}}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \sqrt{\mathrm{X}} = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \sqrt{\mathrm{X}} = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

59 **a)** • $\lim\limits_{x\to 2}(-3x+1) = -5$ • $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$

b)

x	$+\infty$		2		$-\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

c) • $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = +\infty$ • $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = -\infty$

60 • $\lim\limits_{x\to-5} 2x = -10$ • $\lim\limits_{x\to-5}(x+5) = 0$

• On construit le tableau de signe de $x+5$.

x	$+\infty$		5		$-\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	

• On en déduit les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to-5\\ x<-5}} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-5\\ x>-5}} f(x) = -\infty$

61 • $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 5x + 2) = -2$ • $\lim\limits_{x\to 1}(1-x) = 0$

• On construit le tableau de signe de $1-x$.

x	$+\infty$		1		$-\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

• On en déduit les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$

62 . Pour tout nombre réel $x \neq 0$:

$f(x) = \dfrac{x^2\left(6 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(2 + \dfrac{7}{x^2}\right)}$ c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{6 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^2}}{2 + \dfrac{7}{x^2}}$.

D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{2+\dfrac{7}{x^2}} = 3$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{2+\dfrac{7}{x^2}} = 3$

On en déduit que la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

63 **a)** On conjecture les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$

b) • $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to0} (2x^2+1) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x\to0} (2x^2+1) =$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

64 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 7$

65 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

66 **a)** • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{e^x}\right) = 1$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^{-x}) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\dfrac{1}{e^x}\right) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

67 • $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+1) = +\infty$, d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{e^x+1} = 0$.

D'après la limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1$, d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{e^x+1} = 4$.

D'après la limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$.

68 **a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (3e^x-5) = -5$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2e^x+7) = 7$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{5}{7}$.

b) $f(x) = \dfrac{e^x\left(3-\dfrac{5}{e^x}\right)}{e^x\left(2+\dfrac{7}{e^x}\right)} = \dfrac{3-5e^{-x}}{2+7e^{-x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (3-5e^{-x}) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2+7e^{-x}) = 2$.

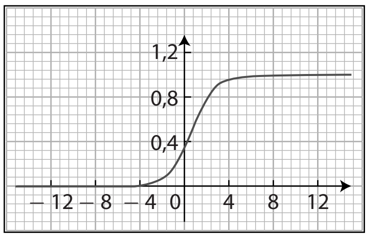
D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

c) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

La droite d d'équation $y = -\dfrac{5}{7}$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

La droite d' d'équation $y = \dfrac{3}{2}$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

69 **a)**



On conjecture que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (2+e^x) = 2$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x\left(\dfrac{2}{e^x}+1\right)} = \dfrac{1}{2e^{-x}+1}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2e^{-x}+1) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

d) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

La droite d d'équation $y = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote horizontale en - ∞ à la courbe $\mathscr{C}$.

La droite d' d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

70 On utilise le schéma de décomposition ci-contre.

$$x \mapsto \underbrace{2x+1}_{X \mapsto e^X}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^x = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

71 On utilise le schéma de décomposition ci-contre.

$$x \mapsto \underbrace{\frac{1}{x}}_{X \mapsto e^X}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} e^X = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} X = 0$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = 0$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = +\infty$.

72 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout réel $x \neq 0$,

$$x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = x \times \frac{e^x}{x} - x \times 1 = e^x - x = f(x).$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

73 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x)^2 = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

2. a) $g(x) = \mathbf{2} \times \frac{e^{2x}}{2x}$.

b) On utilise le schéma de décomposition ci-contre.

$$x \mapsto \underbrace{2x}_{X \mapsto \frac{e^X}{X}}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

74 Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$ donc d'après les régles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

75 Pour tout réel $x \neq 0$, $g(x) = \frac{x}{e^x}$ c'est-à-dire aussi $g(x) = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ donc d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

76 Pour tout réel $x > 0$, $h(x) = \sqrt{x} \times \frac{e^x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

77 Pour tout réel $x > 0$, $k(x) = e^{2x} \times \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$ et alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$.

Pour se tester

78 **1. C**. En effet, $f(x) = x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{4}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{5}{x^2}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. B. En effet, pour tout réel $x \neq 0$, $g(x) = \frac{x\left(2 - \frac{5}{x}\right)}{x}$ c'est-à-dire $g(x) = 2 - \frac{5}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{5}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

3. D. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} (2x - 5) = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$ (avec $x > 0$).

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$.

4. A. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{3}{e^x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2e^{-x}) = 0$.

D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

79 **1. B** et **C**.

• On utilise le schéma de décomposition ci-contre :

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{3x+1}_{X \mapsto 4-e^X}}$$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - e^X) = -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (4 - e^X) = 4$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 4$.

2. A, **C** et **D**.

• $\lim\limits_{x \to 0} (2e^x + 3) = 5$.

De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (e^x - 1) = 0$ (avec $e^x - 1 > 0$)

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (e^x - 1) = 0$ (avec $e^x - 1 < 0$).

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} h(x) = -\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction h.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} (2e^x + 3) = 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -3$.

Donc la droite d'équation $y = -3$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction h.

• $h(x) = \dfrac{e^x\left(2 + \dfrac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{2 + \dfrac{3}{e^x}}{1 - \dfrac{1}{e^x}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{3}{e^x}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 2$.

Donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction h.

3. A et **C**.

• Pour tout réel $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 5\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 5\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x) = +\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.

80 **1. Vrai.** En effet, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

2. Faux. En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc la seule asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y = 2$ (voir 1).

3. Vrai. En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

4. Faux.

On utilise le schéma de décomposition ci-contre :

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{f(x)}_{X \mapsto e^X}}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} X = 2$ et $\lim\limits_{X \to 2} e^X = e^2$.

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{f(x)} = e^2$.

S'entraîner

81 **a)** • $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

• $f(x) = \dfrac{e^x\left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{e^x}}{1 + \dfrac{1}{e^x}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{e^x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

La droite d d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

La droite d' d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

b) • $f(x) - 1 = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} - 1 = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} - \dfrac{e^x + 1}{e^x + 1}$

$= \dfrac{e^x - 1 - e^x - 1}{e^x + 1}$.

Donc $f(x) - 1 = \dfrac{-2}{e^x + 1}$

Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 0$ et alors $\dfrac{-2}{e^x + 1} < 0$ c'est-à-dire $f(x) - 1 < 0$.

Pour tout réel x, $f(x) - 1 < 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de la droite d'équation $y = -1$.

c) $f(x) - (-1) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} + 1 = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} + \dfrac{e^x + 1}{e^x + 1}$

$= \dfrac{e^x - 1 + e^x - 1}{e^x + 1}$.

Donc $f(x) - 1 = \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$.

Pour tout réel x, $2e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$.

Donc pour tout réel x, $\dfrac{2e^x}{e^x+1} > 0$ c'est-à-dire $f(x) - (-1) > 0$.

Pour tout réel x, $f(x) - (-1) > 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite d'équation $y = -1$.

82 **1. a)** $\lim\limits_{x\to 0}(e^x - 1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}(x) = 0$.

Donc il s'agit d'une forme indéterminée « 0 sur 0 ».

b) On conjecture que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

2. (1) la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0.

(2) exp est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{0+x} - e^0}{x} = \exp'(0)$.

(3) $\exp'(0) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

(4) La limite en 0 de la fonction f est 1.

Autrement dit $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

83 **1.** On conjecture, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et alors $1 \leqslant 2 + \sin(x) \leqslant 3$ **(1)**.

a) Pour tout réel $x > 1$, on a $x - 1 > 0$ et on obtient en divisant **(1)** par x – 1, $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2+\sin(x)}{x-1} < \dfrac{3}{x-1}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{x-1} < f(x) < \dfrac{3}{x-1}$ **(2)**.

b) Pour tout réel $x < 1$ on a $x - 1 < 0$ et on obtient, en divisant **(1)** par x – 1, $\dfrac{3}{x-1} < \dfrac{2+\sin(x)}{x-1} < \dfrac{1}{x-1}$ c'est-à-dire $\dfrac{3}{x-1} < f(x) < \dfrac{1}{x-1}$ **(3)**.

3. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-1} = 0$ donc d'après **(2)** et le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-1} = 0$ donc d'après **(3)** et le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to 1}(2 + \sin(x)) = 2 + \sin(1)$ avec $2 + \sin(1) > 0$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x - 1) = 0$.

On construit le tableau de signe de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

On en déduit les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = +\infty$.

84 **Parcours 1**

• $\lim\limits_{x\to 5}(x - 5) = 0$.

On construit le tableau de signe de x – 5.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	0	$+$	

On en déduit les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 5\\x<5}}\left(\dfrac{1}{x-5}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\x>5}}\left(\dfrac{1}{x-5}\right) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\x<5}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\x>5}} f(x) = +\infty$.

La droite d d'équation $x = 5$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-5}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-5}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 6$.

La droite d' d'équation $y = 6$ est une asymptote verticale en $-\infty$ et $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

• Les droites d et d' sont les deux asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

Parcours 2

1. a) $g(x) = \dfrac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

b) La droite d d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) • $\lim\limits_{x\to 1}(x + 1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1}(x - 1) = 0$.

b) On construit le tableau de signe de x – 1.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

On en déduit les limites suivantes :

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} g(x) = +\infty$.

c) La droite d' d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

85 **a)** $g(k\pi) = (k\pi)^4 \times \sin(k\pi) = 0$.

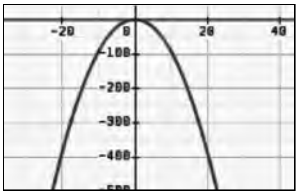
b) Soit un nombre réel $A > 0$.

Quelque soit le réel $x_0 > 0$, il existe toujours un entier k tel que $k\pi > x_0$ et alors $g(k\pi) = 0$ soit $g(k\pi) < A$.

Donc il n'existe pas de valeur x_0 tel que pour tout réel $x > x_0$, $f(x) > A$.

On en déduit que la fonction g ne peut avoir pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

86 **a)** On conjecture $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.



b) Pour tout réel $x > 0$:

$h(x) = \sqrt{x^2\left(1+\dfrac{5}{x^2}\right)} - x^2$

$h(x) = x\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}} - x^2$

$h(x) = x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}} - x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}\right) = 1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}} - x\right) = -\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

87 Pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \sin^2(x) \leqslant 1$ et alors $0 \leqslant 5\sin^2(x) \leqslant 5$.

On en déduit : $x - 1 \leqslant x - 1 + 5\sin^2(x) \leqslant x + 4$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+4) = -\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ donc d'après un théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

88 La fonction f est définie sur $]-\infty\,; a[\,\cup\,]a\,; +\infty[$.

Pour tout réel $x \neq a$, $f(x) = \dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a$.

$\lim\limits_{x\to a}(x+a) = 2a$ donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 2a$.

L'affirmation de Juliette est fausse.

89 **a)** $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 7x + 10) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2}(x-2) = 0$.

Donc il s'agit d'une forme indéterminée « 0 sur 0 ».

b) $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$. $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 3$.

$x_1 = \dfrac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{7+3}{2} = 5$.

Les deux x racines du polynôme $x^2 - 7x + 10$ sont 2 et 5 et alors $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$.

c) Pour tout réel $x \neq 2$: $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-5)}{x-2}$. donc $f(x) = x - 5$.

$\lim\limits_{x\to 2}(x-5) = -3$ donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3$.

90 **1.** $\lim\limits_{x\to-2}(x^2 - 6x + 5) = 21$ et $\lim\limits_{x\to-2}(x+2) = 0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\left(\dfrac{x^2-6x+5}{x+2}\right) = -\infty$ (car $x + 2 < 0$).

D'après les règles opératoires : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty$.

Donc la droite (d) d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

2. a) Pour tout réel $x > -2$,

$f(x) = \dfrac{x(x+2)}{x+2} - \dfrac{x^2 - 6 + 5}{x+2}$

c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{8x-5}{x+2}$.

Et alors pour tout réel $x > -2$ et différent de 0,

$f(x) = \dfrac{x\left(8 - \dfrac{5}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}$ soit $f(x) = \dfrac{8 - \dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8 - \dfrac{5}{x}\right) = 8$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 8$.

Donc la droite (d') d'équation $y = 8$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

b) $f(x) - 8 = \dfrac{8x-5}{x+2} - 8$

$f(x) - 8 = \dfrac{8x-5}{x+2} - \dfrac{8(x+2)}{x+2}$

$f(x) - 8 = -\dfrac{21}{x+2}$.

Donc $f(x) - 8 < 0$ (car $x + 2 > 0$) et la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de la droite (d').

91 **a)** $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3)$

b) $3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0$ donc 3 est une racine du polygone $x^2 - 5x + 6$. On en déduit :

$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$.

c) Pour tout réel $x \neq 3$, $g(x) = \dfrac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}$ c'est-à-dire $g(x) = \dfrac{x(x+3)}{x-2}$.

$\lim\limits_{x\to 3}(x(x+3)) = 18$ et $\lim\limits_{x\to 3}(x-2) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 18$.

92 **1.** • $f(x) = \dfrac{x^3\left(1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}\right)}{x\left(2+\dfrac{4}{x}\right)} = x^2 \times \left(\dfrac{1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}}{2 + \dfrac{4}{x}}\right)$.

D'après les règles opératoires

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1 - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{6}{x^3}}{2 + \dfrac{4}{x}}\right) = \dfrac{1}{2}$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

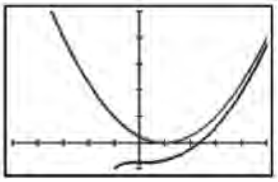
• On utilise le schéma de décomposition ci-contre :

$$x \mapsto \underbrace{x-1}_{X \mapsto \frac{1}{2}X^2}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{2}X^2 = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2. a) Écran de calculatrice.



b) Il semble que, pour les grandes valeurs de x, les deux courbes sont très proches.

c) Pour tout réel $x > -2$,

$$f(x)-g(x) = \frac{x^3-3x-6}{2(x+2)} - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

$$f(x)-g(x) = \frac{x^3-3x-6}{2(x+2)} - \frac{(x-1)^2(x+2)}{2(x+2)}$$

$$f(x)-g(x) = \frac{x^3-3x-6-(x-1)^2(x+2)}{2(x+2)}$$

$$f(x)-g(x) = \frac{x^3-3x-6-(x^2-2x+1)(x+2)}{2(x+2)}$$

$$f(x)-g(x) = \frac{x^3-3x-6-(x^3-3x+2)}{2(x+2)}$$

$$f(x)-g(x) = \frac{x^3-3x-6-x^3+3x-2}{2(x+2)}$$

$$f(x)-g(x) = \frac{-8}{2(x+2)}$$

$$f(x)-g(x) = \frac{-4}{x+2}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{-4}{x+2}\right) = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-g(x)) = 0$.

c) En $+\infty$ la distance entre les deux courbes tend vers 0. Autrement dit, en $+\infty$ les deux courbes se confondent.

93 **1.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$,

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = +\infty$.

2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to-2} g(x) = 0$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x) = -\infty$

3. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x\to-2} h(x) = +\infty$ **d)** $\lim\limits_{x\to0} h(x) = 0$

94 **1. a)** On dresse le tableau de signes de la fonction g.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	‖	$-$		$+$	

Donc l'ensemble D est $]-\infty\,;-3[\cup\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

b) Pour tout nombre réel x différent de 0 et de -3,

$$g(x) = \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{1}{x} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{3}{x} = 1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

De manière analogue, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2$.

c) $\lim\limits_{x\to-3} 2x-1 = -7$.

En utilisant le tableau de signes de $x+3$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} g(x) = -\infty$.

2. • On utilise le schéma de décomposition ci-contre :

$$x \mapsto \underbrace{g(x)}_{X \mapsto \sqrt{X}}$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} X = 2$ et $\lim\limits_{X\to2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 2$ et $\lim\limits_{X\to2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2}$.

• $\lim\limits_{x\to-3} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to-3} f(x) = +\infty$.

95 **a)** Pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \text{ c'est-à-dire } g(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}.$$

b) En utilisant le schéma de décomposition ci-contre, on obtient

$$x \mapsto \underbrace{1+\frac{1}{x^2}}_{X \mapsto \sqrt{X}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X = 1$ et $\lim\limits_{X\to1} \sqrt{X} = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\frac{1}{x}\right) = 2$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe.

96 **a)** Aire de $ABC = \dfrac{1}{2} \times AB \times AC$
c'est-à-dire $1 = \dfrac{1}{2} \times x \times AC$.
Donc $AC = \dfrac{2}{x}$.
Le triangle ABC est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = BA^2 + AC^2$ c'est-à-dire $(f(x))^2 = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$.
Donc $f(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{4}{x^2}}$.
b) On utilise le schéma de décomposition ci-contre :

$$x \mapsto \underbrace{x^2 + \frac{4}{x^2}}_{X \mapsto \sqrt{X}}$$

• $\lim\limits_{x\to 0} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

97 **a)** On note d la distance, en km, déjà parcourue.
La durée, en h, de la première moitié du trajet est $\dfrac{d}{30}$.
La durée, en h, de la seconde moitié du trajet est $\dfrac{d}{v}$.
On a alors :

$$V = \frac{2d}{\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{v}}$$

$$V = \frac{2d}{\dfrac{dv}{30v} + \dfrac{30d}{30v}}$$

$$V = \frac{2d}{\dfrac{d(30+v)}{30v}}$$

$$V = 2d \times \frac{30v}{d(30+v)}$$

$$V = \frac{60v}{30+v}$$

b) Pour nombre réel $v \neq 0$,
$V = \dfrac{60v}{v\left(\dfrac{30}{v} + 1\right)}$ c'est-à-dire $V = \dfrac{60}{\dfrac{30}{v} + 1}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{30}{v} + 1\right) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} V = 60$.
c) La vitesse moyenne de l'automobiliste sur l'ensemble du trajet tend vers 60 $km.h^{-1}$ quand sa vitesse moyenne sur la seconde partie du trajet augmente. Ainsi, la vitesse moyenne de l'automobiliste sur l'ensemble du trajet ne pourra pas dépasser 60 $km.h^{-1}$.

98 **Parcours 1**
• $f(x) = e^{2x}(1 - (2x+1)e^{-x})$
c'est-à-dire $f(x) = e^{2x}(1 - 2xe^{-x} - e^{-x})$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}}\right) = 0$
et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - 2xe^{-x} - e^{-x}) = 1$.
• On peut utiliser le schéma de décomposition ci-contre.

$$x \mapsto \underbrace{2x}_{X \mapsto e^X}$$

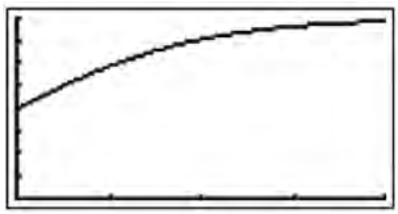
$\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^X = +\infty$.
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.
• D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Parcours 2
a) $g(x) = e^{2x}\left(3x\dfrac{1}{e^x} - 1\right)$
c'est-à-dire $g(x) = e^{2x}(3xe^{-x} - 1)$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (3xe^{-x} - 1) = -1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$.
• D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

99 On utilise le schéma de décomposition ci-contre.

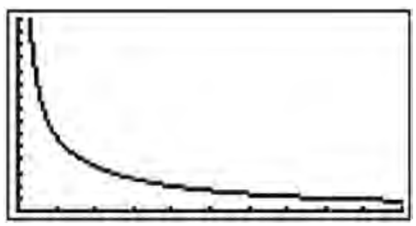
$$t \mapsto \underbrace{-\frac{1,3}{2}t}_{T \mapsto e^T}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} T = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$.

100 **1. a)**



b) $\lim\limits_{q\to+\infty} e^{-q} = 0$ donc $\lim\limits_{q\to+\infty} C(q) = 8$.
2. a) $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q} = \dfrac{8}{q(1+e^{-q})}$.
b)



c) $\lim\limits_{q\to+\infty} e^{-q} = 0$ donc $\lim\limits_{q\to+\infty} q(1+e^{-q}) = +\infty$ et $\lim\limits_{q\to+\infty} C_M(q) = 0$.
Le coût moyen de fabrication tend vers 0 lorsque le nombre de puces fabriquées augmente.

101 **1.** La fonction Q est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $Q'(t) = -1,2 \times 1,8e^{-1,2t}$.
Pour tout réel $t \geqslant 0$, $Q'(t) < 0$ donc la fonction Q est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. a) On utilise le schéma de décomposition ci-contre.

$$t \mapsto \underbrace{-1{,}2t}_{\mathrm{T}\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{T}}}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{T} = -\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{T}\to-\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{T}} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-1{,}2t} = 0$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{Q}(t) = 0$.

b) La quantité de médicament tend vers 0 quand t augmente.

3. a) On est certain que l'algorithme se termine.

En effet, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{Q}(t) = 0$ donc pour tout réel positif R, l'intervalle $]0\,;\mathrm{R}[$ contient tous les nombres $\mathrm{Q}(t)$ pour t assez grand.

b)

```
from math import*
def Q(t):
    y=1.8*exp(-1.2*t)
    return y
def Seuil(R):
    t=0
    while(Q(t)>R):
        t=t+0.01
    return(t)
```

c) $\mathrm{R} = 0{,}9$ $t = 0{,}58$

$\mathrm{R} = 0{,}1$ $t = 2{,}41$

$\mathrm{R} = 0{,}05$ $t = 2{,}99$

102 **1. a)** $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-2x})}{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-3x})} = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{1-\mathrm{e}^{-3x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\mathrm{e}^{-2x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-3x}) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x}+1)}{\mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{e}^{3x}-1)} = \mathrm{e}^x \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{3x}-1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{2x}+1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{3x}-1) = -1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{3x}-1}\right) = -1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = 2$ et $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-2x}) = 0$.

On construit le tableau de signe de $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-2x}$.

Pour cela on peut remarquer que

$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}(\mathrm{e}^{3x}-1)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-2x}$		$-$	0	$+$	

On en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.

3. La droite d_1 d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe.

La droite d_2 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe.

La droite d_3 d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe.

103 **a)** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ c'est-à-dire $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) La droite d d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Pour tout entier k, $g(k\pi) = 0$.

Donc $\mathscr{C}$ coupe la droite d aux points de coordonnées $(k\pi\,;0)$ où k est un entier.

2. Pour tout entier relatif k, $g(k\pi) = 0$ donc en particulier si $k < 0$.

Donc la limite de la fonction g en $-\infty$ ne peut pas être $+\infty$.

104 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (2\mathrm{e}^{-x}) = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{-x}} + 2 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}}\right)$

c'est-à-dire $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x} + 2 - x\mathrm{e}^x)$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

D'après la limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^{2x} + 2 - x\mathrm{e}^x) = 2$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

105 **1. a)** $\lim\limits_{x\to2} \mathrm{e}^{-x}(2-x) = 0$.

On construit le tableau de signe de $\mathrm{e}^{-x}(2-x)$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\mathrm{e}^{-x}(2-x)$		$+$	0	$-$	

On en déduit $\lim\limits_{x\to2} g(x) = -\infty$.

b) $\mathrm{e}^{-x}(2-x) = 2\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2\mathrm{e}^{-x}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x\mathrm{e}^{-x}) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}) = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(2-x) = 0$.

Avec le tableau de signes de $\mathrm{e}^{-x}(2-x)$ et d'après la limite d'un quotient on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2. La droite $d\,'$ d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe.

106 **1. a)** On conjecture que h a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

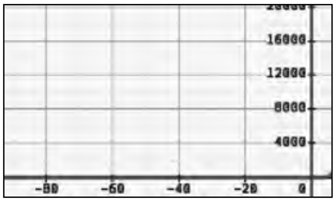
b) Pour tout nombre réel $x > 0$:

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x(1 + x\mathrm{e}^{-x})} = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x\mathrm{e}^{-x}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+xe^{-x}) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

2. a) On conjecture que $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = 0$.



b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + x) = -\infty$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = 0$.

107 **1. a)** Pour tout réel $x \neq 0$,

$h_a(x) = \dfrac{x}{e^x} \times \left(a + \dfrac{1}{2x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(a + \dfrac{1}{2x}\right) = a$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h_a(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ avec $e^x > 0$.

• $a > 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(ax + \dfrac{1}{2}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h_a(x) = -\infty$.

• $a = 0$: $h_0(x) = \dfrac{1}{2e^x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} h_0(x) = +\infty$.

• $a < 0$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(ax + \dfrac{1}{2}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} h_a(x) = +\infty$.

2. a) Pour tout nombre réel x,

$$h'_a(x) = \frac{ae^x - \left(ax + \frac{1}{2}\right)e^x}{e^{2x}} = \frac{-ax + a - \frac{1}{2}}{e^x}.$$

b) Pour $a \neq 0$, h'_a s'annule et change de signe en $x = 1 - \dfrac{1}{2a}$.

Donc h_a admet un extremum en cette valeur.

3. $a = -2$: courbe verte

$a = 0$: courbe noire

$a = \dfrac{1}{4}$: courbe orange

$a = 1$: courbe bleue

$a = 2$: courbe rouge

Pour $a \neq 0$, h_a admet un extremum en $1 - \dfrac{1}{2a}$, on lit cette valeur sur le graphique pour chacune des valeurs proposées.

108 **1.** On conjecture

• Si $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$.

• Si $\lambda < 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = -\infty$.

2. • Si $\lambda > 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\lambda x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\lambda x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = +\infty$.

• Si $\lambda < 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\lambda x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\lambda(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\lambda x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\lambda x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_\lambda(x) = -\infty$.

109 **1. a)** • $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)e^x = -\infty$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to1} (1-x)e^x = 0$ (avec $(1-x)e^x < 0$)

donc $\lim\limits_{x\to1} f(x) = -\infty$.

b) Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de f admet pour asymptotes les droites d'équations $y = 0$ et $x = 1$.

2. a) Pour tout réel $x > 1$,

$$f'(x) = -\frac{-e^x + (1-x)e^x}{(1-x)^2 e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{xe^x}{(1-x)^2 e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{(1-x)^2 e^x}$$

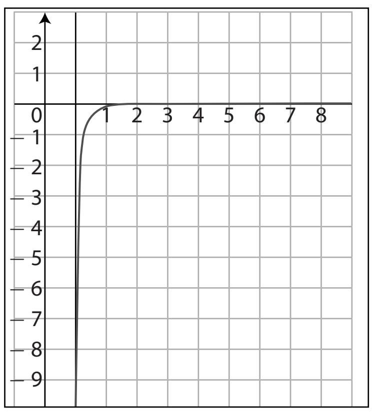
b) Pour tout réel $x > 1$, $(1-x)^2 e^x > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.

f est croissante $]1 ; +\infty[$.

c)

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0

3.



110 **a)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et la fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.

$f(0) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et f n'est pas toujours positive sur $\mathbb{R}$ $\left(f\left(\frac{1}{2}\right) < 0\right)$.

111 **a)** Pour $x > 0$, $0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

L'affirmation est vraie.

b) On pose pour $x > 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, alors $f(x) = xg(x)$.

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 2$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et l'affirmation est vraie.

112 **1. c)** • Le point $\mathrm{A}\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ semble commun aux courbes.

• Pour $n = 0$, on semble avoir $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$.

Pour $n = 1$, on semble avoir $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$.

Pour $n > 1$, on semble avoir $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

• f_0 semble croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \geqslant 1$, f_n semble décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. n est un nombre entier naturel.

$$f_n(0) = \frac{\mathrm{e}^0}{1 + \mathrm{e}^0} = \frac{1}{2}$$

$\mathrm{A}\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ est commun aux courbes.

3. a) f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_0'(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

$f_0'(x) > 0$ donc f_0 est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f_0(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

$\lim_{x \to -\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f_0(x) = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_0$ en $-\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_0(x) = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_0$ en $+\infty$.

c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
f_0'		$+$	
f_0	0	$\nearrow$	1

4. a) $f_1(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}(1 + \mathrm{e}^{-x})} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{x}}$.

$$f_1(-x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = f_0(x)$$

b) $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$

c) $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_0$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

$$f_1(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}(1 + \mathrm{e}^{-x})} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{x}}.$$

5. a) n est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{nx} \times \mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{nx} \times \mathrm{e}^{-x}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{(n-1)x}}$$

b) $n > 2$ donc $n - 1 > 0$.

$\lim_{x \to -\infty} (n-1)x = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{(n-1)x} = 0$

avec $\mathrm{e}^{(n-1)x} > 0$.

De même, $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{nx} = 0$

avec $\mathrm{e}^{nx} > 0$ et $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) = +\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} (n-1)x = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{(n-1)x} = +\infty$.

De même, $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{nx} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$.

c) • Pour $n \geqslant 2$,

$$f_n'(x) = \frac{-n\mathrm{e}^{-nx}(1 + \mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-nx} \times (-\mathrm{e}^{-x})}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

$$f_n'(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-nx}(n + (n-1)\mathrm{e}^{-x})}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$$

$f_n'(x)$ est du signe de $-\mathrm{e}^{-x}(n + (n-1)\mathrm{e}^{-x})$.

• $n\mathrm{e}^{-nx} > 0$.

$n \geqslant 2$ donc $(n-1)\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $n + (n-1)\mathrm{e}^{-x} > 0$.

Donc $f_n'(x) < 0$.

La fonction f_n est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

113 a) (2) b) (2) c) (3)

114 On peut construire ce tableau de signes.

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{7}$	-2	-1	0	1	$\sqrt{7}$	$+\infty$
x^2+4x+3	$+$	0	$-$		0		$+$		
$-2x$			$+$			0		$-$	
$-x^2+7$		$-$	0		$+$			0	$-$
x^2+2					$+$				
x^2+x-2			$+$	0		$-$	0	$+$	

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=1$,

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f_1(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f_1(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_1(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f_1(x)=+\infty$.

Donc la courbe de la fonction f_1 est affichée sur l'écran 2.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_2(x)=0$,

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f_2(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f_2(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_2(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f_2(x)=-\infty$.

Donc la courbe de la fonction f_2 est affichée sur l'écran 4.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x)=-1$,

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f_3(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f_3(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_3(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f_3(x)=+\infty$.

Donc la courbe de la fonction f_3 est affichée sur l'écran 3.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x)=1$,

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f_4(x)=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f_4(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f_4(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f_4(x)=+\infty$.

Donc la courbe de la fonction f_4 est affichée sur l'écran 1.

115 **a)** Pour tout réel $x\neq 2$, $f(x)=\dfrac{x-2}{(2-x)(2+x)}$

c'est-à-dire $f(x)=\dfrac{-1}{2+x}$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-\dfrac{1}{4}$.

b) $\lim\limits_{x\to-1}(x-2)=-3$ et $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$.

On construit le tableau de signe de $x+1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)=-\infty$.

116 La fonction f est définie sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ donc on peut étudier la limite de la fonction f sur $]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.

117 • Pour tout réel x,

• $f(x)=\dfrac{e^{-x}(a+bxe^{x})}{e^{-x}(1+2xe^{x})}$ c'est-à-dire $f(x)=\dfrac{a+bxe^{x}}{1+2xe^{x}}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(a+bxe^{x})=a$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+2xe^{x})=1$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

On en déduit $a=3$.

• $f(x)=\dfrac{3e^{-x}+bx}{e^{-x}+2x}$

$$f(x)=\frac{x\left(\dfrac{3e^{-x}}{x}+b\right)}{x\left(\dfrac{e^{-x}}{x}+2\right)}$$

$$f(x)=\frac{\dfrac{3e^{-x}}{x}+b}{\dfrac{e^{-x}}{x}+2}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3e^{-x}}{x}+b\right)=b$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{-x}}{x}+2\right)=2$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{b}{2}$.

On en déduit $4=\dfrac{b}{2}$ c'est-à-dire $b=8$.

Donc $a=3$ et $b=8$.

118 $\lim\limits_{x\to0}(e^{2x}+4e^{x}-5)=0$ et $\lim\limits_{x\to0}(e^{2x}-1)=0$.

Il s'agit donc d'une forme indéterminée « 0 sur 0 ».

On pose $X=e^{x}$.

Les racines du polygone X^2+4X-5 sont -5 et 1.

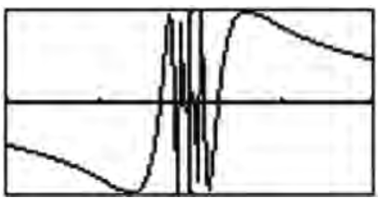
Les racines du polygone X^2-1 sont -1 et 1.

On en déduit que pour tout réel $x\neq 0$,

$f(x)=\dfrac{(e^{x}-1)(e^{x}+5)}{(e^{x}-1)(e^{x}+1)}$ c'est-à-dire $f(x)=\dfrac{e^{x}+5}{e^{x}+1}$.

Il vient alors, $\lim\limits_{x\to0} f(x)=3$.

119 On peut visualiser la situation avec une calculatrice.



• Les nombres $\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}$ avec $k\in\mathbb{Z}$ peuvent aussi être rendus aussi proches de O que l'on veut et $f\left(\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$.

• Les nombres $\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ peuvent aussi être rendus aussi proches de O que l'on veut et $f\left(\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = -1$.

Ainsi la fonction f n'a pas de limite en 0.

120 Pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}$$

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

g est la fonction affine définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - 1$.

En effet, $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = 0$.

121 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

• Pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+4}-x)(\sqrt{x^2+4}+x)}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$f(x) = \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}+x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Objectif BAC

122 **Partie A**

1. $f(0) = 0{,}5$ donc $\dfrac{a}{1+e^{-b\times 0}} = 0{,}5$

c'est-à-dire $\dfrac{a}{2} = 0{,}5$ soit $a = 1$.

2. Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = -\frac{-be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$$

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}$$

3. Une équation de la tangente d à la courbe $\mathscr{C}_f$ en A est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Or $f'(0) = \dfrac{b}{4}$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$ donc une équation de d est $y = \dfrac{b}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

d passe par le point B$(10\,;1)$ donc $1 = \dfrac{b}{4}\times 10 + \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire $b = \dfrac{1}{5}$ ou encore $b = 0{,}2$.

Partie B

1. $p(10) = \dfrac{1}{1+e^{-0{,}2\times 10}} = \dfrac{1}{1+e^{-2}}$ donc $p(10) \approx 0{,}88$.

La proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 est environ 0,88 soit 88 %.

2. a) D'après la question **2.** de la partie A en prenant $b = 0{,}2$, on obtient $p'(x) = \dfrac{0{,}2e^{-0{,}2x}}{(1+e^{-0{,}2x})^2}$.

Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^{-0{,}2x} > 0$ et $(1+e^{-0{,}2x})^2 > 0$ donc $p'(x) > 0$.

La fonction p est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) On utilise ce schéma de composition : $\boxed{x \mapsto \underbrace{-0{,}2x}_{X\mapsto e^X}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}2x} = 0$.

On déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-0{,}2x}) = 1$ et alors d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = 1$.

c) Plus les années s'écouleront, plus la proportion $p(x)$ de personnes équipées augmentera jusqu'à à être de plus en plus proche des 100 %.

3. a) Voici l'algorithme complété.

```
Tant que A < 0,95
    | A ← A + 1
Fin Tant que
```

b) D'après la question **1.** de la **Partie B** on peut commencer le tableau à la valeur 10 pour x.

x	10	11	12	13	14	15
$p(x)$	0,88	0,90	0,92	0,93	0,94	0,952
$p(x) > 0{,}95$	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	FAUX	VRAI

Le marché sera saturé au bout de 15 ans donc en 2015.

123 **Partie A**

1. La fonction C est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $C'(t) = 12 \times \left(-\left(-\dfrac{7}{80}e^{-\frac{7}{80}t}\right)\right)$ c'est-à-dire $C'(t) = \dfrac{21}{20}e^{-\frac{7}{80}t}$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $t \geqslant 0$, $C'(t) > 0$.

Donc la fonction C est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. On utilise ce schéma de composition : $\boxed{t \mapsto \underbrace{-\frac{7}{80}t}_{T\mapsto e^T}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} T = -\infty$ et $\lim\limits_{T\to-\infty} e^T = 0$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{7}{80}t} = 0$.

On déduit $\lim\limits_{t\to+\infty} 12\left(1-e^{-\frac{7}{80}t}\right)=12$.

Le plateau est égal à 12 et 12 est inférieur à 15 donc le traitement n'est pas efficace.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur$]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=-\frac{105}{x^2}\left(1-e^{-\frac{3}{40}x}\right)+\frac{105}{x}\times\frac{3}{40}e^{-\frac{3}{40}x}$$

$$f'(x)=\frac{105}{x^2}\left(-1+e^{-\frac{3}{40}x}+\frac{3x}{40}e^{-x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{105g(x)}{x^2}$$

2. $f'(x)=\dfrac{105g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

D'après le tableau de variations de la fonction g, pour tout réel $x>0$, $g(x)<0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

3. • $f(1)=105\left(1-e^{-\frac{3}{40}}\right)$ donc $f(1)\approx 7{,}59$ et $f(1)>5{,}9$.

f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout réel x de $]0\,;1[$, $f(x)>f(1)$ et donc $f(x)>5{,}9$.

• $f(80)=\dfrac{105}{80}(1-e^{-6})$ donc $f(80)\approx 1{,}31$ et $f(80)<5{,}9$.

f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout réel x de $]80\,;+\infty[$, $f(x)<f(80)$ et donc $f(x)<5{,}9$.

• Les solutions de l'équation $f(x)=5{,}9$ appartiennent donc à l'intervalle $[1\,;80]$.

Or d'après l'énoncé l'équation $f(x)=5{,}9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;80]$.

Donc cette équation admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Avec la calculatrice, on obtient $8{,}1<\alpha<8{,}2$.

8	5.921847
8.1	5.901895
8.2	5.882837
8.3	5.862273

Partie C

1. a) On a ici $C(t)=\dfrac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{80}t}\right)$

et $C(6)=\dfrac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{3}{40}a}\right)$.

b) $C(6)=5{,}9$ équivaut à $\dfrac{105}{a}\left(1-e^{-\frac{3}{40}a}\right)=5{,}9$.

D'après la question **3.** de la **Partie B** cette équation admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$ avec $\alpha\approx 8{,}1$.

La clairance de ce patient est environ 8,1.

2. On a alors $C(t)=\dfrac{d}{8{,}1}\left(1-e^{-\frac{8{,}1}{80}t}\right)$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} C(t)=\dfrac{d}{8{,}1}$.

On doit donc avoir $\dfrac{d}{8{,}1}=15$ c'est-à-dire $d=15\times 8{,}1$ soit $d=121{,}5$.

Le débit d de la perfusion sera de 121,5 micromoles par heure.

124 **Partie A**

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x)=-6x^2+2x$ c'est-à-dire $g'(x)=2x(-3x+1)$.

On peut construire ce tableau de signes.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc la fonction g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et sur $\left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$, elle est strictement croissante sur $\left]0\,;\frac{1}{3}\right[$.

b) Pour tout réel $x\neq 0$: $g(x)=x^3\left(-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{1}{x}-x\dfrac{1}{x^3}\right)=-2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$.

2. On peut construire le tableau de variations de g.

x	$-\infty$	-1	α	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	2 ↘	0 ↘	-1 ↗	$-\frac{26}{27}$ ↘	$-\infty$

On déduit de ce tableau que $g(x)>0$ sur $]-\infty\,;\alpha[$ et que $g(x)<0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.

Partie B

1. a) On multiplie chacun des membres de l'inégalité $x>1$ par x qui est strictement positif et on obtient $x^2>x$.

On multiplie chacun des membres de l'inégalité $x^2>x$ par x qui est strictement positif et on obtient $x^3>x^2$.

Pour tout réel $x>1$, on a alors : $1<x<x^2<x^3$.

b) • Pour tout réel $x>1$, on a : $1<x<x^2<x^3$ donc $0<1+x+x^2+x^3<4x^3$.

De plus pour tout réel x, $e^{-2x+1}>0$.

On en déduit donc, pour tout réel $x>1$: $0<(1+x+x^2+x^3)e^{-2x+1}<4x^3e^{-2x+1}$ c'est-à-dire $0<f(x)<4x^3e^{-2x+1}$.

• $4x^3e^{-2x+1}=\dfrac{1}{2}\times 8x^3\times e^{-2x}\times e=\dfrac{e}{2}\times(2x)^3\times e^{-2x}$.

• On utilise le schéma de composition ci-contre.

$$\boxed{x\mapsto \underbrace{2x}_{X\mapsto X^3e^{-X}}}$$

$\lim\limits_{X \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} X^3 e^{-X} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} ((2x)^3 \times e^{-2x}) = 0$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e}{2}(2x)^3 e^{-2x}\right) = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^3 e^{-2x+1}) = 0$.

c) $0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^3 e^{-2x+1}) = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$f'(x) = (1 + 2x + 3x^2)e^{-2x+1} + (1 + x + x^2 + x^3) \times (-2) \times e^{-2x+1}$

$f'(x) = (1 + 2x + 3x^2 - 2 - 2x - 2x^2 - 2x^3)e^{-2x+1}$

$f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1)e^{-2x+1}$

3. Pour tout réel x, $e^{-2x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On en déduit que :

• f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$,

• f est strictement décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

125 a) • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

• Pour tout entier naturel $n > 1$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = -\infty$.

• On peut énoncer ces résultats à l'aide de la règle opératoire « en $+\infty$, l'exponentielle (e^x) l'emporte sur les puissances (x^n) ».

b) On peut par exemple proposer de calculer

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (27x^3 - e^{3x})$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 - e^x}{x^4 e^{2x}}$.

126 a) • $f(x) = \dfrac{x^2\left(1 - \frac{10}{x} + \frac{16}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}$

c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{1 - \frac{10}{x} + \frac{16}{x^2}}{1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{10}{x} + \frac{16}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{10}{x} + \frac{16}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{9}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.

• Les racines du polygone $x^2 - 10x + 16$ sont 2 et 8.

Les racines du polygone $x^2 - 9x + 8$ sont 1 et 8.

• On en déduit $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-8)}{(x-2)(x-8)}$

c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$. Et alors $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = \dfrac{7}{6}$.

• $\lim\limits_{x \to 2}(x - 1) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2}(x - 2) = 0$.

De plus, si $x < 2$ alors $x - 2 < 0$ et si $x > 2$ alors $x - 2 > 0$. On en déduit :

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.

b) La droite d d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

La droite d' d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

127 (1) Faux.

Pour tout réel x, $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{-2x}$.

On utilise le schéma de composition ci-contre.

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{-2x}_{X \mapsto Xe^X}}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} Xe^X = +\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) \times e^{-2x} = +\infty$

et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{-2x} = -\infty$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(2) Vrai.

Pour tout réel x, $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{-2x}$.

On utilise à nouveau le schéma de composition ci-contre.

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{-2x}_{X \mapsto Xe^X}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) \times e^{-2x} = 0$

et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{-2x} = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

(3) Faux.

Pour tout $x < -1$, $g(x) = \dfrac{x}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$

c'est-à-dire $g(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$.

• On utilise le schéma de composition ci-contre.

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{1 - \frac{1}{x^2}}_{X \mapsto \sqrt{X}}}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$ et alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$.

(4) Faux.

• $\lim\limits_{x \to -1} x = -1$ et $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{x^2-1} = 0$ avec $\sqrt{x^2-1} > 0$.

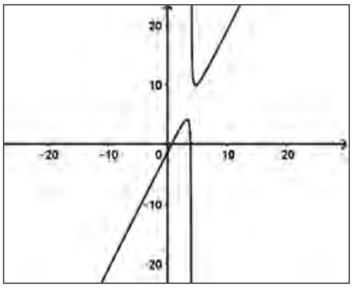
D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$.

Les droites d'équations $x = -1$ et $y = -1$ sont les deux asymptotes à la courbe représentative de g.

Pour aller plus loin

128 Partie A

1. a) On conjecture que la limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$ et que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.



b) Pour tout réel $x \neq 4$, $f(x) - (2x-1) = \dfrac{1}{x-4}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-4} = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x-1)) = 0$.

c) La droite d d'équation $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-4} = 0$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x-1)) = 0$.

Donc la droite d est une asymptote oblique en $-\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

e) On étudie le signe de $f(x) - (2x-1)$ c'est-à-dire le signe de $\dfrac{1}{x-4}$ et on en déduit que :

• pour tout réel $x < 4$, $f(x) - (2x-1) < 0$ et la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite d.

• pour tout réel $x > 4$, $f(x) - (2x-1) > 0$ et la courbe $\mathscr{C}$ est en dessus de la droite d.

2. a) La droite d d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en $+\infty$ donc il existe une fonction φ telle que $g(x) - (ax + b) = \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

Donc $\dfrac{g(x)}{x} = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\varphi(x)}{x}\right) = a$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = a$.

b) $g(x) - ax = b + \varphi(x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (b + \varphi(x)) = b$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - ax) = b$.

3. a) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{3x^2+5x+1}{x(x+2)}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2\left(3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \frac{2}{x}\right)}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}$$

D'après les régles opératoires $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}\right) = 3$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$.

b) $f(x) - 3x = \dfrac{3x^2+5x+1}{x+2} - \dfrac{3x(x+2)}{x+2}$

$$f(x) - 3x = \frac{3x^2+5x+1}{x+2} - \frac{3x^2+6x}{x+2}$$

$$f(x) - 3x = \frac{-x+1}{x+2}$$

$$f(x) - 3x = \frac{x\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}$$

$$f(x) - 3x = \frac{-1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}$$

D'après les régles opératoires $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{-1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}}\right) = -1$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 3x = -1$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 3x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Partie B

a) f : **branche parabolique d'axe (Oy)** ;

g : **branche parabolique de direction $y = ax$**.

h : **branche parabolique d'axe (Ox)** ;

i : asymptote oblique.

b) • $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^3-1}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x^3}\right)}{x}$$

$$\frac{f(x)}{x} = x^2\left(1 - \frac{1}{x^3}\right).$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc la courbe représentative de la fonction f admet en $+\infty$ une **branche parabolique d'axe (Oy)**.

• $\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x}$

$\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{x\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}{x}$

$\dfrac{g(x)}{x}=1-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$.

$g(x)-x=x-2\sqrt{x}-x=-2\sqrt{x}$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-x=-\infty$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)-x=-\infty$.

Donc la courbe représentative de la fonction g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y=x$.

• $\dfrac{h(x)}{x}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ et alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=0$.

Donc la courbe représentative de la fonction f admet en $+\infty$ une branche parabolique d'axe (Ox).

• $\dfrac{i(x)}{x}=\dfrac{\dfrac{x^2+2}{x+3}}{x}$

$\dfrac{i(x)}{x}=\dfrac{x^2+2}{x^2+3x}$

$\dfrac{i(x)}{x}=\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$

$\dfrac{i(x)}{x}=\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x}}$

D'après les régles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{i(x)}{x}=1$.

$i(x)-x=x\dfrac{x^2+2}{x+3}-\dfrac{x(x+3)}{x+3}$

$i(x)-x=\dfrac{-3x+2}{x+3}$

$i(x)-x=\dfrac{-3x+2}{x+3}$

$i(x)-x=\dfrac{x\left(-3+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$

$i(x)-x=\dfrac{-3+x}{1+\dfrac{3}{x}}$

D'après les régles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-3+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}\right)=-3$.

Donc la droite d d'équation $y=x-3$ est une asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction i.

129 **1. a)** Pour tout réel $x\neq 0$,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{7x^2+2x+4}{7x^2}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{7x^2\left(1+\dfrac{2}{7x}+\dfrac{4}{7x^2}\right)}{7x^2}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=1+\dfrac{2}{7x}+\dfrac{4}{7x^2}$

D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Donc les fonctions f et g sont équivalentes en $+\infty$.

b) Pour tout réel $x\neq 0$,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{5x}{\dfrac{x^3+3x+2}{x^2+3}}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{5x^3+15x}{x^3+3x+2}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{5x^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=5\times\dfrac{1+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{5x^3}}$

D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=5$.

Donc les fonctions f et g ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

c) Pour tout réel x,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x-1}}=e$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=e$.

Donc les fonctions f et g ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

2. a) $g(x)=4x^3$ **b)** $g(x)=3x$

3. a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$. (voir exercice 82 p. 248)

Donc les fonctions f et g sont équivalentes en 0.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\dfrac{5x^3+3x-2}{x^2+3}}=0$.

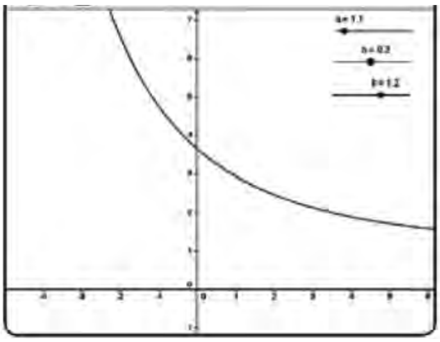
Donc les fonctions f et g ne sont pas équivalentes en 0.

130 **a)** Avec un logiciel de calcul formel on obtient $f(0{,}5)=200$; $f(0{,}4)=200$; $f(0{,}3)=200$; $f(0{,}2)=347$; $f(0{,}1)=0$; $f(0{,}05)=0$; $f(0{,}01)=0$.

b) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x^{40} + 200 \times x^{20}}{x^{20}} = x^{20} + 200$.

c) Donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 200$.

131 **1.**



2. Pour $x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x) = -abk\exp(ke - bx - bx)$. Or $\exp(ke - bx - bx) > 0$ et $a > 0$ donc $f'(x)$ est du signe contraire de $b \times k$.

3. a) $b > 0, k > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} ke^{-bx} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	ae^k	a

b) $b > 0, k < 0$

On a de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	ae^k	a

c) $b < 0, k > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} ke^{-bx} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	ae^k	$+\infty$

d) $b < 0, k < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} ke^{-bx} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	ae^k	0

132 • Pour tout réel $x > 1$,

$$f(x) = x\frac{x\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x-1}\right)}{x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}$$

c'est-à-dire $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x-1}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$.

D'après la limite d'un produit

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x-1} = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

D'après la limite d'une somme

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x-1}\right) = +\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

• Pour tout réel $x > 1$,

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1 + (x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}} + \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \frac{(x\sqrt{x} - 1)(x\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1} \times (x\sqrt{x} + 1)} + \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1} \times (x\sqrt{x} + 1)} + \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1} \times (x\sqrt{x} + 1)} + \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x+1} \times (x\sqrt{x} + 1)} + \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$$

$\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x-1}(x^2 + x + 1)) = 0$

et $\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x+1} \times (x\sqrt{x} + 1)) = 2\sqrt{2}$.

D'après la limite d'un quotient

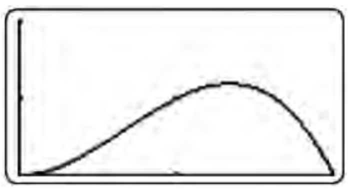
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x+1} \times (x\sqrt{x} + 1)} = 0$.

$\lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x+1}) = \sqrt{2}$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}} = 0$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

133 Voici la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$:



f est une fonction périodique de période $T = 2$, f n'a pas de limite en $+\infty$.

9 Compléments sur la dérivation

Questions-Tests

1 **a)** $f(0) = 0$

b) f est positive sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

c) Pour tout réel x, $f'(x) = -2e^x$.

2 **a)** $f'(0) = -5$

b) $g'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

c) $h'(1) = -1$

3 **a)** f est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$

b) f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$

4 **a)** Pour tout réel x, $f'(x) = 3e^{3x+1}$.

b) Pour tout réel x, $g'(x) = 15(5x+1)^2$.

5 **a)** $f(2) = 2$

b) $f'(2) = -1$

c) Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est $y = -x + 4$.

Découvrir

1 Composée de deux fonctions

1 $p(2) = 65 \times 2 + 5 = 135$

$r(135) = 90 \times 135 + 0{,}9e^{-135} = 12\,150 + 0{,}9e^{-135}$

Le revenu de l'agriculteur est d'environ 12 150 €.

2 **a)**

$$x \mapsto \underbrace{p(x)}_{X} \mapsto \underbrace{n(p(x))}_{r(X)} = 5\,850x + 450 + 0{,}9e^{-65x-5} \quad (rop)$$

En effet, $r(p(x)) = r(65x+5)$

donc $r(p(x)) = 90(65x+5) + 0{,}9e^{-65x-5}$

et $r(p(x)) = 5\,850x + 450 + 0{,}9e^{-65x-5}$

b) $(r \circ p)(2) = 5850 \times 2 + 450 + 0{,}9e^{-65\times 2-5}$

$(r \circ p)(2) = 12150 + 0{,}9e^{-135}$

3 **a)** $(r \circ p)'(x) = 5850 + 0{,}9 \times (-65)e^{-65x-5}$

$(r \circ p)'(x) = 5850 - 58{,}5e^{-65x-5}$

$r'(X) = 90 - 0{,}9e^{-X}$

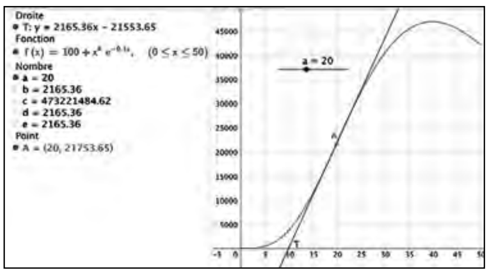
donc $r'(p(x)) = 90 - 0{,}9e^{-65x-5}$

b) $(r' \circ p)(x) \times p'(x) = (90 - 0{,}9e^{-65x-5}) \times 65$

Ainsi $(r' \circ p)(x) \times p'(x) = 5850 - 58{,}5e^{-65x-5}$ et $(r \circ p)'(x) = (r' \circ p)(x) \times p'(x)$.

2 Convexité d'une fonction

1 **a) b)**



2 Il semble que :

a) la vitesse de propagation augmente sur l'intervalle $[0\,;20]$;

b) la courbe représentation $\mathscr{C}_f$ de f est située au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[0\,;20]$.

On remarque qu'il s'agit du même intervalle qu'au **a)**.

3 Il semble que :

a) la vitesse de propagation diminue sur l'intervalle $[20\,;50]$;

b) la courbe $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[20\,;50]$.

On remarque qu'il s'agit du même intervalle qu'au **a)**.

Savoir-faire

3 • $f(1) = g(1) = 1$, les deux courbes passent donc par le point $A(1\,;1)$.
• Pour tout réel x, $f'(x) = -\mathrm{e}^{x-1}$ et $g'(x) = 4x - 5$.
Ainsi, $f'(1) = g'(1) = -1$.
• Les tangentes en A à chacune des deux courbes ont le même coefficient directeur ; elles sont donc confondues.

4 $\mathscr{C}_2$ représente f' et $\mathscr{C}_1$ représente f.
En effet, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[-2\,;0]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-3\,;-2]$ et $[0\,;1]$. Cela est cohérent avec le fait que f est croissante sur $[-2\,;0]$ et f est décroissante sur $[-3\,;-2]$ et $[0\,;1]$.

7 **a)** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par l'enchaînement :

$$x \xmapsto{u} \underbrace{x^2 - 5x}_{X} \xmapsto{v} \underbrace{(x^2 - 5x)^3}_{X^3}.$$

f est donc la composée de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - 5x$ suivie de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$.
b) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par l'enchaînement :

$$x \xmapsto{u} \underbrace{5x^2 + 7}_{X} \xmapsto{v} \underbrace{\sqrt{5x^2 + 7}}_{\sqrt{X}}.$$

f est donc la composée de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 5x^2 + 7$ suivie de la fonction racine carrée définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

8 **a)** La fonction g est définie par l'enchaînement :

$$x \xmapsto{\exp} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{X} \xmapsto{v} \frac{\mathrm{e}^x}{\underbrace{\mathrm{e}^x + 1}_{\frac{X}{X+1}}}.$$

g s'écrit donc comme la composée de la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ suivie de la fonction v définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $v(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
b) Pour tout réel x, $g(x) = (\mathrm{e}^x)^2 - 4\mathrm{e}^x$.
La fonction g est définie par l'enchaînement :

$$x \xmapsto{\exp} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{X} \xmapsto{v} \underbrace{(\mathrm{e}^x)^2 - 4\mathrm{e}^x}_{X^2 - 4X}.$$

g s'écrit donc comme la composée de la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$ suivie de la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = x^2 - 4x$.

9 La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction V : $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction u : $x \mapsto x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$u(x) = x - 1 \qquad u'(x) = 1$

$v(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad v'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Ainsi $f'(x) = 1 \times \sqrt{x^2 + 1} + (x - 1) \times \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 + x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

et $f'(x) = (2x^2 - x + 1) \times \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1}$.

10 La fonction u : $x \mapsto x^2 - 3x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. h est la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x :
$u(x) = x^2 - 3x + 1 \qquad u'(x) = 2x - 3$
Ainsi $f'(x) = (2x - 3)\mathrm{e}^{x^2 - 3x + 1}$

13 **a)** • La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur $[-3\,;1]$, f est donc concave sur $[-3\,;1]$.
• La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[1\,;3]$, f est donc convexe sur cet intervalle.
b) • La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[-3\,;0]$, f est donc concave sur cet intervalle.
• La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[0\,;3]$, f est donc convexe sur cet intervalle.
c) • La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur les intervalles $[-3\,;-1]$ et $[1\,;3]$; f est donc convexe sur chacun de ces intervalles.
• La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[-1\,;1]$; f est donc concave sur cet intervalle.
d) • La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[-3\,;-1]$, f est donc concave sur cet intervalle.
• La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[-1\,;3]$, f est donc convexe sur cet intervalle.

14 D'après le graphique, la courbe $\mathscr{C}$ traverse sa tangente au point B dont l'abscisse est sensiblement égale à $-0{,}5$. B est le point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

17 • La fonction f' est croissante sur les intervalles $[-6\,;-3]$ et $[2\,;5]$; la fonction f est donc convexe sur chacun de ces intervalles.
• La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-3\,;2]$, la fonction f est donc concave sur cet intervalle.

La courbe représentative de f admet donc deux points d'inflexion, d'abscisses -3 et 2.

18 **a)** Pour tout réel x,

$f'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x = xe^x$.

$f''(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x$.

b) Pour tout réel x, $e^x \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x+1$.

D'où le tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

c) Sur $]-\infty ; -1]$, $f''(x) \leqslant 0$ donc f est concave.

Sur $[-1 ; +\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ donc f est convexe.

f'' s'annule en -1 en changeant de signe, donc $\mathscr{C}$ admet le point $A(-1 ; -2e^{-1})$ pour point d'inflexion.

20 **a)** La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 3]$,

$f'(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2 + 5x$ et $f''(x) = x^3 - 2x + 5$.

b) Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, renvoie un encadrement d'amplitude 10^{-2} de i.

```
from math import*

def fseconde(x):
    y=x**3-2*x+5
    return y

def Inflexion():
    x=-3
    while fseconde(x)<=0:
        x=x+0.01
    x1=round(x-0.01,2)
    x2=round(x,2)
    c="i compris entre", x1, "et",x2
    return c
```

Après exécution, on obtient l'affichage :

```
>>> Inflexion()
('i compris entre', -2.1, 'et', -2.09)
```

Le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ a donc une abscisse i telle que $-2{,}10 \leqslant i \leqslant -2{,}09$.

21 **a)** La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 1]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$,

$f'(x) = -1 \times e^x - x \times e^x - 3x^2 = (-1-x)e^x - 3x^2$,

$f''(x) = -1 \times e^x + (-1-x)e^x - 6x = (-2-x)e^x - 6x$.

$f''(-1) > 0$

b) Voici un programme, écrit en langage Python, qui renvoie un encadrement d'amplitutde 0,001 de i.

```
from math import*

def fseconde(x):
    y=(-2-x)*exp(x)-6*x
    return y

def Inflexion():
    x=-1
    while fseconde(x)>=0:
        x=x+0.001
    x1=round(x-0.001,3)
    x2=round(x,3)
    c="i compris entre", x1, "et",x2
    return c
```

Après exécution, on obtient l'affichage :

```
>>> Inflexion()
('i compris entre', -0.234, 'et', -0.233)
```

Le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$ a donc une abscisse i telle que $-0{,}234 \leqslant i \leqslant -0{,}233$.

Acquérir des automatismes

22 Réponse **(2)**. En effet, la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 a pour équation :

$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$, c'est-à-dire

$y = -3(x+1) + 2$ soit $y = -3x - 1$.

23 Sur l'intervalle $]-\infty ; -0{,}4]$, $f'(x) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[-0{,}4 ; +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$.

24 On observe que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La fonction f' est donc positive sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et négative sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

C'est donc la courbe 2 qui pourrait représenter f'.

25 **a)** On lit les coordonnées des points A, B, C et D.

$A(3 ; 1{,}5)$, $B(2 ; 0)$, $C(1 ; 0)$ et $D(0 ; -3)$.

• La courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 3 (resp. 0) une tangente de coefficient directeur égal à 1,5 (resp. -3).

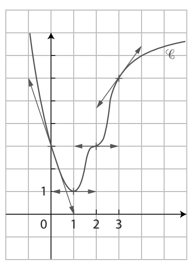
• La courbe $\mathscr{C}$ admet aux points d'abscisses 2 et 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

• De plus, en B, $\mathscr{C}'$ s'annule en changeant de signe, donc f change de sens de variation au point d'abscisse 2.

b) Sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$, $f'(x) \leqslant 0$ donc f est décroissante sur cet intervalle.

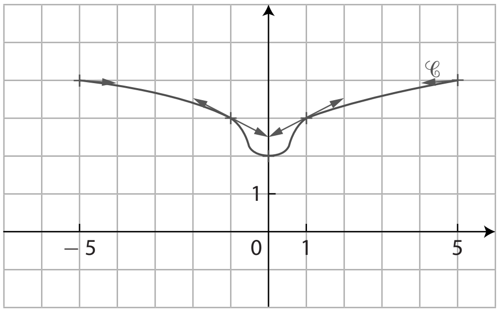
Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur cet intervalle.

Voici une allure possible de $\mathscr{C}$:



26 **a)** La fonction f' est négative sur l'intervalle $[-5\,;0]$, la fonction f est donc décroissante sur cet intervalle.
La fonction f' est positive sur l'intervalle $[0\,;5]$, la fonction f est donc croissante sur cet intervalle.

b)



27 **a)** $f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3x^2}{x^3} + \dfrac{x}{x^3} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

$f(x) = x^3\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} = 1$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} = 1$
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

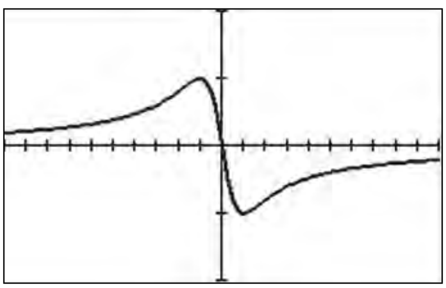
$3x^2 - 6x + 1 = 0$

$\Delta = 24 > 0$

$x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{24}}{6} = \dfrac{3 - \sqrt{6}}{3}$

$x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{6}}{3}$

28



fenêtre : $-10 \leqslant X \leqslant 10$, pas 1 et $-2 \leqslant Y \leqslant 2$, pas 1.
On conjecture à l'aide de la calculatrice que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

$g(x) = \dfrac{-2x}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{-2}{x\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$
donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$g'(x) = \dfrac{-2 \times (x^2+1) - (-2x) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2}$

c) Pour tout réel x, $(x^2+1)^2 \geqslant 0$, $g'(x)$ est donc du signe de $2x^2 - 2$.
Or $2x^2 - 2 = 0$ lorsque $x^2 = 1$ soit $x = 1$ ou $x = -1$.
On obtient :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

29 **a)** Pour tout réel x, $g'(x) = 2$ donc $g'(1) = 2$.
b) Pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x$.
$(f' \circ g)(1) = f'(g(1)) = f'(2) = \mathrm{e}^2$.
c) $(f' \circ g)'(1) = (f' \circ g)(1) \times g'(1) = 2\mathrm{e}^2$.

30 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, f s'écrit $f = u^4$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$.
On applique la formule $(u^4)' = 4u^3 \times u'$, ainsi
$f'(x) = 4 \times (x^2+1)^3 \times 2x = 8x(x^2+1)^3$

31 **a)** Pour tout réel x,
$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(-3x+4) = (-3x+4)^3$.
b) La fonction $v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
• $v \circ u$ s'écrit sur la forme $v \circ u = w^3$.
On applique la formule de dérivée de u^n, $(w^n)' = nw^{n-1} \times w'$. Ainsi pour tout réel x, $(v \circ u)'(x) = 3 \times (-3x+4)^2 \times (-3) = -9(-3x+4)^3$.
• On applique la formule de dérivée de $v \circ u$, $(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x)$.
Ainsi pour tout réel x, $u'(x) = -3$, $v'(x) = 3x^2$ et $(v \circ u)'(x) = v'(-3x+4) \times (-3) = 3(-3x+4)^2 \times (-3)$.
On obtient $(v \circ u)'(x) = -9(-3x+4)^3$.

32 **a)** f s'écrit sur la forme $v \circ u$ où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ et V est la fonction exponentielle définie sur $\mathbb{R}$.
b) Les fonctions u, v et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \dfrac{1 \times (x^2+1) - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$v'(x) = e^x$ et
$f'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}} \times \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

33 Dans chaque cas, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 10]$.
Pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 10]$,
a) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$ et $f'(1) = \dfrac{5}{2\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{12}$.
b) $f'(x) = 5(2-x)^4 \times (-1)$ et $f'(1) = -5$.
c) $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$ et $f'(1) = 2e^2$.
d) $f'(x) = 2(1+e^{-x+1}) \times (-1e^{-x+1})$
et $f'(1) = 2(1+e^0) \times (-1e^0) = -4$.

34 **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$f'(x) = 4(x^2+5x)^3 \times (2x+5)$
$f'(x) = (8x+20)(x^2+5x)^3$.
b) f est le produit de deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$; f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x,
$u(x) = x-5$ $\quad$ $u'(x) = 1$
$v(x) = (1-8x)^2$ $\quad$ $v'(x) = 2(1-8x) \times (-8)$
$v'(x) = -16(1-8x)$.
Ainsi $f'(x) = 1 \times (1-8x)^2 + (x-5) \times (-16)(1-8x)$
$f'(x) = (1-8x)(1-8x-16x+80)$
$f'(x) = (1-8x)(-24x+81)$

35 **a)** f s'écrit sous la forme $\dfrac{1}{u}$ où u est la fonction définie sur l'intervalle $]4 ; +\infty[$ par $u(x) = (4-x)^2$.
f est dérivable sur l'intervalle $]4 ; +\infty[$, et pour tout réel x de l'intervalle $]4 ; +\infty[$,
$u'(x) = 2(4-x) \times (-1) = -2(4-x) = -8+2x$
et $f'(x) = \dfrac{-(-8+2x)}{((4-x)^2)^2} = \dfrac{8-2x}{(4-x)^4}$
b) f est le quotient de deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,
$u(x) = x+1$ $\quad$ $u'(x) = 1$
$v(x) = (1+x^2)^3$ $\quad$ $v'(x) = 3(1+x^2)^2 \times 2x$
$v'(x) = 6x(1+x^2)^2$
Ainsi $f'(x) = \dfrac{1 \times (1+x)^3 - (x+1) \times 6x(1+x^2)^2}{((1+x^2)^3)^2}$
$f'(x) = \dfrac{(1+x^2)^2(1+x^2-6x^2-6x)}{(1+x^2)^6}$
$f'(x) = \dfrac{-5x^2-6x+1}{(1+x^2)^4}$

36 **a)** f est dérivable sur l'intervalle $]-1 ; 1[$ et pour tout réel x de l'intervalle $]-1 ; 1[$,
$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$
b) f est le produit de deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x,
$u(x) = x+1$ $\quad$ $u'(x) = 1$
$v(x) = \sqrt{x^2+1}$ $\quad$ $v'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
Ainsi $f'(x) = 1 \times \sqrt{x^2+1} + (x+1) \times \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$f'(x) = \dfrac{x^2+1+x^2+x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{(2x^2+x+1)\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}$

37 **a)** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$f'(x) = -1e^{-x} - 8 \times 1e^{x+3} = -e^{-x} - 8e^{x+3}$.
b) f est le produit de deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x,
$u(x) = x^2+5$ $\quad$ $u'(x) = 2x$
$v(x) = e^{x^2-1}$ $\quad$ $v'(x) = 2xe^{x^2-1}$
Ainsi $f'(x) = 2x \times e^{x^2-1} + (x^2+5) \times 2xe^{x^2-1}$
$f'(x) = 2x(1+x^2+5)e^{x^2-1}$
$f'(x) = 2x(x^2+6)e^{x^2-1}$

38 **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-2x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
b) g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Pour tout réel $x \geqslant 0$,
$g'(x) = 3(1-2x)^2 \times (-2) = -6(1-2x)^2$.
Pour tout réel $x \geqslant 0$, $(1-2x)^2 \geqslant 0$ et $-6 < 0$ donc $g'(x) \leqslant 0$.
La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
c)

x	0	$+\infty$
$g(x)$	1 ↘	$-\infty$

39 **a)** Il semble que :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
• $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$,
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -4xe^{-2x^2+1}$.
Pour tout réel x, $e^{-2x^2+1} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-4x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

c) Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est :

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = -4e^{-1}(x-1) + e^{-1}$ et $y = -4e^{-1}x + 5e^{-1}$.

40 **a)** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$.

Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est :

$y = g'(a)(x-a) + g(a)$

soit $y = (2a-1)e^{a^2-a}(x-a) + e^{a^2-a}$

$y = (2a-1)e^{a^2-a}x + (-2a^2+a+1)e^{a^2-a}$.

b) Une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point A(1 ; 0) si, et seulement si,

$(2a-1)e^{a^2-a} + (-2a^2+a+1)e^{a^2-a} = 0$

ce qui équivaut à $-2a^2 + 3a = 0$

c'est-à-dire $a(-2a+3) = 0$.

Ainsi $a = 0$ ou $a = \dfrac{3}{2}$.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, d'équation $y = -x + 1$ passe donc par le point A.

La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$, d'équation $y = 2e^{\frac{3}{4}}x - 2e^{\frac{3}{4}}$ passe aussi par le point A.

41 **a)** f est le quotient de deux fonctions u et v dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, f est donc dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$,

$u(x) = x^2 + 4$ $\quad$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = \sqrt{2x}$ $\quad$ $v'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

$$\text{Ainsi } f'(x) = \frac{2x \times \sqrt{2x} - (x^2+4) \times \dfrac{1}{\sqrt{2x}}}{(\sqrt{2x})^2}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x \times 2x - x^2 - 4}{\sqrt{2x}}}{2x} = \frac{3x^2-4}{2x\sqrt{2x}}$$

b) Pour tout réel $x > 0$, $2x > 0$ et $\sqrt{2x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $3x^2 - 4$.

Ainsi

x	0		$\sqrt{\frac{4}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction f admet donc un minimum en $x = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

$3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = \dfrac{4}{3}$

$x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ ou $x = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

42 Le segment [AB] est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}$, la fonction f ne peut donc pas être convexe sur l'intervalle $[-4 ; 1]$.

43 **a)** La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2{,}5 ; 0]$ et f est convexe sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

La courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion sur l'origine O du repère.

b) La fonction f est concave sur les intervalles $[-3 ; -1{,}5]$ et $[1{,}5 ; 3]$ et f est convexe sur l'intervalle $[-1{,}5 ; 1{,}5]$.

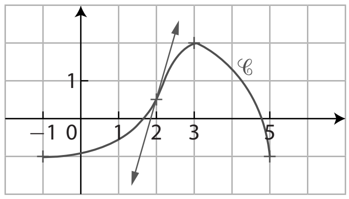
La courbe $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion d'abscisses $-1{,}5$ et $1{,}5$.

44 La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$, sa courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessous de ses tangentes sur $\mathbb{R}$.

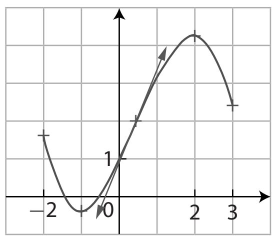
Ainsi, $\mathscr{C}$ est au-dessous de T et pour tout réel x, $f(x) \leqslant -2x + 3$.

En particulier $f(1) \leqslant -2 \times 1 + 3$ et $f(1) \leqslant 1$.

45



46



47 Il s'agit de la courbe ② car c'est la seule à avoir quatre points d'inflexion.

48 **a)** g est dérivable sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$ et pour tout réel $x > -\dfrac{1}{2}$,

$$g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$$

Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 24 est :

$y = g'(24)(x-24) + g(24)$ soit $y = \dfrac{1}{7}(x-24) + 7$

ou encore $y = \dfrac{1}{7}x + \dfrac{25}{7}$.

b) La fonction g est concave sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$, sa courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes.

Pour tout réel $x > -\dfrac{1}{2}$, on a donc :

$$g(x) \leqslant \frac{1}{7}x + \frac{25}{7}$$

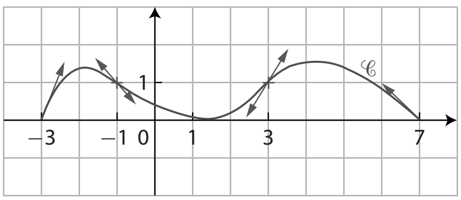
Ainsi $g(25) \leqslant \frac{1}{7} \times 25 + \frac{25}{7}$ et $\sqrt{51} \leqslant \frac{50}{7}$.

49 **a)** La foncion f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 6]$.
b) Une équation de T est :
$y = f'(4)(x-4) + f(4)$
Or $f'(4) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-1}{3-4} = 2$ et $f(4) = 1$.
Une équation de T est donc $y = 2x - 7$
c) La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 6]$, $\mathscr{C}$ est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[-1 ; 6]$.
Ainsi pour tout réel x de l'intervalle $[-1 ; 6]$ $f(x) \geqslant 2x - 7$ c'est-à-dire $0{,}5(x-2)^2 - 1 \geqslant 2x - 7$
$0{,}5(x-2)^2 \geqslant 2x - 6$ et $(x-2)^2 \geqslant 4x - 12$.

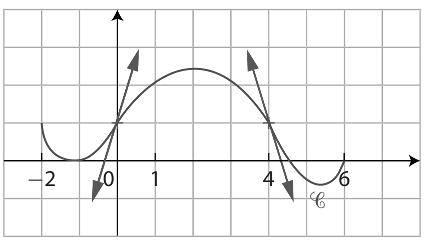
50 La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[-4 ; -1]$, la fonction f est donc convexe sur cet intervalle.
La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$, la fonction f est donc concave sur cet intervalle.

51 L'affirmation exacte est la (1) : la fonction h est convexe sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

52 **a)** La fonction f est concave sur les intervalles $[-3 ; -1]$ et $[3 ; 7]$ et f est convexe sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.
b)



53 **a)** La fonction f est convexe sur les intervalles $[-2 ; 0]$ et $[4 ; 6]$ et f est concave sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
b) • Il n'est pas possible que $f'(-2) = 1$ et $f'(0) = 0$.
En effet, pour tout réel x de l'intervalle $[-2 ; 0]$, $f''(x) \geqslant 0$ donc f' est croissante sur $[-2 ; 0]$.
$-2 < 0$ donc $f'(-2) < f'(0)$.
• Il est possible que $f'(0) = 0$ et $f'(4) = -1$.
En effet, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 4]$, $f''(x) \leqslant 0$ donc f' est décroissante sur $[0 ; 4]$.
$0 < 4$ donc $f'(0) > f'(4)$.
c)



54 **a)** f est convexe sur $\mathbb{R}$.
b) f est concave sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ et f est convexe sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
c) f est convexe sur les intervalles $]-\infty ; -1]$ et $[3 ; +\infty[$ et f est concave sur l'intervalle $[-1 ; 3]$.

55 **a)** Si la courbe rouge est celle de f'' alors pour tout x de l'intervalle $[1 ; 4]$, $f''(x) \leqslant 0$ et f' est décroissante sur cet intervalle, ce qui n'est pas cohérent avec la courbe verte.
La courbe rouge est donc celle de f' et la verte est celle de f''.
b) Pour tout réel x de $[0 ; 2]$, $f''(x) \leqslant 0$, la fonction f est donc concave sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
• Pour tout réel x de l'intervalle $[2 ; 4]$, $f''(x) \geqslant 0$; la fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[2 ; 4]$.
• La courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

56 **a)** La fonction f est concave sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et convexe sur l'intervalle $[1 ; 3]$.
b) La fonction f' est donc décroissante sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1 ; 3]$.
c) Pour tout réel x de l'intervalle $[-1 ; 1]$ $f''(x) \leqslant 0$ et pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; 3]$ $f''(x) \geqslant 0$.
C'est donc la courbe ③ qui représente la fonction f''.

57 **a)** La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$f'(x) = -1\,x\,e^{2x} + (2-x) \times 2e^{2x}$
$f'(x) = (3-2x)e^{2x}$
et $f''(x) = -2 \times e^{2x} + (3-2x) \times 2e^{2x}$
$f''(x) = (-4x+4)e^{2x} = -4(x-1)e^{2x}$.
b) Pour tout réel x, $e^{2x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $-4x+4$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	–	

La fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$ et est concave sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

58 **a)**

x	1		2		$+\infty$
$3x^2-3x-6$	‖	–		+	
$(x-1)^3$	0	+	0	+	
$f''(x)$	0	–	0	+	

$3x^2 - 3x - 6 = 0$
$\Delta = 81$
$x_1 = -1$
$x_2 = 2$
La fonction f est donc concave sur l'intervalle $]1 ; 2]$ et est convexe sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.
La courbe représentative de f admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

b) Pour tout réel x, $e^{0,2x-3} > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $-0,08x + 0,4$.

Ainsi on obtient :

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;5]$ et concave sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$.

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion d'abscisse 5.

c) Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{5x+2} > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $4x - 10$.

x	0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

La fonction f est donc concave sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{5}{2}\right]$ et convexe sur l'intervalle $\left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{5}{2}$.

59 **a)** La fonction k' est le produit de deux fonctions u et v dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

$u(x) = (3x-12)^3$ $\quad$ $u'(x) = 3(3x-12)^2 \times 3$

$u'(x) = 9(3x-12)^2$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

Ainsi $k''(x) = 9(3x-12)^2 \times e^x + (3x-12)^3 \times e^x$

$k''(x) = (3x-12)^2(9 + 3x - 12)e^x$

$k''(x) = (3x-12)^2(3x-3)e^x$.

b)

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(3x\ 12)^2$		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$3x-3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
e^x		$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
$k''(x)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	

La fonction k est donc concave sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ et convexe sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

La courbe représentative de la fonction k admet un point d'inflexion d'abscisse 1.

60 **a) (3)** La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0\,;1]$, f est donc dérivable sur $[0\,;1]$. Pour tout réel x de $[0\,;1]$,

$u(x) = 1 - x$ $\quad$ $u'(x) = -1$

$v(x) = e^{3x}$ $\quad$ $v'(x) = 3e^{3x}$

Donc $f'(x) = -1 \times e^{3x} + (1-x) \times 3e^{3x}$

$f'(x) = (2-3x)e^{3x}$.

De même, la fonction f' est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$,

$f''(x) = -3 \times e^{3x} + (2-3x) \times 3e^{3x}$

$f''(x) = (3-9x)e^{3x} = 3(1-3x)e^{3x}$.

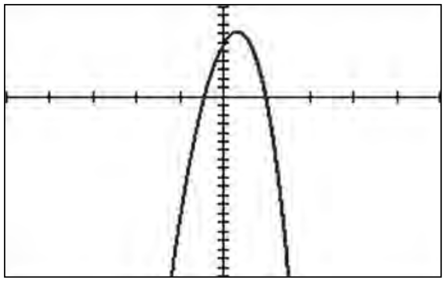
Ainsi, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $e^{3x} > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $3 - 9x$.

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc concave sur l'intervalle $\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$.

b) (1) La courbe représentative de f admet comme point d'inflexion le point $\mathrm{I}\left(\frac{1}{3}\,;f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$ soit $\mathrm{I}\left(\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}e\right)$.

61 **a)**



fenêtre $-5 \leqslant X \leqslant 5$, pas 1 et $-20 \leqslant Y \leqslant 10$, pas 1.

À l'aide de la calculatrice, on conjecture que la fonction f est concave sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 - 24x + 8$

$f''(x) = -12x^2 - 12x - 24$.

$\Delta = -1\,008 < 0$.

Ainsi, pour tout réel x, $f''(x) \leqslant 0$.

c) On déduit de la question précédente que la fonction f est concave sur $\mathbb{R}$.

62 **a)** La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$f'(x) = \frac{1}{5}(e^x + e^{-x})$ et $f''(x) = \frac{1}{5}(e^x - e^{-x})$

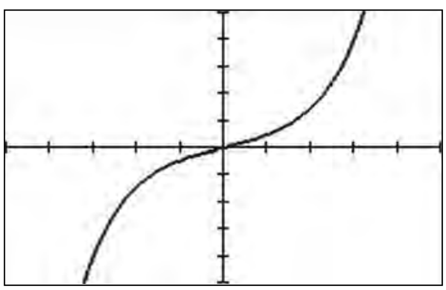
$f''(x) \geqslant 0$ équivaut à $e^x \geqslant e^{-x}$ soit $x \geqslant -x$ ou encore $2x \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$.

On obtient le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

b) La fonction f est donc concave sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et convexe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c)



fenêtre $-5 \leqslant X \leqslant 5$, pas 1 et $-5 \leqslant Y \leqslant 5$, pas 1.

On retrouve bien les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.

63 La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$f'(x) = -6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = -12x - 6$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$ et concave sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

64 La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{-2\times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-4x}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4\times(x^2+2)^2 - (-4x)\times 2(x^2+2)\times 2x}{(x^2+2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+2)(-4x^2-8+16x^2)}{(x^2+2)^4} = \frac{12x^2-8}{(x^2+2)^3}$$

On obtient le tableau :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$12x^2-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x^2+2)^3$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$12x^2 - 8 = 0$

$$x^2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

La fonction f est donc convexe sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et $\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\,;+\infty\right[$ et f est concave sur l'intervalle $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}}\,;\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

La courbe représentative de f admet deux points d'inflexion d'abscisse $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

65 La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$f'(x) = 1 \times e^{0,4x-1} + x \times 0,4e^{0,4x-1}$

$f'(x) = (1 + 0,4x)e^{0,4x-1}$

$f''(x) = 0,4 \times e^{0,4x-1} + (1 + 0,4x) \times 0,4e^{0,4x-1}$

$f''(x) = (0,8 + 0,16x)e^{0,4x-1}$

Pour tout réel x, $e^{0,4x-1} > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $0,8 + 0,16x$.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f est donc concave sur l'intervalle $]-\infty\,;-5]$ et convexe sur l'intervalle $[-5\,;+\infty[$.

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion d'abscisse -5.

Pour se tester

66 **1.** D **2.** A **3.** B **4.** B **5.** A

67 **1.** A, D **2.** A, D **3.** A, C, D

68 **1.** Faux. En effet, la fonction g est convexe sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$, donc sur l'intervalle $[0\,;2]$.

Ainsi, pour tout réel x de $[0\,;2]$, $g''(x) \geqslant 0$.

2. Vraie. En effet, la fonction h est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}$.

Ainsi pour tout réel x, $h(x) \geqslant -7x + 4$.

En particulier, $h(-2) \geqslant -7 \times (-2) + 4$, soit $h(-2) \geqslant 18 \geqslant 10$.

S'entraîner

69 **1.** Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{a+b}{2}\,;\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$.

La fonction f est convexe sur I, donc pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}$, le segment [AB] est situé au-dessus de $\mathscr{C}$ entre A et B.

On en déduit que le point M est situé au-dessus du point M′ de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse $\frac{a+b}{2}$ et donc d'ordonnée $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Ainsi, en comparant les ordonnées des points M et M′, on obtient $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

2. Démontrons que :

si f est concave sur I alors pour tous réels a et b de I :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{a+b}{2} ; \dfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)$.

La fonction f est concave sur I, donc pour tous points A et B distincts de $\mathscr{C}$, le segment [AB] est situé en-dessous de $\mathscr{C}$ entre A et B.

On en déduit que le point M est situé en-dessous du point M′ de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ et donc d'ordonnée $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Ainsi, en comparant les ordonnées des points M et M′, on obtient $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

70 • La droite (AC) a pour coefficient directeur $m = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

La droite (AC) a donc pour équation $y = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}x + p$ où p désigne un nombre réel.

Or, le point A$(a\,; f(a))$ appartient à la droite (AC) donc :

$f(a) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}a + p$ et $p = f(a) - \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}a$.

Ainsi, la sécante (AC) a pour équation :

$y = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}x + f(a) - \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}a$

soit $y = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-a) + f(a)$.

• Le point B est au-dessous de (AC) donc l'ordonnée du point B est inférieure à l'ordonnée du point de la droite (AC) d'abscisse b.

Ainsi $f(b) \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a) + f(a)$

• soit $f(b) - f(a) \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a)$

Or $a < b$ donc $b - a > 0$, on obtient alors $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

• Le point C $(c\,; f(c))$ appartient à la droite (AC) donc :

$f(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}c + p$ et $p = f(c) - \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}c$.

La sécante (AC) a aussi pour équation

$y = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}x + f(c) - \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}c$

soit $y = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(x-c) + f(c)$.

• Le point B étant au-dessus de (AC), l'ordonnée du point B est inférieure à l'ordonnée du point de (AC) d'abscisse b.

On obtient : $f(b) \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-c) + f(c)$

soit $f(b) - f(c) \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-c)$

Or $b < c$ donc $b - c < 0$ et $\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c} \geqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

ou encore $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

2. Le coefficient directeur (pente) de la droite (AB) est donc inférieure au coefficient directeur de la droite (AC), lui-même inférieur au coefficient directeur de la droite (BC).

71 **a)** Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$$y = e^0(x-0) + e^0 \text{ soit } y = x + 1.$$

b) La fonction exponentielle est deux fois dérivable et a pour dérivée seconde e^x.

Pour tout réel x, $e^x > 0$, la fonction exponentielle est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}$.

Ainsi pour tout réel x, $e^x \geqslant x + 1$.

Or $x + 1 > x$, on en déduit que pour tout réel x, $e^x > x$.

72 **Parcours 1**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = 3(-0{,}1x^2 + x - 1)^2 \times (-0{,}2x + 1)$

$f'(x) = (-0{,}6x + 3)(-0{,}1x^2 + x - 1)^2$

$-0{,}6x + 3 = 0$ pour $x = \dfrac{-3}{-0{,}6} = 5$

$-0{,}1x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = 0{,}6 > 0$

$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{0{,}6}}{-0{,}2} \approx 8{,}9$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{0{,}6}}{-0{,}2} \approx 1{,}1$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{-1+\sqrt{0,6}}{-0,2}$		5		$\frac{-1-\sqrt{0,6}}{-0,2}$		$+\infty$
$-0{,}6x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$(-0{,}1x^2+x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

On en déduit que la fonction f est croissante sur $]-\infty\,; 5]$ et décroissante sur l'intervalle $[5\,; +\infty[$.

D'après la question précédente, la fonction f admet un maximum en $x = 5$.

Parcours 2

a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$g'(x) = 3 \times (2x) \times (x^2 - 2)^2$

$g'(x) = 6x(x^2 - 2)^2$

b) Pour tout réel x, $(x^2-2)^2 \geqslant 0$, $g'(x)$ est donc du signe de $6x$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	-8	$\nearrow$	

c) On déduit du tableau précédent que g admet un minimum égal à -8 en $x=0$.

73 **a)** $\mathscr{A}(x) = \text{ON} \times \text{NM} = x \times f(x) = xe^{-x^2}$.

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;2]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;2]$,

$f'(x) = 1 \times e^{-x^2} + x \times (-2x)e^{-x^2}$

$f'(x) = (1-2x^2)e^{-x^2}$.

Pour tout x de $[0\,;2]$, $e^{-x^2} > 0$, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-2x^2$.

x	0		$\sqrt{\frac{1}{2}}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$1-2x^2=0$

$x^2 = \dfrac{1}{2}$

$x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

La fonction f admet donc un maximum pour $x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

Le point M doit donc avoir une abscisse égale à $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ pour que l'aire du rectange ONMP soit maximum.

74 **a)** Il semble que l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 soit $y=0$.

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[-10\,;10]$ et pour tout réel de cet intervalle,

$f'(x) = 3(0{,}1x+0{,}5e^{-0{,}2x})^2 \times (0{,}1-0{,}1e^{-0{,}2x})$

$f'(x) = (0{,}3-0{,}3e^{-0{,}2x})(0{,}1x+0{,}5e^{-0{,}2x})^2$

c) La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$y = (0{,}3-0{,}3e^0)(0{,}5e^0)^2x + (0{,}5e^0)^3$

$y = 0{,}125$.

La conjecture émise à la question **a)** est donc fausse.

75 **1. a)** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel t,

$g'(t) = e^t + 1 \times e^t + t \times e^t = (2+t)e^t$.

b) Pour tout réel t, $e^t > 0$, $g'(t)$ est donc du signe de $2+t$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction g admet donc un minimum en $t=-2$.

c) $g(-2) \approx 0{,}9$, on en déduit que pour tout réel t, $g(t) \geqslant g(-2) > 0$.

2. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $t \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{1 \times \left(1+e^{\frac{1}{t}}\right) - t \times \dfrac{-1}{t^2}e^{\frac{1}{t}}}{\left(1+e^{\frac{1}{t}}\right)^2}$$

$$f'(t) = \frac{1+e^{\frac{1}{t}} + \dfrac{1}{t}e^{\frac{1}{t}}}{\left(1+e^{\frac{1}{t}}\right)^2}$$

b) Pour tout réel $t \neq 0$, on pose $\text{T} = \dfrac{1}{t}$.

On a alors $f'(t) = \dfrac{1+e^{\text{T}}+\text{T}e^{\text{T}}}{(1+e^{\text{T}})^2} = \dfrac{g(\text{T})}{(1+e^{\text{T}})^2}$

Or pour tout réel T, $g(\text{T}) > 0$ et $(1+e^{\text{T}}) > 0$, on en déduit que pour tout réel $t \neq 0$, $f'(t) > 0$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

76 **Parcours 1**

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 5x^4-6x^2-4$ et

$f''(x) = 20x^3-12x = 4x(5x^2-3)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{5}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{5}}$		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$5x^2-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$5x^2-3=0$

$x^2 = \dfrac{3}{5}$

$x = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

La fonction f est donc concave sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right]$ et $\left[0\,;\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right]$ et f est convexe sur les intervalles $\left[-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,;0\right]$ et $\left[\sqrt{\dfrac{3}{5}}\,;+\infty\right[$.

Parcours 2

a) La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$g'(x) = 12x^4-6x^2$

b) $g''(x) = 48x^3-12x = 12x(4x^2-1)$

$g''(x) = 12x((2x)^2-1^2) = 12x(2x-1)(2x+1)$

c)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$12x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

d) On déduit du tableau de signes de g'' que g est concave sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$ et $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ et que g est convexe sur $\left[-\frac{1}{2}\,;0\right]$ et $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

77 **a)** Il semble que la croissance de production commence à diminuer à partir de 400 employés.

b) La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;10]$. Pour tout réel x de cet intervalle,

$f'(x)=\frac{3}{4}x-\frac{3}{32}x^2$

$f''(x)=\frac{3}{4}-\frac{3}{16}x.$

x	0		4		10
$f''(x)$		+	0	−	

$\frac{3}{4}-\frac{3}{16}x=0$

$x=\frac{3}{4}\times\frac{16}{4}=4$

La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0\,;4]$ et est concave sur l'intervalle $[4\,;10]$. C'est donc bien à partir de 400 employés que la croissance de production commence à diminuer.

78 **a)** Pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;50]$,

$h''(x)=\frac{45}{8}e^{-0,25x+6}\times\frac{e^{-0,25x+6}-1}{(e^{-0,25x+6}+1)^3}$

b) $e^{-0,25x+6}-1>0$ équivaut à $e^{-0,25x+6}>e^0$ soit $-0,25x+6>0$ c'est-à-dire $x<\frac{-6}{-0,25}$ ou encore $x<24$.

$\mathcal{S}=[10\,;24[$.

c) Pour tout réel x de l'intervalle $[10\,;50]$, $\frac{45}{8}e^{-0,25x+6}>0$ et $(e^{-0,25x+6}+1)^3>0$, $h''(x)$ est donc du signe de $e^{-0,25x+6}-1$.

Ainsi :

x	10		24		50
$h''(x)$		+	0	−	

La fonction h est donc convexe sur l'intervalle $[10\,;24]$ et concave sur l'intervalle $[24\,;50]$.

d) La fonction envie est la fonction h'.

Or $h''(x)$ est négative sur l'intervalle $[24\,;50]$, la fonction h' est donc décroissante sur cet intervalle.

La fonction envie décroît donc à partir d'un salaire égal à 24 000 €.

e) $h(x)=80$ lorsque $\frac{90}{1+e^{-0,25x+6}}=80$ c'est-à-dire $90=80+80e^{-0,25x+6}$ soit $e^{-0,25x+6}=\frac{1}{8}$ et $-0,25x+6=\ln\left(\frac{1}{8}\right)$ ainsi $x=\frac{-\ln(8)-6}{-0,25}\approx 32.$

La fonction satisfaction atteint 80 pour un salaire annuel d'environ 32 000 €.

79 **a)** La fonction f semble convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et concave sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x)=-4\times e^{-x}-4x\times(-1)e^{-x}=(4x-4)e^{-x}$.

Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$y=4e^{-2}(x-2)-8e^{-2}$

$y=4e^{-2}(x-4)$

c) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

$f''(x)=4\times e^{-x}+(4x-4)\times(-1e^{-x})$

$f''(x)=(8-4x)e^{-x}$

Pour tout réel x, $e^{-x}>0$, $f''(x)$ est donc du signe de $8-4x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	

La fonction f est donc bien convexe sur l'intervalle $]-\infty\,;2]$ et concave sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de $]-\infty\,;2]$, la courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessus de ses tangentes.

Ainsi pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;2]$, $f(x)\geqslant 4e^{-2}(x-4)$.

d) 1,5 appartient à l'intervalle $]-\infty\,;2]$ donc $f(1,5)\geqslant 4e^{-2}(1,5-4)$ et $-6e^{-1,5}\geqslant -10e^{-2}$.

Ainsi $\frac{e^{-1,5}}{e^{-2}}\leqslant\frac{-10}{-6}$ et $e^{0,5}\leqslant\frac{5}{3}$.

On vérifie à l'aide de la calculatrice :

$e^{0,5}\approx 1,65$ et $\frac{5}{3}\approx 1,67$.

80 **1. a)** La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

$f'(x)=-2e^{-2x+1}+2$

$f''(x)=4e^{-2x+1}$

Pour tout réel x, $f''(x)>0$, la fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est :

$y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$y=(-2e^0+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)+(e^0-1)$

$y=0$

2. a) La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}$, en particulier la tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Ainsi pour tout réel x, $f(x)\geqslant 0$.

b) $f'(x)\geqslant 0$ équivaut à $e^{-2x+1}\leqslant\frac{-2}{-2}$

soit $-2x+1\leqslant\ln(1)$ ou encore $x\geqslant\frac{-1}{-2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction f admet un minimum égal à 0 sur $\mathbb{R}$, ainsi pour tout réel x $f(x) \geqslant 0$.

81 **a)** Faux : f'' doit s'annuler en changeant de signe.

Réciproque : si $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse α alors f'' s'annule en α. La réciproque est vraie.

b) Vraie.

Réciproque : si f admet un point d'inflexion sur I, alors f est convexe, puis concave sur I.

La réciproque est fausse : la fonction f peut être concave, puis convexe en I.

82 **a)** f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x$ et $g(x) = -x + 1$.

Ces deux fonctions sont décroissantes sur $\mathbb{R}$.

La composée $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+1) = -2(-x+1)$

$(f \circ g)(x) = 2x - 2$.

La fonction $f \circ g$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction cube change de convexité en 0, elle n'est donc ni convexe, ni concave sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

83 **Partie A**

1. La fonction f est dérivable et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{-\mathrm{K} \times (-r)\mathrm{e}^{-r(x-a)}}{(1+\mathrm{e}^{-r(x-a)})^2} = \frac{\mathrm{K}r\mathrm{e}^{-r(x-a)}}{(1+\mathrm{e}^{-r(x-a)})^2}$$

Or pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$rf(x)\left(1 - \frac{f(x)}{\mathrm{K}}\right) = \frac{r\mathrm{K}}{1+\mathrm{e}^{-r(x-a)}}\left(1 - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-r(x-a)}}\right)$$

$$rf(x)\left(1 - \frac{f(x)}{\mathrm{K}}\right) = \frac{\mathrm{K}r}{1+\mathrm{e}^{-r(x-a)}} \times \frac{\mathrm{e}^{-r(x-a)}}{1+\mathrm{e}^{-r(x-a)}}$$

Ainsi pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = rf(x)\left(1 - \frac{f(x)}{\mathrm{K}}\right)$

La fonction f est bien solution de l'équation (E).

2. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $(1 + \mathrm{e}^{-r(x-a)})^2 \geqslant 0$ et K et n étant des constantes positives, $\mathrm{K}n\mathrm{e}^{-r(x-a)} \geqslant 0$; on en déduit que pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant 0$.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. La fonction f' est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f''(x) = \frac{-\mathrm{K}r^2\mathrm{e}^{-r(x-a)} \times (1+\mathrm{e}^{-r(x-a)})^2 - \mathrm{K}r^2\mathrm{e}^{-r(x-a)} \times 2(1+\mathrm{e}^{-r(x-a)} \times (-r\mathrm{e}^{-r(x-a)})}{(1+\mathrm{e}^{-r(x-a)})^4}$$

$$f''(x) = \frac{-\mathrm{K}r^2\mathrm{e}^{-r(x-a)} \times (1+\mathrm{e}^{-r(x-a)}) + 2\mathrm{K}r^2(\mathrm{e}^{-r(x-a)})^2}{(1+\mathrm{e}^{-r(x-a)})^3}$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{K}r^2\mathrm{e}^{-r(x-a)}(-1 - \mathrm{e}^{-r(x-a)} + 2\mathrm{e}^{-r(x-a)})}{(1+\mathrm{e}^{-r(x-a)})^3}$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{K}r^2\mathrm{e}^{-r(x-a)}(\mathrm{e}^{-r(x-a)} - 1)}{(1+\mathrm{e}^{-r(x-a)})^3}$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$ $\mathrm{K}r^2\mathrm{e}^{-r(x-a)} \geqslant 0$ et $(1 + \mathrm{e}^{-r(x-a)})^3 > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $\mathrm{e}^{-r(x-a)} - 1$.

$\mathrm{e}^{-r(x-a)} - 1 \geqslant 0$ équivaut à $\mathrm{e}^{-r(x-a)} \geqslant \mathrm{e}^0$, $-r(x-a) \geqslant 0$ ou encore $x - a \leqslant 0$ et $x \leqslant a$.

Ainsi :

x	0		a		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[0\,;a]$ et concave sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$.

Partie B

1. On lit sur le graphique que le nombre d'habitants a dépassé 100 millions durant l'année 1915.

2. a) La croissance de la population semble s'être ralentie durant l'année 1910.

b) Il a été établi à la question 3 de la partie A que $f''(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{-n(x-a)} - 1$ soit de $\mathrm{e}^{-0{,}031(x-123{,}25)} - 1$.

c) On a montré que la fonction f est convexe sur l'intervalle $[0\,;123{,}25]$ et concave sur l'intervalle $[123{,}25\,;+\infty[$.

f change donc de convexité en 123,25, la croissance de la population ralentit donc durant l'année 1913.

3. $f(170) \approx 160\,248\,474$.

Ce modèle ne semble plus adapté en 1960.

84 La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$ et pour tout réel x de $[0\,;5]$,

$$f'(x) = \frac{-0{,}5 \times (-1)\mathrm{e}^{-x+1}}{(\mathrm{e}^{-x+1}+1)^2} = \frac{0{,}5\mathrm{e}^{-x+1}}{(\mathrm{e}^{-x+1}+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-0{,}5\mathrm{e}^{-x+1}(\mathrm{e}^{-x+1}+1)^2 - 0{,}5\mathrm{e}^{-x+1} \times 2(\mathrm{e}^{-x+1}+1)(-\mathrm{e}^{-x+1})}{(\mathrm{e}^{-x+1}+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-0{,}5\mathrm{e}^{-x+1}(\mathrm{e}^{-x+1}+1) + (\mathrm{e}^{-x+1})^2}{(\mathrm{e}^{-x+1}+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x+1}(0{,}5\mathrm{e}^{-x+1} - 0{,}5)}{(\mathrm{e}^{-x+1}+1)^3}$$

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5]$, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ et $(\mathrm{e}^{-x+1}+1)^3 > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $0{,}5\mathrm{e}^{-x+1} - 0{,}5$.

$0{,}5\mathrm{e}^{-x+1} - 0{,}5 \geqslant 0$ équivaut à $\mathrm{e}^{-x+1} \geqslant 1$ soit $-x+1 \geqslant 0$ et $x \leqslant 1$.

On obtient le tableau de variations de f'.

x	0		1		5
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$\nearrow$	0,125	$\searrow$	

La foncton f' admet un maximum égal à 0,125 en $x = 1$. Les maires du village ont donc tort puisqu'au point M d'abscisse 1, la pente est de 12,5 %.

85 Démontrons que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ la fonction f définie par $f(x) = e^x - 1 - x(e-1)$ est négative.

f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ pour tout réel x de cet intervalle.

$f'(x) = e^x - e + 1$

$f'(x) \geqslant 0$ équivaut à $e^x \geqslant e - 1$ soit $x \geqslant \ln(e-1)$

x	0		$\ln(e-1)$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(\ln(e-1))$	↗	0

$f(\ln(e-1)) \approx -0{,}2$

On déduit du tableau de variations de f que pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant 0$, soit $e^x \leqslant 1 + x(e-1)$.

86 La fonction B est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;8]$ et pour tout réel x de cet intervalle,

$B'(x) = 20 \times e^{-0,5x} + (20x + 10) \times (-0{,}5)e^{-0,5x}$

$B'(x) = (-10x + 15)e^{-0,5x}$

$B''(x) = -10e^{-0,5x} + (-10x + 15) \times (-0{,}5e^{-0,5x})$

$B''(x) = (5x - 17{,}5)e^{-0,5x}$

Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;8]$, $e^{-0,5x} > 0$, $B''(x)$ est donc du signe de $5x - 17{,}5$.

x	0		3,5		8
$B''(x)$		$-$	0	$+$	

$5x - 17{,}5 = 0$

$x = \dfrac{17{,}5}{5} = 3{,}5$

La fonction B est concave sur l'intervalle $[0\,;3{,}5]$, convexe sur l'intervalle $[3{,}5\,;8]$.

C'est donc à partir de 3,5 tonnes de farine que l'évolution du bénéfice décélère.

87 La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$.

La courbe de la fonction f passe par $(-1\,;1)$ donc $f(-1) = 1$ et elle admet un point d'inflexion en $x = 0{,}5$ donc $f''(0{,}5) = 0$.

Ainsi $-a + b = 1$ et $3a + 2b = 0$

$b = 1 + a$ et $3a + 2 + 2a = 0$

Ainsi $a = \dfrac{-2}{5} = -0{,}4$ et $b = 1 + a = 0{,}6$.

$f(x) = -0{,}4x^3 + 0{,}6x^2$.

88 La fonction f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f_n'(x) = 20x \times e^{nx-1} + 10x^2 \times ne^{nx-1}$

$f_n'(x) = (20x + 10nx^2)e^{nx-1}$

$f_n''(x) = (20 + 20nx)e^{nx-1} + (20x + 10nx^2)ne^{nx-1}$

$f_n''(x) = 10e^{nx-1}(nx^2 + (2n+2)x + 2)$

Pour tout réel x, $10e^{nx-1} > 0$, $f_n''(x)$ est donc du signe de $nx^2 + (2n+2)x + 2$.

$nx^2 + (2n+2)x + 2 = 0$

$\Delta = (2n+2)^2 - 4 \times n \times 2 = 4n^2 + 4$.

Or pour tout entier n non nul $4n^2 + 4 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-2n - 2 - \sqrt{4n^2+4}}{2n} = \dfrac{-n - 1 - \sqrt{n^2+1}}{n}$

et $x_2 = \dfrac{-n - 1 + \sqrt{n^2+1}}{n}$

n étant positif, on obtient le tableau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f_n''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{C}_n$ admet donc deux points d'inflexion d'abscisses $x_1 = \dfrac{-n - 1 - \sqrt{n^2+1}}{n}$ et $x_2 = \dfrac{-n - 1 + \sqrt{n^2+1}}{n}$.

89 **1.** Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = 10u'(x)e^{u(x)}$

Or $10u'(x) = 10 \times \left(\dfrac{1}{10}\right)e^{-2-\frac{x}{10}} = e^{-2-\frac{x}{10}} = -u(x)$

Ainsi $f'(x) = -u(x)e^{u(x)}$

Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^{-2-\frac{x}{10}} > 0$ donc $u(x) < 0$ et $e^{u(x)} > 0$; ainsi $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) $u(20) = -e^{-2-2} = -e^{-4}$ et $f(20) = 10e^{-e^{-4}} \approx 9{,}8$.

Après 20 jours, la queue du lézard mesure 9,8 cm.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} -2 - \dfrac{x}{10} = -\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10$.

La fonction f étant strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $f(x) < 10$.

La queue du lézard ne pourra donc pas mesurer 11 cm.

3. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$f''(x) = -u'(x)e^{u(x)} - u(x) \times u'(x)e^{u(x)}$.

Or $u'(x) = \dfrac{-1}{10}u(x)$

donc $f''(x) = \dfrac{1}{10}u(x)e^{u(x)} + \dfrac{1}{10}u(x) \times u(x)e^{u(x)}$

$f''(x) = \dfrac{1}{10}u(x)e^{u(x)}(1 + u(x))$

b) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $u(x) < 0$ et $e^{u(x)} > 0$ donc $\dfrac{1}{10}u(x)e^{u(x)} < 0$ et $f''(x)$ est du signe contraire de $1 + u(x)$.

Or $1+u(x) \geqslant 0$ lorsque $1-e^{-2-\frac{x}{10}} \geqslant 0$, soit $e^{-2-\frac{x}{10}} \leqslant 1$; $-2-\frac{x}{10} \leqslant 0$; $\frac{x}{10} \geqslant -2$ et $x \geqslant -20$.

Ainsi pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) \leqslant 0$ et f' est décroissante.

Donc f' admet un maximum en $x=0$, c'est donc au début de la réponse que la vitesse de croissance de la queue est maximum.

Objectif BAC

90 **Partie A**

1. Réponse **a)**

2. Réponse **d)**

Partie B

1. a) Pour tout réel x de l'intervalle $[-10\,;5]$,

$f'(x)=1\times e^{0,2x}+(x-5)\times 0,2e^{0,2x}$

$f'(x)=(1+0,2x-1)e^{0,2x}$

$f'(x)=0,2xe^{0,2x}$

b) Pour tout réel x de l'intervalle $[-10\,;5]$, $e^{0,2x}>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $0,2x$.

On en déduit le tableau suivant :

x	-10		0		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-10)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5

$f(-10)=-15e^{-2}+5$

$f(-10)\approx 2,97$

c) Le coefficient directeur de la tangente T est $f'(-5)=0,2\times(-5)e^{0,2\,x\,(-5)}=-e^{-1}$

2. a) La fonction f' est dérivable sur $[-10\,;5]$ et pour tout réel x de cet intervalle, $f''(x)=g(x)$

$f''(x)=g'(x)(0,2+0,04x)e^{0,2x}$

b) Pour tout réel x de l'intervalle $[-10\,;5]$, $e^{0,2x}\geqslant 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $0,2+0,04x$.

x	-10		-5		5
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$0,2+0,04x=0$

$x=\dfrac{-0,2}{0,04}=-5$

La fonction f est concave sur l'intervalle $[-10\,;-5]$ et est convexe sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

91 **Partie A**

a) $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;0,5)$ donc $f(0)=0,5$ et $\dfrac{a}{1+e^0}=0,5$ soit $\dfrac{a}{2}=0,5$ et $a=1$.

b) Pour tout réel $x\geqslant 0$,

$f'(x)=\dfrac{-(-b)e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}=\dfrac{be^{-bx}}{(1+e^{-b})^2}$

c) La tangente T a pour coefficient directeur $f'(0)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{1-0,5}{10-0}=\dfrac{0,5}{10}=0,05$.

Ainsi $\dfrac{be^0}{(1+e^0)^2}=0,05$ et $b=0,05\times 4=0,2$.

Partie B

1. $p(10)\approx 0,88$.

La proportion d'individus équipés au 1[er] janvier 2010 est environ égale à 0,88.

2. a) D'après la **Partie A**, $p'(x)=\dfrac{0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2}$

Pour tout réel $x\geqslant 0$, $0,2e^{-0,2x}>0$ et $(1+e^{-0,2x})^2>0$, donc $p'(x)\geqslant 0$ et la fonction p est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -0,2x=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0,2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)=1$.

c) À long terme, la proportion d'individus équipés augmentera et se rapprochera des 100 %.

3. $p(x)>0,95$ équivaut à $\dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}>0,95$

soit $0,95+0,95e^{-0,2x}<1$, ou encore $e^{-0,2x}<\dfrac{0,05}{0,95}$

c'est-à-dire $-0,2x<\ln\left(\dfrac{1}{19}\right)$ soit $x>\dfrac{-\ln(19)}{-0,2}$

Or $\dfrac{-\ln(19)}{-0,2}=\dfrac{\ln(19)}{0,2}\approx 14,7$

Le marché est donc saturé au cours de l'année 2014 ; il le devient totalement à partir de l'année 2015.

4. a) La fonction p' est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $x\geqslant 0$,

$p''(x)=\dfrac{-0,04e^{-0,2x}\times(1+e^{-0,2x})^2-0,2e^{-0,2x}\times 2(1+e^{-0,2x})\times(-0,2e^{-0,2x})}{(1+e^{-0,2x})^4}$

$p''(x)=\dfrac{-0,04e^{-0,2x}(1+e^{-0,2x})+0,08(e^{-0,2x})}{(1+e^{-0,2x})^3}$

$p''(x)=\dfrac{0,04e^{-0,2x}(-1+e^{-0,2x})}{(1+e^{-0,2x})^3}$

b) Pour tout réel $x\geqslant 0$, $0,04e^{-0,2x}>0$ et $(1+e^{-0,2x})^3>0$, $p''(x)$ est donc du signe de $-1+e^{-0,2x}$.

$-1+e^{-0,2x}\geqslant 0$ équivaut à $e^{-0,2x}\geqslant 1$ soit $-0,2x\geqslant \ln(1)$ et $x\leqslant 0$.

Ainsi pour tout réel $x\geqslant 0$, $p''(x)\leqslant 0$ et la fonction p est concave sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Alice a donc raison, la proportion d'individus équipés augmente de moins en moins vite ; la croissance de la proportion ne fait que ralentir.

92 • Voir histoire des maths p. 260.
• On peut s'inspirer ou utiliser comme exemples d'applications des exercices tels que le 48 p. 275, le 69 p. 278, le 71 p. 278, le 79 p. 280.

93 La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0\,;200]$ et pour tout réel de cet intervalle :
$f'(t) = 1 \times (1 - \mathrm{e}^{-0{,}02t}) + (t - 10) \times 0{,}02\mathrm{e}^{-0{,}02t}$
$f'(t) = 1 + (0{,}02t - 1{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}02t}$ et
$f''(t) = 0{,}02 \times \mathrm{e}^{-0{,}02t} + (0{,}02t - 1{,}2) \times (-0{,}02)\mathrm{e}^{-0{,}02t}$
$f''(t) = (-0{,}0004t + 0{,}044)\mathrm{e}^{-0{,}02t}$.
Pour tout réel t de $[0\,;200]$, $\mathrm{e}^{-0{,}02t} > 0$, $f''(t)$ est donc du signe de $-0{,}0004t + 0{,}044$.

t	0		110		200
$f''(t)$		+	0	−	

$-0{,}0004t + 0{,}044 = 0$

$t = \dfrac{-0{,}044}{-0{,}0004} = 110$

La fonction f est donc convexe sur l'intervalle $[0\,;110]$ et concave sur l'intervalle $[110\,;200]$.
La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet alors un point d'inflexion en $x = 110$.
Ainsi c'est à partir du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 110 que la vitesse de croissance de f décroit.

94 **1. a)** La fonction f semble atteindre son maximum en x_0 tel que $1 \leqslant x_0 \leqslant 2$.
b) Sur l'intervalle $[3\,;5]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ semble située au-dessus de ses tangentes, f semble donc convexe sur l'intervalle $[3\,;5]$.
c) La fonction f semble changer de convexité en un point d'abscisse α tel que $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.
2. a) La courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;x_0]$ et est située au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[x_0\,;5]$ avec $1 \leqslant x_0 \leqslant 2$.
La fonction f semble donc atteindre son maximum en x_0 tel que $1 \leqslant x_0 \leqslant 2$.
b) Sur la courbe $\mathscr{C}_{f'}$, on lit que la fonction f' est croissante sur $[3\,;5]$ et sur la courbe $\mathscr{C}_{f''}$, on lit que f'' est positive sur $[3\,;5]$ donc f semble convexe sur $[3\,;5]$.
c) Sur la courbe $\mathscr{C}_{f'}$, on lit que f' change de sens de variation en un point d'abscisse α avec $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$ et sur la courbe $\mathscr{C}_{f''}$, on lit que f'' s'annule également en un point d'abscisse α avec $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.
La fonction f admet donc un point d'inflexion d'abscisse α avec $2 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

95 Élève 1
• Pour tout réel x,
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (1 + x)\mathrm{e}^x$
$f''(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (1 + x) \times \mathrm{e}^x = (2 + x)\mathrm{e}^x$
$f^{(3)}(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (2 + x) \times \mathrm{e}^x = (3 + x)\mathrm{e}^x$
$f^{(4)}(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (3 + x) \times \mathrm{e}^x = (4 + x)\mathrm{e}^x$.

Élève 2
• Il semble que pour tout réel x, $f^{(5)}(x) = (5 + x)\mathrm{e}^x$.
En effet pour tout réel x,
$f^{(5)}(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (4 + x) \times \mathrm{e}^x = (5 + x)\mathrm{e}^x$.

96 **a)** L'affirmation est vraie. En effet, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$,
$f'(x) = (2x + 2)\mathrm{e}^{-x} + (x^2 + 2x) \times (-\mathrm{e}^{-x})$
$f'(x) = (-x^2 + 2)\mathrm{e}^{-x}$
b) L'affirmation est fausse. En effet, pour tout réel de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ $f'(x)$ est donc du signe de $-x^2 + 2$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

$-x^2 + 2 = 0$
$x^2 = 2$
$x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$
La fonction f admet donc un maximum en $x = \sqrt{2}$.
c) L'affirmation est vraie. f' est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout x de $[0\,;+\infty[$,
$f''(x) = (-2x)\mathrm{e}^{-x} + (-x^2 + 2)(-\mathrm{e}^{-x})$
$f''(x) = (x^2 - 2x - 2)\mathrm{e}^{-x}$.
Pour tout réel x de $[0\,;5]$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $x^2 - 2x - 2$.

x	0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	

$x^2 - 2x - 2 = 0$
$\Delta = 12$
$x_1 = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$
f est donc concave sur l'intervalle $[0\,;1+\sqrt{3}]$ et convexe sur l'intervalle $[1+\sqrt{3}\,;+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc un unique point d'inflexion d'abscisse $[1+\sqrt{3}$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
d) L'affirmation est fausse.
En effet, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$y = 2x + 0$
$y = 2x$.

Pour aller plus loin

97 **Partie A**

1. Environ 30 % des employés aux revenus les plus faibles se partagent 12,1 % de la masse salariale.

2. a) Environ 60 % des employés aux revenus les plus faibles se partagent 33 % de la masse salariale.

b) Environ 20 % des employés aux revenus les plus élevés se partagent 45 % de la masse salariale.

Partie B

1. (1) $f(0) = 0e^{-1} = 0$ et $f(1) = 1e^0 = 1$.

(2) La fonction f est dérivable sur $[0 ; 1]$ et pour tou réel x de $[0 ; 1]$,

$f'(x) = 1 \times e^{x^2-1} + x \times 2xe^{x^2-1}$

$f'(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2-1}$

Pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $e^{x^2-1} > 0$ et $1 + 2x^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc croissante sur $[0 ; 1]$.

(3) La fonction f' est dérivable sur $[0 ; 1]$ et pour tout réel de $[0 ; 1]$,

$f''(x) = 4xe^{x^2-1} + (1 + 2x^2) \times 2xe^{x^2-1}$

$f''(x) = (4x^3 + 6x)e^{x^2-1}$

Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$,

$4x^3 + 6x \geqslant 0$ et $e^{x^2-1} > 0$ donc $f''(x) \geqslant 0$ et f est convexe sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Les points $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$ sont deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$, on en déduit que $\mathscr{C}_f$ est située en-dessous du segment [OA]. Ainsi, pour tout réel x de $[0 ; 1]$ $f(x) \leqslant x$.

2. $f(0{,}8) = 0{,}8e^{0{,}8^2-1} = 0{,}8e^{-0{,}36}$

$1 - f(0{,}8) = 1 - 0{,}8e^{-0{,}36} \approx 0{,}442$.

Environ 44,2 % de la masse salariale est détenue par les employés ayant les salaires les plus élevés.

98 **1.** • Initialisation : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -2e^{2x} + (1 - 2x) \times 2e^{2x}$

$f'(x) = 2(-2x)e^{2x}$

Ainsi $f'(x) = 2^1(1 - 1 - 2x)e^{2x}$.

• Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n non nul, $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$.

Alors :

$f^{(n+1)}(x) = 2n(-2)e^{2x} + 2^n(1 - n - 2x) \times 2e^{2x}$

$f^{(n+1)}(x) = 2^n \times 2(-1 + 1 - n - 2x)e^{2x}$

$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(1 - (n + 1) - 2x)e^{2x}$.

• Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$

2. a) $f^{(n+1)}(x) = 0$ équivaut à $2^{n+1}(-n - 2x)e^{2x} = 0$.

Or $2^{n+1} > 0$ et $e^{2x} > 0$ ainsi $-n - 2x = 0$ et $x = \dfrac{-n}{2}$.

On obtient $x_n = \dfrac{-n}{2}$.

$$y_n = 2^n\left(1 - n - 2 \times \frac{-n}{2}\right)e^{2\times\frac{-n}{2}} = 2^n e^{-n}$$

Ainsi $M_n\left(\dfrac{-n}{2} ; 2^n e^{-n}\right)$.

b) Pour tout entier naturel $n > 0$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-(n+1)}{2} - \left(-\frac{n}{2}\right) = \frac{-n-1+n}{2} = \frac{-1}{2}$$

La suite (x_n) est donc arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de 1^er^ terme $x_1 = -\dfrac{1}{2}$.

c) Pour tout entier naturel $n > 0$,

$$y_{n+1} = 2^{n+1}e^{-n-1} = 2e^{-1} \times 2^n e^{-n} = \frac{2}{e}y_n$$

La suite (y_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{2}{e}$ et de 1^er^ terme $y_1 = \dfrac{2}{e}$.

99 **1. a)** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, d'après la propriété démontrée à l'exercice 72, pour tous réels A et B,

$$e^{\frac{A+B}{2}} \leqslant \frac{e^A + e^B}{2}.$$

b) $e^{\frac{A+B}{2}} \leqslant \dfrac{e^A + e^B}{2}$ équivaut $(e^A \times e^B)^{\frac{1}{2}} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

soit $(ab)^{\frac{1}{2}} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

2. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

Or pour tous réels a et b strictement positifs $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, donc $a + b - 2\sqrt{ab} \geqslant 0$ et $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

3. a) Dans le triangle AHB rectangle en H, $AH^2 = AB^2 - a^2$.

Dans le triangle AHC rectangle en H, $AH^2 = AC^2 - b^2$.

Ainsi $2AH^2 = AB^2 + AC^2 - a^2 - b^2$.

Or dans le triangle ABC rectangle en A, $AB^2 + AC^2 = (a + b)^2$.

Ainsi $2AH^2 = (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$ et $AH^2 = ab$ soit $AH = \sqrt{ab}$.

b) La longueur AH est maximum lorsque $AH = OA = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a+b}{2}$.

Ainsi pour tous réels a et b strictement positifs, $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$.

100 **1. a)** Pour tout réel x,

$$f(-x) = -xe^{-\frac{(-x)^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = 1 \times e^{-\frac{x^2}{2}} + x + \left(-\frac{2x}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Pour tout réel x, $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $1 - x^2$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

$1 - x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = -1$

$x = 1$

$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{2}{x} \times -\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

On pose $X = -\frac{x^2}{2}$, ainsi $-\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = Xe^X$

$\lim\limits_{x \to +\infty} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, la courbe $\mathscr{C}$ admet donc l'axe des abscisses comme asymptote.

D'après le tableau de variations pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, $\mathscr{C}$ est donc toujours située au-dessus de cette asymptote.

d) T_0 a pour équation :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = (1 - 0^2)e^0x + 0$

$y = x$.

e) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f''(x) = -2x \times e^{-\frac{x^2}{2}} + (1 - x^2) \times \frac{-2x}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x) = (x^3 - 3x)e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f''(x) = x(x^2 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$e^{-\frac{x^2}{2}}$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

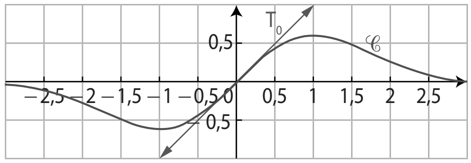
$x^2 - 3 = 0$

$x^2 = 3$

$x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$

La fonction f est donc concave sur les intervalles $]-\infty\,;-\sqrt{3}]$ et $[0\,;\sqrt{3}]$ et est convexe sur les intervalles $[-\sqrt{3}\,;0]$ et $[\sqrt{3}\,;+\infty[$, $\mathscr{C}$ admet trois points d'inflexion d'abscisses $-\sqrt{3}$; 0 et $\sqrt{3}$.

f)



2. a) Démontrons par récurrence la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

• Initialisation : $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

• Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Alors $u_{n+1} = f(u_n)$ et $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant e^{-\frac{1}{2}}$.

Or $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}6$ ainsi $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

• Conclusion : pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

b) La fonction f est concave sur l'intervalle $[0\,;1]$. La courbe $\mathscr{C}$ est donc située au-dessous de ses tangentes sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Ainsi pour tout x de $[0\,;1]$, $f(x) \leqslant x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0\ u_n \in [0\,;1]$ donc $f(u_n) \leqslant u_n$ soit $u_{n+1} \leqslant u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et est minorée par 0, elle converge donc vers une limite L vérifiant $f(L) = L$ c'est-à-dire $Le^{-\frac{L^2}{2}} = L$ soit $e^{-\frac{L^2}{2}} = 1$ soit $L = 0$.

Or $-\frac{L^2}{2} = 0$ équivaut à $L = 0$.

Ainsi $L = 0$.

d)

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 1$
Tant que $u \geqslant 0{,}1$
    $u \leftarrow ue^{-\frac{u^2}{2}}$
    $n \leftarrow n + 1$
Fin Tant que
Afficher n

e)

```
from math import*
n=0
u=1
while u>0.1:
    u=u*exp(-u**2/2)
    n=n+1
print (n)
```

$n_0 = 97$.

101 **a)** La fonction f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

$f_n'(x) = \frac{-e^x}{(1 + e^x)^2} + n$

$f_n''(x) = \frac{-e^x(1 + e^x)^2 + e^x \times 2(1 + e^x)^2 \times e^x}{(1 + e^x)^4}$

$f_n''(x) = \dfrac{e^x(e^x - 1)}{(1 + e^x)^3}$.

b) Pour tout réel x, $e^x \geqslant 0$ et $(1 + e^x)^3 > 0$, $f_n''(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		5
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$\searrow$	$\dfrac{-1}{4} + n$	$\nearrow$	

$e^x - 1 > 0$

$e^x > 1$

$x > 0$

Or $n \geqslant 1$ donc $\dfrac{-1}{4} + n \geqslant 0$ et pour tout réel x, $f_n'(x) \geqslant 0$.

La fonction f_n est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

c) D'après la question précédente, f_n est concave sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et convexe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

$\mathscr{C}_f$ admet donc un seul point d'inflexion A d'abscisse 0 et d'ordonnée $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi $\mathrm{A}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

102 **1.** La fonction P est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$\mathrm{P}'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\mathrm{P}''(x) = 6ax + 2b$.

• Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{3a}$		$+\infty$
$\mathrm{P}''(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction P est concave sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{-b}{3a}\right]$ et convexe sur l'intervalle $\left[\dfrac{-b}{3a}\,;+\infty\right[$.

• Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{3a}$		$+\infty$
$\mathrm{P}''(x)$		$+$	0	$-$	

La fonction P est convexe sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{-b}{3a}\right]$ et concave sur l'intervalle $\left[\dfrac{-b}{3a}\,;+\infty\right[$.

2. a) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.

Supposons que f est concave sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a alors $f''(x) \leqslant 0$, ce qui revient à dire que $f''(x)$ est toujours du signe de $12a$.

Ainsi $12a \leqslant 0$ ce qui est absurde car $a > 0$. La fonction f n'est donc jamais concave sur $\mathbb{R}$.

b) f est convexe sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ ce qui équivaut à dire que

$\Delta = (6b)^2 - 4 \times 12a \times 2c \leqslant 0$, soit $36b^2 - 96ac \leqslant 0$

$3b^2 - 8ac \leqslant 0$.

c) Si f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$,

alors $\Delta = 36b^2 - 96ac > 0$ et $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x_1 = \dfrac{-6b - \sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a}$ et $x_2 = \dfrac{-6b + \sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a}$.

La courbe de f admet alors deux points d'inflexion.

103 f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[1\,;2]$ par :

$f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Pour tout réel x de $[1\,;2]$,

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 = \dfrac{1}{x^2}$

et $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \dfrac{1}{x^2}$.

104 La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.

a, b, c, d et e vérifient le système :

$$\begin{cases} f''(2) = 0 \\ f''(-0{,}5) = 0 \\ f(0) = 5 \\ f'(0) = -1 \\ f'(-1) = -0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 48a + 12b + 2c = 0 \\ 3a - 3b + 2c = 0 \\ e = 5 \\ d = -1 \\ -4a + 3b - 2c + d = -0{,}5 \end{cases}$$

a, b et c vérifient alors :

$$\begin{cases} 48a + 12b + 2c = 0 & (\mathrm{L}_1) \\ 3a - 3b + 2c = 0 & (\mathrm{L}_2) \\ -4a + 3b - 2c = 0{,}5 & (\mathrm{L}_3) \end{cases}$$

soit $\begin{cases} 48a + 12b + 2c = 0 & \\ 45a + 15b = 0 & (\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2) \\ 44a + 15b = 0{,}5 & (\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3) \end{cases}$

et $\begin{cases} 24a + 6b + c = 0 \\ b = -3a \\ 44a - 45a = 0{,}5 \end{cases}$

Ainsi $-a = 0{,}5$ et $a = -0{,}5$

$b = -3 \times (-0{,}5) = 1{,}5$

$c = -24a - 6b = 3$

$d = -1$ et $e = 5$.

10 Continuité des fonctions d'une variable réelle

Questions-Tests

1 **a)** (2) **b)** (1) **c)** (3)

2 (2)

3 **a)** (3) **b)** (1) **c)** (3)

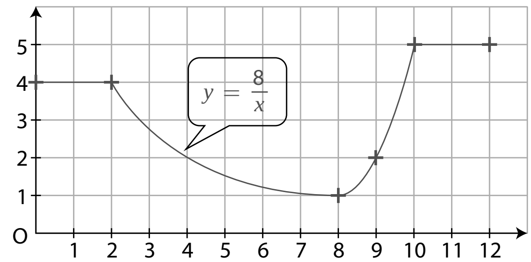
4 (2)

Découvrir

1 Notion de fonction continue sur un intervalle

1 **(1)**, **(3)** : les deux courbes passent par les points de coordonnées $(8\,;1)$ et $(10\,;5)$; elles permettent de compléter la piste.
(2) : la courbe passe par le point de coordonnées $(8\,;1)$ mais pas par celui de coordonnées $(10\,;5)$.
(4) : la courbe passe par le point de coordonnées $(10\,;5)$ mais pas par celui de coordonnées $(8\,;1)$.

2 **a)** On doit avoir :
• $y = 1$ pour $x = 8$, c'est-à-dire $a(8-8)^2 + b = 1$, soit $b = 1$;
• $y = 5$ pour $x = 10$, c'est-à-dire $a(10-8)^2 + 1 = 5$, soit $a = 1$.
Donc pour tout réel x de $[8\,;10]$, $y = (x-8)^2 + 1$.
b) La courbe précédente est donc une partie d'une parabole de sommet de coordonnées $(8\,;1)$.

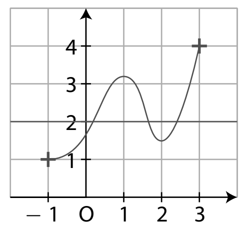


c) f est la fonction définie sur $[0\,;12]$ par :

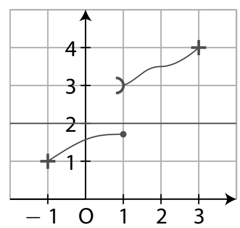
$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \leqslant x < 8 \\ (x-8)^2 + 1 & \text{si } 8 \leqslant x < 10 \\ 5 & \text{si } 10 \leqslant x \leqslant 12 \end{cases}$$

2 Vers le théorème des valeurs intermédiaires

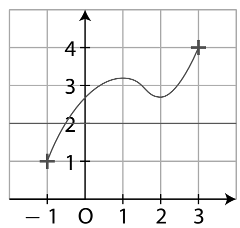
1 **1. a)**



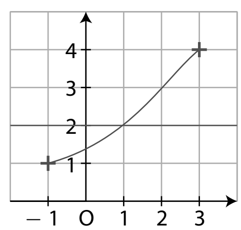
b)



c)



d)

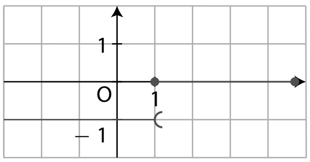


2 **a)** La fonction g doit être continue sur l'intervalle I.

b) La fonction g doit être continue et strictement monotone sur l'intervalle I.

Savoir-faire

3



La fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ et sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$. La fonction f est discontinue en 1.

4 La fonction $x \mapsto -2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty\,;2[$ et la fonction $x \mapsto x-6$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]2\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 2m-6$

Donc f est continue en 2 si, et seulement si, $2m-6=-4$, c'est-à-dire $m=1$.

Alors, $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x<2 \\ x-6 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$.

Ainsi, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $m=1$.

7 **a)** On note pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{2}{n}+1$ et f la fonction exponentielle définie sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$.

Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{2}{n} \geqslant 0$ donc $u_n > 1$ et $u_n \in \mathrm{I}$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = f(u_n)$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et la suite (u_n) converge vers $\ell = 1$.

La fonction f est continue sur l'intervalle I donc la suite (v_n) converge vers $f(\ell)$, c'est-à-dire vers e^1, soit e.

8 **a)** f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2).$$

• Pour tout réel x, $f(x) \in \mathrm{I}$.

• $u_0 = 0$ donc $u_0 \in \mathrm{I}$.

Donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en ℓ. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, $\ell = f(\ell)$, c'est-à-dire ℓ est solution dans l'intervalle I de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(1+x^2) = x.$$

Dans l'intervalle I, l'équation $\dfrac{1}{2}(1+x^2) = x$ équivaut à $x^2-2x+1=0$, c'est-à-dire $(x-1)^2=0$.

Sa solution est $x=1$; or, $1 \in \mathrm{I}$ donc la suite (u_n) converge vers $\ell = 1$.

11 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$f(0) = 5$ et $f(1) = 2+3\mathrm{e}-1$ soit $f(1) \approx 3{,}1$.

Ainsi, 4 est compris entre $f(1)$ et 5.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un nombre réel c compris entre 0 et 1 tel que $f(c) = 4$.

12 L'équation $x^3 - x = 2x^2 - 1$ est équivalente à l'équation :

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1.$$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

$f(0) = 1$ et $f(1) = -1$.

Or, 0 est compris entre -1 et 1, donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

Donc l'équation $x^3 - x = 2x^2 - 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

14 **a)** • f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 - 3$, c'est-à-dire $f'(x) = 3(x^2-1)$.

On utilise le signe de x^2-1 pour dresser le tableau de variations ci-dessous de f.

• De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• On montre de même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

b) $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$.

$0 \in [-1\,;1]$ donc d'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

15 **a)** • g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

$g'(x) \geqslant 0$ si, et seulement si, $\mathrm{e}^x \geqslant 1$, c'est-à-dire $x \geqslant 0$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ (limite d'une somme).

• Pour tout réel $x \neq 0$, $g(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (limite d'un produit).

• D'où le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

b) • g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et $0 \in [1\,;+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

• g est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $0 \in\,]-1\,;+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c) $\alpha \approx -1{,}84$ et $\beta \approx 1{,}15$.

17

```
from math import *

def f(x):
    y=exp(x)-x-2
    return y

def Dichotomie(n):
    a=0
    b=2
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

```
>>> Dichotomie(6)
1.146193504333496
```

18 **a)** • On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 3.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 9x^2 - 2x = x(9x - 2).$$

• Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^3}\right)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

• D'où le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$\dfrac{2}{9}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\dfrac{733}{243}$	$\nearrow$	$+\infty$

• L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\dfrac{2}{9}\right]$ car sur cet intervalle, $f(x) < 0$.

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{2}{9}\,;+\infty\right[$, la fonction f est continue et strictement croissante, et $0 \in \left[-\dfrac{783}{243}\,;+\infty\right[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0.

Donc cette équation admet x_0 pour unique solution dans $\mathbb{R}$.

• $f(1) = -1$ et $f(2) = 17$, donc $f(1) < f(\alpha) < f(2)$ et f étant croissante sur $[1\,;2]$, on en déduit que $1 < \alpha < 2$.

b)

```
from math import *

def f(x):
    y=3*x**3-x**2-3
    return y

def Dichotomie(n):
    a=1
    b=2
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

Voici l'affichage obtenu pour une valeur approchée de x_0 à 10^{-3} près.

```
>>> Dichotomie(3)
1.1240234375
```

Acquérir des automatismes

19 La fonction inverse n'est pas définie en 0, donc elle ne peut pas être continue en 0.

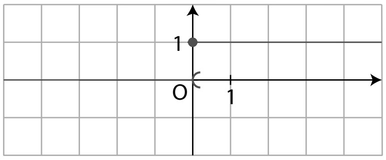
20 • La fonction f est continue sur $[-2\,;3]$ car on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

• La fonction g est continue sur $[-2\,;1[$ et sur $]1\,;3]$, mais elle n'est pas continue en 1 car on doit lever le crayon en ce point pour tracer sa courbe représentative.

• La fonction h est continue sur $[-2\,;3]$ car on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

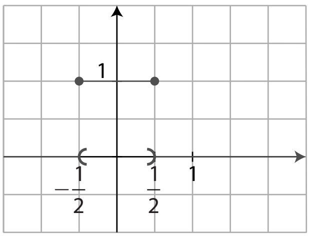
21 **a)** Vraie. En effet, une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Vraie. En effet, la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0\,;1]$.
c) Fausse. En effet, la fonction racine carrée n'est pas définie sur $]-\infty\,;0[$.
d) Fausse. En effet, la fonction n'est pas définie en 1 donc ne peut pas être continue en 1.

22 **a)**



b) La fonction H est continue sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

23 **a)**

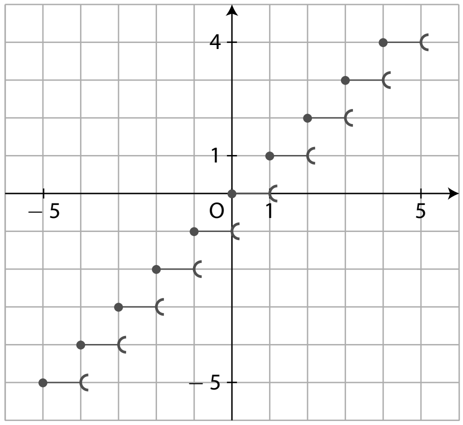


b) La fonction Π est continue sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$, sur $\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

24 **a)** Voir le graphique en bas de page.
b) La fonction T est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;7[$, $]7\,;18[$, $]18\,;25[$, $]25\,;65[$, $]65\,;+\infty[$.
La fonction T n'est pas continue en 7, 18, 25, 65.

25 **1. a)** 2 **b)** 0 **c)** 4 **d)** -2
2. a) Pour tout réel $x \in [0\,;1[$, $\mathrm{E}(x) = 0$.
b) Pour tout réel $x \in [1\,;2[$, $\mathrm{E}(x) = 1$.
c) Pour tout réel $x \in [-1\,;0[$, $\mathrm{E}(x) = -1$.
d) Pour tout réel $x \in [-2\,;-1[$, $\mathrm{E}(x) = -2$.

3. a)



b) La fonction est continue sur chacun des intervalles $[-5\,;-4[$, $]-4\,;-3[$, $]-3\,;-2[$, $]-2\,;-1[$, $]-1\,;0[$, $]0\,;1[$, $]1\,;2[$, $]2\,;3[$, $]3\,;4[$, $]4\,;5[$.
c) La fonction n'est pas continue en tout entier relatif.

26 **a)** La fonction polynôme $x \mapsto 1 - 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]2\,;+\infty[$.
Donc la fonction f est continue sur $]2\,;+\infty[$.
La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, donc par opérations et composition, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x-2} - 4$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\infty\,;2[$. Donc la fonction f est continue sur $]-\infty\,;2[$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(\mathrm{e}^{x-2} - 4) = -3$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(1-2x) = -3$

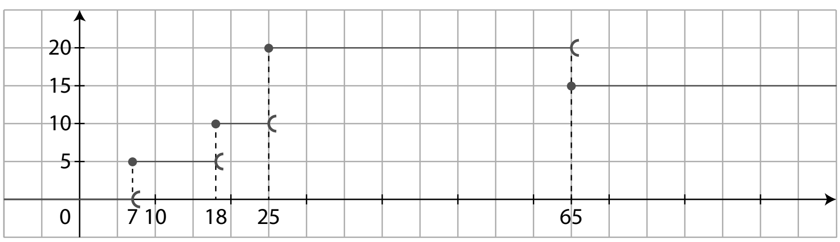
Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -3$.

Donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3 = f(2)$ et la fonction f est continue en 2.

c) La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

27 **a)** La fonction polynôme $x \mapsto 2 + x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty\,;-1[$. Donc g est continue sur $]-\infty\,;-1[$.
La fonction polynôme $x \mapsto x^2 - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-1\,;+\infty[$. Donc la fonction g est continue sur $]-1\,;+\infty[$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g(x) = \lim\limits_{x\to -1}(2+x) = 1$



$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 - x) = 2$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x)$

Donc la fonction g n'a pas de limite en -1 et elle est discontinue en -1.

c) La fonction g est donc continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;+\infty[$.

28 **a)** • $x = 0$, donc $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 1$. Ainsi, $\mathrm{F}(0) = 0^2 = 0$.

• $x = -2$, donc $x < 0$ et $\mathrm{F}(-2) = \mathrm{e}^{-2}$.

• $x = 5$, donc $x > 1$ et $\mathrm{F}(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$.

• $x = 1$, donc $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 1$.

Ainsi, $\mathrm{F}(1) = 1^2 = 1$.

• $x = 0{,}5$, donc $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 1$.

Ainsi, $\mathrm{F}(0{,}5) = 0{,}5^2 = 0{,}25$.

b) $\mathrm{F}(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$

c) La fonction F n'est pas continue en 0 car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \mathrm{F}(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \mathrm{F}(x) (1 \neq 0)$.

Donc la fonction F n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction F est continue en 1 car

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \mathrm{F}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \mathrm{F}(x) = 1 = \mathrm{F}(1)$.

La fonction F est continue :

• sur $]-\infty\,;0[$ car la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$;

• sur $]0\,;1[$ car la fonction carré est continue sur $\mathbb{R}$;

• sur $]1\,;+\infty[$ car la fonction polynôme $x \mapsto 2 - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : la fonction F est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

29 **a)** • La fonction f est continue sur $[0\,;3[$ car la fonction polynôme $x \mapsto 0{,}64x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]3\,;5[$ car la fonction polynôme $x \mapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]5\,;8]$ car la fonction polynôme $x \mapsto 4 - (x-6)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (0{,}64x^2) = 5{,}76$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (ax + b) = 3a + b$

• $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} (ax + b) = 5a + b$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} (4 - (x-6)^2) = 3$

• La fonction f est continue sur $[0\,;8]$ si, et seulement si, f est continue en 3 et en 5, c'est-à-dire, $\begin{cases} 3a + b = 5{,}76 \\ 5a + b = 3 \end{cases}$.

Par soustraction membre à membre de ces deux équations $((\mathbf{2}) - (\mathbf{1}))$, on obtient $2a = -2{,}76$, soit $a = -1{,}38$.

On reporte cette valeur de a dans la 2e équation et on obtient $b = 9{,}9$.

Conclusion : f est continue sur $[0\,;8]$ si, et seulement si, pour tout réel x de $]3\,;5[$,

$$f(x) = -1{,}38x + 9{,}9.$$

b) • On note, pour tout réel x, $m(x) = 0{,}64x^2$.

Pour tout réel x, $m'(x) = 1{,}28x$.

Donc $m'(3) = 3{,}84$.

• On note, pour tout réel x,

$$n(x) = -1{,}38x + 9{,}9.$$

Pour tout réel x, $n'(x) = -1{,}38$.

Donc $n'(3) = -1{,}38$.

• Si la fonction f était dérivable en 3, la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 3 devrait avoir pour pente à la fois 3,84 et $-1{,}38$. Or, cela n'est pas possible, donc la fonction f n'est pas dérivable en 3.

c) • Avec la notation introduite au **b)**, on obtient $n'(5) = -1{,}38$.

• On note, pour tout réel x, $p(x) = 4 - (x-6)^2$.

Pour tout réel x, $p'(x) = -2(x-6)$.

Donc $p'(5) = 2$.

• Si la fonction f était dérivable en 5, la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 5 devrait avoir pour pente à la fois $-1{,}38$ et 2. Or, cela n'est pas possible, donc la fonction f n'est pas dérivable en 5.

30 Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 1$.

f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$, donc pour tout entier naturel n, $v_n = f(u_n)$.

31 $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ (limite d'une somme). La suite (u_n) converge vers $\ell = 1$.

La fonction exponentielle est définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$,

$\ell \in \mathrm{I}$ et pour tout entier naturel $n > 1$, $u_n \in \mathbb{R}$

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ.

Donc la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell) = \mathrm{e}$.

32 La suite (u_{n+1}) converge vers ℓ.

La suite $\left(\dfrac{1}{2}u_n - 1\right)$ converge vers $\dfrac{1}{2}\ell - 1$.

Donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution de l'équation $\frac{1}{2}x - 1 = x$.
Donc $\ell = -2$.

33 La fonction sinus est définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.
L'image de la suite (u_n) par f est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sin\left(\pi n - \frac{\pi}{4}\right)$

34 La fonction racine carrée est définie sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \in \mathrm{I}$.
L'image de la suite (u_n) par f est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{n-4}$.

35 La fonction f est définie sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ et pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$.
L'image de la suite (u_n) par f est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{2n+5}$.

36 Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{n} + 3$.
f est la fonction exponentielle définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \in \mathrm{I}$, donc pour tout entier naturel n, $v_n = f(u_n)$.

37 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = n^2 - 4$.
f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = 1 + \sqrt{x}.$$
Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n \in \mathrm{I}$, donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $v_n = f(u_n)$.

38 **a)** Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$u_n = \frac{n+1}{n-1}.$$
f est la fonction définie sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x}.$$
Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n \in \mathrm{I}$, donc pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $v_n = f(u_n)$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}$,
c'est-à-dire $u_n = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$. Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right) = 1 \text{ (limite d'un quotient).}$$
La suite (u_n) converge vers $\ell = 1$.
$\ell \in \mathrm{I}$ et f est continue sur I donc en particulier en $\ell = 1$.
Donc la suite (v_n) converge vers :
$$f(\ell) = \sqrt{1} = 1.$$

39 **a)** Pour tout entier naturel n,
$$u_n = \frac{\pi n^2 - 1}{n^2+1}.$$
f est la fonction cosinus définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
Pour tout entier naturel n, $u_n \in \mathrm{I}$, donc pour tout entier naturel n, $w_n = f(u_n)$.
b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n^2\left(\pi - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$,
c'est-à-dire $u_n = \dfrac{\pi - \frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$. Donc :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \pi \text{ (limite d'un quotient).}$$
La suite (u_n) converge vers $\ell = \pi$.
$\ell \in \mathrm{I}$ et f est continue sur I donc en particulier en $\ell = \pi$.
Donc la suite (w_n) converge vers :
$$f(\ell) = \cos(\pi) = -1.$$

40 **a)** Il semble que la suite (u_n) converge vers 8.

n	u
0	2
1	5
2	6.5
3	7.25
4	7.625
5	7.8125
6	7.9063
7	7.9531
8	7.9766
9	7.9883
10	7.9941

b) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$, donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 8$.
Alors $\frac{1}{2}u_k + 1 \leqslant \frac{1}{2}u_{k+1} + 1 \leqslant 5$. Or, $5 \leqslant 8$, donc $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 8$.
Conclusion : pour tout entier naturel n,
$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8.$$
Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 8.
c) • La suite (u_n) est croissante et majorée par 8 donc elle converge vers un réel $\ell \leqslant 8$.
• La suite (u_n) est du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction affine définie sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4.$$
La fonction f est continue sur I et $\ell \in \mathrm{I}$, donc f est continue en ℓ.
• La suite (u_{n+1}) converge vers ℓ et la suite $\left(\frac{1}{2}u_n + 4\right)$ converge vers $\frac{1}{2}\ell + 4$.

Donc, d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est la solution dans I de l'équation $\frac{1}{2}x + 4 = x$.
Donc $\ell = 8$.

41 **1. a)** La fonction f est dérivable sur $[1 ; 2]$ et pour tout réel x de $[1 ; 2]$, $f'(x) = \frac{16}{(3+x)^2}$.

Pour tout réel x de $[1 ; 2]$, $f'(x) > 0$, d'où le tableau de variations ci-dessous.

x	1		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{9}{5}$

b) Pour tout réel x de $[1 ; 2]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{9}{5} \leqslant 2$.
Donc pour tout réel x de I, $f(x) \in$ I.
2. a) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$.
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{9}{5}$, donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 2$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k \leqslant 2$.
La fonction f est croissante sur $[1 ; 2]$ donc
$$f(1) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k) \leqslant f(2),$$
c'est-à-dire $1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1} \leqslant \frac{9}{5} \leqslant 2$.
Conclusion : pour tout entier naturel n,
$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$
Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, majorée par 2.
b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers un réel ℓ tel que $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.
c) Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.
La fonction f est continue sur $[1 ; 2]$ donc en ℓ.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $[1 ; 2]$ de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $5 - \frac{16}{3+x} = x$. Cette équation équivaut successivement dans I à :
$$(x-5)(3+x) = -16$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$
Donc $\ell = 1$.
La suite (u_n) converge donc vers 1.

42 **1.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$.

Pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$, d'où le sens de variation de f résumé dans le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	

a) Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $0 \leqslant u_k \leqslant 1$.
La fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$ donc $f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(1)$, c'est-à-dire :
$$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant e^{-1} \leqslant 1.$$
Conclusion : pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$
b) Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = e^{-1}$ donc $u_1 \leqslant u_0$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $u_{k+1} \leqslant u_k$.
La fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$ donc $f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k)$, c'est-à-dire $u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.
Conclusion : pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} \leqslant u_n.$$
2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.
La fonction f est continue sur $[0 ; 1]$ donc en ℓ.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $[0 ; 1]$ de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $xe^{-x} = x$.
Cette équation équivaut successivement dans $[0 ; 1]$ à :
$x(e^{-x} - 1) = 0$
$x = 0$ ou $e^{-x} - 1 = 0$
$x = 0$ ou $e^{-x} = 1$
$x = 0$ ou $-x = 0$
$x = 0$
La suite (u_n) converge vers 0.

43 La fonction polynôme f est continue sur $\mathbb{R}$. $f(-2) = -1$ et $f(1) = 2$.
Or, $-0,5$ est compris entre -1 et 2, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre -2 et 1 tel que $f(c) = -0,5$.

44 La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.
$\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; or, 0,7 est compris entre 0 et 1.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que $\cos(c) = 0{,}7$.
Ainsi, l'équation $\cos(x) = 0{,}7$ admet au moins une solution comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

45 La fonction polynôme $f : x \mapsto x^3 - 4x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$f(-2) = -1$ et $f(3) = 14$; or, 0 est compris entre -1 et 14.
Donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution comprise entre -2 et 3.

46 **a)** $f : x \mapsto x^3 - x^2 + 3x$ est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
$f(0) = 0$ et $f(1) = 3$; or, 1 est compris entre 0 et 3.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre 0 et 1 tel que $f(c) = 1$.
Ainsi, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution comprise dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
b) L'équation $x^3 = 5x - 2$ est équivalente à l'équation $x^3 - 5x + 2 = 0$.
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 5x + 2.$$
f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
$f(0) = 2$ et $f(1) = -2$; or, 0 est compris entre -2 et 2.
Donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
c) L'équation $\frac{1}{(x+1)^2} = x + 0{,}5$ est équivalente à l'équation $\frac{1}{(x+1)^2} - x - 0{,}5 = 0$.
On note f la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - x - 0{,}5$.
f est la somme d'une fonction rationnelle et d'une fonction polynôme donc f est continue sur $]-1 ; +\infty[$.
$f(0) = 0{,}5$ et $f(1) = -1{,}25$; or, 0 est compris entre $-1{,}25$ et 0,5.
Donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
d) La fonction $f : x \mapsto x - \cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
$f(0) = -1$ et $f(1) = 1 - \cos(1)$, soit $f(1) \approx 0{,}46$.
Or, 0,25 est compris entre -1 et $1 - \cos(1)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre 0 et 1 tel que $f(c) = 0{,}25$.
Ainsi, l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

47 On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 2$.
f est la somme de la fonction exponentielle et d'une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
$f(-1) = e^{-1} - 1$ soit $f(-1) \approx -0{,}63$
$f(2) = e^2 - 4$ soit $f(-2) \approx 3{,}39$
Or, 0 est compris entre $f(-1)$ et $f(2)$.
Donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1 ; 2]$.

48 La fonction polynôme $f : x \mapsto x\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$).
$f(-\pi) = \pi$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; or, 1 est compris entre 0 et π.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre $-\pi$ et $\frac{\pi}{2}$ tel que $f(c) = 1$.
Ainsi, l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[-\pi ; \frac{\pi}{2}\right]$.

49 **a)** f est une fonction polynôme, donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-4 ; 4]$.
b) $f(-4) = -16$ et $f(4) = 16$.
Tout réel k tel que $-16 \leqslant k \leqslant 16$ vérifie :
$$f(-4) \leqslant k \leqslant f(4).$$
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre -4 et 4 tel que $f(c) = k$.
Ainsi, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-4 ; 4]$.

50 **a)** Par exemple, $f(0) = -5$ et $f(2) = 7$.
b) f est une fonction polynôme, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
0 est compris entre -5 et 7, donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0 ; 2]$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

51 • La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty ; 0]$.

f est strictement croissante sur $]-\infty\,;0]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $f(0) = 3$ et 0 est compris entre -2 et 3.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0\,;1]$.

f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$.

$f(0) = 3$, $f(1) = -1$ et 0 est compris entre -1 et 3.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[1\,;+\infty[$.

f est strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

$f(1) = -1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ et 0 est compris entre -1 et $\dfrac{1}{2}$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Conclusion : Marion se trompe car cette équation admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.

52 La fonction $f : x \mapsto x \mapsto^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$f(2) = 8$, $f(3) = 27$ et 10,25 est compris entre 8 et 27.

Donc l'équation $x^3 = 10{,}25$ a une unique solution dans l'intervalle $[2\,;3]$ et Jason a raison.

53 Pour que l'affirmation d'Elias soit exacte, il faut que la fonction g soit continue et strictement décroissante sur $[2{,}6\,;2{,}7]$.

54 **a)** La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

$f'(x)$ est donc du signe de $x^2 - 1$, c'est-à-dire $(x-1)(x+1)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (mettre x^3 en facteur pour déterminer ces limites).

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-2\,;-1]$.

$f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$ et 0 est compris entre -1 et 3.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-2\,;-1]$.

b)

X	Y2
-2	-1
-1.9	-0.159
-1.8	0.568
-1.7	1.187

Ainsi, $f(-1{,}9) < 0 < f(-1{,}8)$

c'est-à-dire $f(-1{,}9) < f(\alpha) < f(-1{,}8)$

soit, parce que f est croissante sur $[-2\,;-1]$.

$$-1{,}9 < \alpha < -1{,}8.$$

c) En procédant comme au **b)**, on obtient : $-1{,}88 < \alpha < -1{,}87$.

X	Y2
-1.9	-0.159
-1.89	-0.081
-1.88	-4E-3
-1.87	0.0707

d) En procédant comme au **b)**, on obtient : $-1{,}880 < \alpha < -1{,}879$.

X	Y2
-1.88	-4E-3
-1.879	2.9E-3
-1.878	0.0106
-1.877	0.016

e)

X	Y2
-1.879	-1E-5
-1.879	-5E-8
-1.879	1.3E-8
-1.879	6.4E-8

-1.879386

On obtient : $-1{,}879386 < \alpha < -1{,}879385$.

55 **a)**

```
def f(x):
    y=x**3-3*x+1
    return y

def Balayage(n):
    s=-2
    while f(s)<= 0:
        s=s+10**(-n)
    s=round(s,n)
    t=round(s-10**(-n),n)
    return t,s
```

Voici le résultat obtenu, on retrouve ainsi l'encadrement d'amplitude 10^{-6} de α obtenu à la question **e)** de l'exercice **54**.

```
>>> Balayage(6)
(-1.879386, -1.879385)
```

b) Voici le programme adapté.

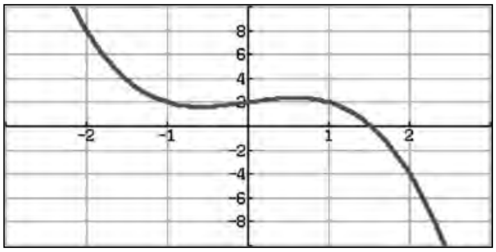
```
from math import*

def Balayage(n):
    s=2
    while exp(s)<= 10:
        s=s+10**(-n)
    s=round(s,n)
    t=round(s-10**(-n),n)
    return t,s
```

Voici le résultat obtenu :

```
>>> Balayage(4)
(2.3025, 2.3026)
```

Ainsi, $2{,}3025 < \beta < 2{,}3026$.

c)



Voici le programme adapté.

```
1 def h(x):
2     y=-x**3+x+2
3     return y
4
5 def Balayage(n):
6     s=1
7     while h(s)>= 0:
8         s=s+10**(-n)
9     s=round(s,n)
10    t=round(s-10**(-n),n)
11    return t,s
```

Remarque : ici, il faut veiller au fait que la fonction h est décroissante sur $[1\,;2]$ et à modifier en conséquence la ligne 7 ($h(1) > 0$, $h(2) < 0$).

Voici le résultat obtenu :

```
>>> Balayage(5)
(1.52137, 1.52138)
```

Ainsi, $1{,}52137 < \gamma < 1{,}52138$.

56 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}).$$

Pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et 2 appartient à $]-\infty\,;+\infty[$.

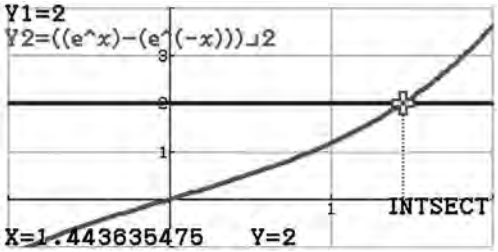
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c) $f(1) \approx 1{,}18$ et $f(2) \approx 3{,}62$.

Ainsi, $f(1) < 2 < f(2)$ c'est-à-dire $f(1) < f(\alpha) < f(2)$ soit, parce que f est croissante sur $[1\,;2]$,

$$1 < \alpha < 2.$$

d)



Donc $\alpha \approx 1{,}44$.

57 **a)** • La fonction polynôme f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $]-\infty\,;-1]$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $f(-1) = -19$ et 0 appartient à l'intervalle $[-19\,;+\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.

• La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[-1\,;1]$.

f est strictement croissante sur $[-1\,;1]$.

$f(-1) = -19$, $f(1) = 13$ et 0 est compris entre -19 et 13.

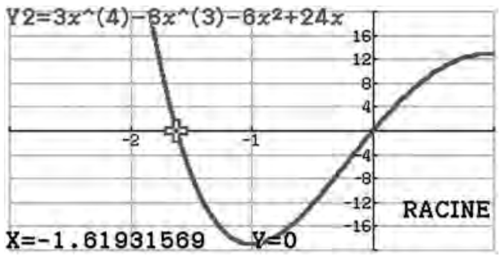
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle $[-1\,;1]$.

• Pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f(x) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.

b) • 0 est une solution évidente de l'équation $f(x) = 0$ et $0 \in [-1;1]$ donc $\beta = 0$.

•



Donc $-1{,}62 < \alpha < -1{,}61$.

Pour se tester

58 **1.** B **2.** D **3.** D **4.** B **5.** C

59 **1.** A, B, D **2.** C, D **3.** A

60 **1. Faux**. En effet, pour $k=-1$, l'équation $f(x)=-1$ admet -7 pour unique solution.

2. Faux. En effet, pour $k=30$, l'équation $f(x)=30$ admet 10 pour unique solution.

3. Vrai. En effet, si l'on note a le nombre réel de l'intervalle $]-\infty\,;-7]$ tel que $f(a)=30$, alors f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;a]$. Or, $k\in[30\,;+\infty[$, donc l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;a]$.

S'entraîner

61 **(1)** f est **dérivable** en a.

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\boldsymbol{f'(a)}$.

(3) pour tout réel x de I avec $x\neq a$, on pose :

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a).$$

Alors $f(x)-f(a)=\boldsymbol{(x-a)(\varphi(x)+f'(a))}$

avec $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\mathbf{0}$.

(4) $\lim\limits_{x\to a}(x-a)(\varphi(x)+f'(a))=0$,

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$,

soit $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Donc si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

62 **1.** S'il existe une suite (u_n) qui prend ses valeurs dans I et qui converge vers ℓ, telle que la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(\ell)$, alors la fonction f n'est pas continue en ℓ.

2. a) La propriété directe permet de démontrer qu'une suite est convergente, sous certaines conditions, alors que la contraposée permet de démontrer qu'une fonction n'est pas continue en un point, sous certaines conditions.

Donc, ici, c'est la propriété directe qui peut être adaptée.

b) • Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,

$$u_n=\frac{\pi}{6}-\frac{3}{n^2}.$$

f est la fonction définie sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\sin(x).$$

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n\in\mathrm{I}$, donc pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $v_n=f(u_n)$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{\pi}{6}$ donc la suite (u_n) converge vers $\ell=\dfrac{\pi}{6}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ.

Ainsi, la suite $(f(u_n))$, c'est-à-dire (v_n) converge vers :

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

2. a) La contraposée énoncée ci-dessus peut être la mieux adaptée.

b) La suite (u_n) prend ses valeurs dans $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ et elle converge vers $\ell=0$.

Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $f(u_n)=\cos(n)$.

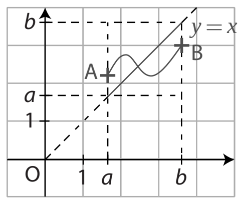
Or, la suite $(\cos(n))$ diverge et ne converge pas vers $f(\ell)$ c'est-à-dire $f(0)$, soit 0.

Donc, d'après la contraposée énoncée ci-dessus, la fonction f n'est pas continue en 0.

63 **a)** La fonction f est continue sur $[a\,;b]$.

Sa courbe représentative doit joindre le point $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ au point $\mathrm{B}(b\,;f(b))$ avec $a\leqslant f(a)\leqslant b$ et $a\leqslant f(b)\leqslant b$.

Donc la courbe représentative de f coupe au moins une fois la droite d'équation $y=x$.



b) On note g la fonction définie sur $[a\,;b]$ par :

$$g(x)=f(x)-x.$$

La fonction g est continue sur $[a\,;b]$ (différence de fonctions continues sur $[a\,;b]$).

$g(a)=f(a)-a$, donc $g(a)\geqslant 0$,

$g(b)=f(b)-b$, donc $g(b)\leqslant 0$,

et 0 est compris entre $g(b)$ et $g(a)$.

Donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $g(x)=0$, c'est-à-dire $f(x)=x$, admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

c) Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et à valeurs dans $[a\,;b]$, alors l'équation $f(x)=x$ admet au moins une solution dans $[a\,;b]$.

64 **Parcours 1**

On sait que pour tout réel x, $|x|=x$ si $x\geqslant 0$ et $|x|=-x$ si $x\leqslant 0$.

Donc pour tout réel x,

$$f(x)=\begin{cases}-1\text{ si } x<0\\ 0\text{ si } x=0.\\ 1\text{ si } x>0\end{cases}$$

• Les fonctions $x\mapsto -1$ et $x\mapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=1$,

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$. La fonction f n'a pas de limite en 0 donc f n'est pas continue en 0.

Conclusion : la fonction f est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

Parcours 2

a) Les fonctions polynômes $x\mapsto x-1$ et $x\mapsto -x+1$ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g est continue sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

b) • $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x+1)=1$,

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} g(x)\neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} g(x)$.

• La fonction g n'a pas de limite en 0 donc g n'est pas continue en 0.

c) La fonction g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

65 **a)** Pour tout réel $x>0$,

$$g(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$g(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$g(x)=\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

b) • $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)$ et la fonction g est continue en 0.

• La fonction $x\mapsto \sqrt{1+x}-1$ est continue sur $[-1\,;+\infty[$, donc sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Donc la fonction $x\mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ est le produit de deux fonctions continues sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction g est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Conclusion : la fonction g est continue sur $]0\,;+\infty[$.

66 **a)** Pour tout réel x,

$A=(x+1)(x^2-x+1)$

$A=x^3-x^2+x+x^2-x+1$

$A=x^3+1$

Donc pour tout réel $x\neq 1$,

$$\frac{x^3+1}{x+1}=x^2-x+1 \text{ soit } h(x)=x^2-x+1.$$

b) • $\lim\limits_{x\to -1} h(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$

Or, $h(-1)=1$, donc $\lim\limits_{x\to -1} h(x)\neq h(-1)$ et la fonction h n'est pas continue en -1.

• La fonction rationnelle $x\mapsto \dfrac{x^3+1}{x+1}$ est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$. Donc la fonction h est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

Conclusion : la fonction h est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

67 • La fonction $x\mapsto x^2-3x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction k est continue sur $]-\infty\,;-1[$, la fonction $x\mapsto ax+b$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction k est continue sur $]-1\,;3[$ et la fonction $x\mapsto x^3-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction k est continue sur $]3\,;+\infty[$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}} k(x)=4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x>-1}} k(x)=-a+b$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x<3}} k(x)=3a+b$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\x>3}} k(x)=26$.

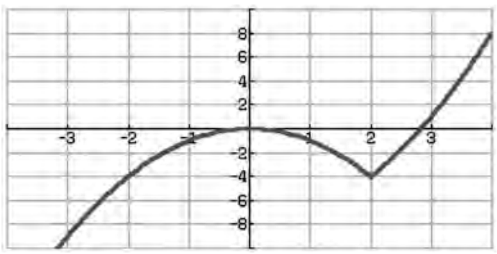
La fonction k est continue en -1 et en 3 si, et seulement si, $\begin{cases}-a+b=4\\3a+b=26\end{cases}$.

Par soustraction membre à membre, on obtient $4a=22$, c'est-à-dire $a=\dfrac{11}{2}$.

En remplaçant a par cette valeur dans la 1re équation, on obtient $b=\dfrac{19}{2}$.

• Donc, la fonction k est continue sur $\mathbb{R}$ si, et seulement $a=\dfrac{11}{2}$ et $b=\dfrac{19}{2}$.

68 **a)**



b) • Il semble que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Il semble que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$, mais que f n'est pas dérivable en 2.

c) • Pour tout réel x, $g'(x)=-2x$ donc $g'(2)=-4$.

Pour tout réel x, $h'(x)=2x$ donc $h'(2)=4$.

• À gauche de 2, la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur -4 et à droite de 2, une tangente de coefficient directeur 4.

Donc la courbe représentative de f n'admet pas de tangente au point d'abscisse 2.

• Donc la fonction f n'est pas dérivable en 2.

Remarque : on dit que le point de coordonnées $(2\,;-4)$ est un point anguleux : la fonction est continue en 2, non dérivable en 2 et admet deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents en ce point.

69 **Parcours 1**

• On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 3, u_1 = \dfrac{7}{4}$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$.

Alors $\dfrac{1}{4} \times 1 + 1 \leqslant \dfrac{1}{4} u_{k+1} + 1 \leqslant \dfrac{1}{4} u_k + 1$, c'est-à-dire $\dfrac{5}{4} \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$, d'où :

$$1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.

• Donc la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 1$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

La fonction polynôme $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $[1\,;+\infty[$ de l'équation $\dfrac{1}{4}x + 1 = x$. Ainsi, $\ell = \dfrac{4}{3}$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers $\dfrac{4}{3}$.

Parcours 2

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 0{,}5x - 1.$$

La fonction polynôme f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $f(x) \in \mathbb{R}$.

$v_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n, $v_n \in \mathbb{R}$.

Donc pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

b) Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = -3$, $v_1 = -2{,}5$ donc $v_0 \leqslant v_1 \leqslant -2$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $v_k \leqslant v_{k+1} \leqslant -2$.

Alors :

$0{,}5v_k - 1 \leqslant 0{,}5v_{k+1} - 1 \leqslant 0{,}5(-2) - 1$,

c'est-à-dire $v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant -2$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant -2$.

c) Donc la suite (v_n) est croissante et majorée par -2, elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant -2$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

La fonction polynôme $f : x \mapsto 0{,}5x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $]-\infty\,;-2]$ de l'équation $0{,}5x - 1 = x$. Ainsi, $\ell = -2$.

Conclusion : la suite (v_n) converge vers -2.

70 **1. a)** La fonction f définie sur $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$ convient.

b) • On place v_0 sur l'axe des abscisses.

(1) On utilise la courbe de f pour placer $v_1 = f(v_0)$ sur l'axe des ordonnées.

(2) On utilise la droite d'équation $y = x$ pour reporter v_1 sur l'axe des abscisses.

• On recommence les étapes **(1)** et **(2)** à partir de v_1 pour placer v_2 sur l'axe des abscisses.

• On recommence les étapes **(1)** et **(2)** à partir de v_2 pour placer v_3 sur l'axe des abscisses.

2. a) Il semble que la suite (v_n) est croissante et qu'elle admet 4 pour majorant.

b) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

Initialisation : $v_0 = 0$ et $v_1 = 2$ donc $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $0 \leqslant v_k \leqslant v_{k+1} \leqslant 4$.

On démontre qu'alors $0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 4$.

De l'hypothèse de récurrence, on déduit que $4 \leqslant 3v_k + 4 \leqslant 3v_{k+1} + 4 \leqslant 16$.

Or, la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc

$$2 \leqslant \sqrt{3v_k + 4} \leqslant \sqrt{3v_{k+1} + 4} \leqslant 4,$$

c'est-à-dire $2 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 4$ et par conséquent $0 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_{k+2} \leqslant 4$.

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4.$$

Autrement dit, la suite (v_n) est croissante et majorée par 4.

3. La suite (v_n) est croissante et majorée par 4, donc elle converge vers un réel ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

La fonction f est continue sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ donc en ℓ.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

Dans I, l'équation est équivalente à l'équation $\sqrt{3x+4} = x$, c'est-à-dire $3x + 4 = x^2$ (la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$), soit $x^2 - 3x - 4 = 0$.
Or, $0 \leqslant \ell \leqslant 4$.
Dans $[0\,;4]$, la seule solution de cette équation est 4, donc la suite (v_n) converge vers $\ell = 4$.

71 **1. a)** La fonction rationnelle f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2}.$$

Pour tout réel $x \geqslant 1$, $x(x-1) \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (mettre x en facteur au dénominateur et simplifier pour lever l'indétermination).
D'où le tableau de variations de f :

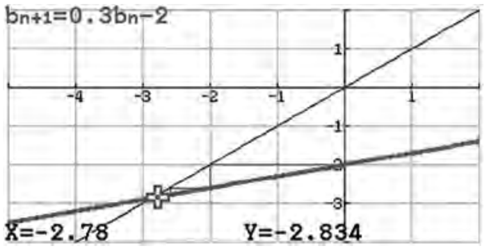
x	1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) $f(1) = 1$ et f est croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant f(1)$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant 1$.
2. a) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{4}{3}$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $1 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$.
La fonction f est croissante sur $[1\,;+\infty[$, donc $f(1) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(u_k)$, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.
Donc la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 1$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
La fonction rationnelle f est continue sur $[1\,;+\infty[$, donc en ℓ.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $[1\,;+\infty[$ de l'équation $\dfrac{x^2}{2x-1} = x$, c'est-à-dire $x^2 = x(2x-1)$, soit $x(x-1) = 0$. La solution de cette équation dans $[1\,;+\infty[$ est 1, donc $\ell = 1$.
Conclusion : la suite (u_n) converge vers 1.
3. a) Cet algorithme renvoie le terme de la suite dont la distance à 1 est inférieure ou égale à 10^{-p}.
b)

```python
def Distance(p):
    n=0
    u=2
    while u-1>10**-p:
        u=u**2/(2*u-1)
        n=n+1
    return n,u
```

```
>>> Distance(6)
(5, 1.0000000002328306)
```

Donc u_5 est le terme d'indice le plus petit à une distance de 1 inférieure à 10^{-6}. La suite (u_n) étant décroissante, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n - 1 \leqslant 10^{-6}$.

72 **1. a)** 

b) Il semble que la suite (v_n) est décroissante et minorée par -3.
2. a) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $-3 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n$.
Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 0, v_1 = -2$ donc $-3 \leqslant v_1 \leqslant v_0$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $-3 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k$. Alors :
$0{,}3 \times (-3) - 2 \leqslant 0{,}3v_{k+1} - 2 \leqslant 0{,}3v_k - 2$, c'est-à-dire $-2{,}9 \leqslant v_{k+2} \leqslant v_{k+1}$, et donc

$$-3 \leqslant v_{k+2} \leqslant v_{k+1}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$-3 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n.$$

b) La suite (v_n) est décroissante et minorée par -3.
Donc la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \geqslant -3$.
c) Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
La fonction $f : x \mapsto 0{,}3x - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en ℓ.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $[-3\,;+\infty[$ de l'équation $0{,}3x - 2 = x$, c'est-à-dire $0{,}7x = -2$. La solution de cette équation dans est $-\dfrac{20}{7}$, donc $\ell = -\dfrac{20}{7}$.
Conclusion : la suite (u_n) converge vers $-\dfrac{20}{7}$.

73 **a)**• On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant 0$.
Initialisation : pour $n = 0$, $a_0 = 1$ et $a_0 \geqslant 0$.
Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $a_k \geqslant 0$.
Pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{1+a_n^2} \geqslant 0$. Donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\dfrac{a_k}{1+a_k^2} \geqslant 0$, c'est-à-dire $a_{k+1} \geqslant 0$.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant 0$.
• Pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{1+a_n^2} - a_n$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n - a_n - a_n^3}{1+a_n^2} = \frac{-a_n^3}{1+a_n^2}$$

Pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant 0$ donc $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $a_{n+1} \leqslant a_n$.

b) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc la suite (v_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$.

La fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en ℓ.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $[0\,;+\infty[$ de l'équation $\dfrac{x}{1+x^2} = x$, c'est-à-dire $x(1+x^2) = x$, soit $x^3 = 0$.

La solution de cette équation est 0, donc $\ell = 0$.

Conclusion : la suite (a_n) converge vers 0.

74 **Parcours 1**

f est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}.$$

La fonction rationnelle *f* est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > -1$,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x+1) - x^3}{(x+1)^2} = \frac{x^2(2x+3)}{(2x-1)^2}.$$

Pour tout réel $x > -1$, $f'(x) \geqslant 0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (mettre *x* en facteur au dénominateur et simplifier pour lever l'indétermination) et $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variations de *f* :

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

La fonction rationnelle *f* est continue et strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$.

$5 \in]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Parcours 2

1. a) La fonction polynôme *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = 3x^2 - 4x + 1$, c'est-à-dire $g'(x) = (x-1)\,(3x-1)$.

Donc la fonction *g* est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right]$ et sur $[1\,;+\infty[$, strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{3}\,;1\right]$.

b) Pour tout réel $x \neq 0$,

$$g(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right).$$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

c)

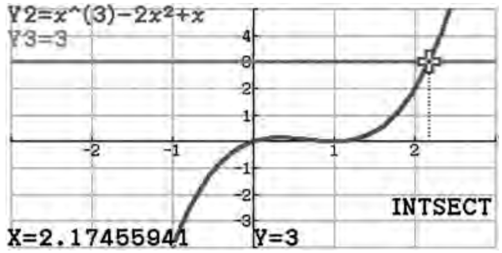
x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

2. a) Pour tout réel $x \leqslant 1$, $g(x) \leqslant \dfrac{4}{27}$ d'où $g(x) < 3$.

Donc l'équation (**F**) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;1]$.

b) La fonction *g* est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

$3 \in [0\,;+\infty[$ donc l'équation (**F**) admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

c) 

Donc $\alpha \approx 2{,}17$.

75 **a)** La fonction polynôme *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (mettre x^3 en facteur pour lever l'indétermination) et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variations de *f* :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-12	↗	$+\infty$

• La fonction *f* est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

$0 \in]-\infty;4]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty\,;0]$.

• La fonction *f* est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

$0 \in [-12;4]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[0\,;2]$.

• La fonction *f* est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

$0 \in [-12;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution γ dans $[2\,;+\infty[$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions α, β, γ dans $\mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta < \gamma$.

b) • $f(-1) = -12$ et $f(0) = 4$.

Ainsi, $f(-1) < 0 < f(0)$ c'est-à-dire $f(-1) < f(\alpha) < f(0)$ soit, parce que f est croissante sur $[-1\,;0]$,

$$-1 < \alpha < 0.$$

• $f(0) = 4$ et $f(1) = -4$.

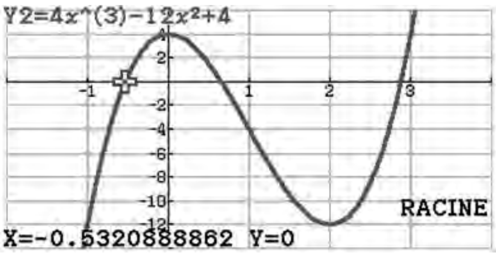
Ainsi, $f(1) < 0 < f(0)$ c'est-à-dire $f(1) < f(\beta) < f(0)$ soit, parce que f est décroissante sur $[0\,;1]$,

$$0 < \beta < 1.$$

• $f(2) = -12$ et $f(3) = 4$. .

Ainsi, $f(2) < 0 < f(3)$ c'est-à-dire $f(2) < f(\gamma) < f(3)$ soit, parce que f est croissante sur $[2\,;3]$,

$$2 < \gamma < 3.$$

c) 

On obtient $-0{,}54 < \alpha < -0{,}53$ et de même : $0{,}65 < \beta < 0{,}66$ et $2{,}87 < \gamma < 2{,}88$.

76 **1. a)** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$.

Pour tout réel x, $g'(x) > 0$, donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

Or, $7 \in]1\,;+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 7$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$.

b) $g(0) = \sqrt{2}$ et $g(5) = \sqrt{1+e^5}$ soit $g(5) \approx 12{,}2$.

Or, $7 \in]\sqrt{2}\,;\sqrt{1+e^5}[$ donc $0 < x_0 < 5$.

2. a) Ce programme renvoie l'arrondi avec p chiffres après la virgule d'une valeur approchée par excès à 10^{-p} près de x_0.

Voici l'affichage obtenu.

```
>>>
3.871202
```

Donc $3{,}871201 < x_0 < 3{,}871202$.

77 **1. a)•** Le volume d'eau, en dm^3, versé initialement dans le vase est $\pi \times 1^2 \times 0{,}5$, c'est-à-dire $0{,}5\pi$.

• Le volume de la bille, en dm^3, est $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^3$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{6}\pi d^3$.

b) Ce volume, en dm^3, s'exprime des deux façons suivantes :

• $0{,}5\pi + \dfrac{1}{6}\pi d^3$

• $\pi \times 1^2 \times d$, c'est-à-dire πd

c) Ainsi, $0{,}5\pi + \dfrac{1}{6}\pi d^3 = \pi d$,

c'est-à-dire $\dfrac{1}{6}d^3 - d + 0{,}5 = 0$, soit $d^3 - 6d + 3 = 0$.

De plus le diamètre de la bille ne peut pas dépasser le diamètre du vase, donc $0 < d < 2$.

2. a) La fonction polynôme $f : x \mapsto x^3 - 6x + 3$ est dérivable sur $]0\,;2[$ et pour tout réel x de $]0\,;2[$, $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$,

c'est-à-dire $f'(x) = 3(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

Pour tout réel x de $]0\,;2[$, $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{2}$.

D'où le tableau de variations de f :

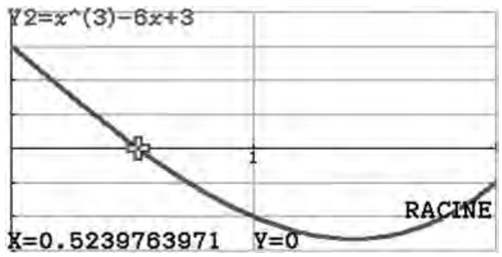
x	0		$\sqrt{2}$		2
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ 3	$\searrow$	$3-4\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1 ‖

• La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\sqrt{2}]$.

$0 \in [3-4\sqrt{2}\,;3[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution d_0 dans $]0\,;\sqrt{2}]$.

• Pour tout réel x de l'intervalle $[\sqrt{2}\,;2[$, $f(x) < 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[\sqrt{2}\,;2[$,

Conclusion : l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet d_0 pour unique solution dans $]0\,;2[$.

b) 

Donc, en dm, $0{,}52 < d_0 < 0{,}53$.

78 **a)** • La fonction v est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $v'(t) = 3e^{-\frac{t}{10}}$.

La fonction v' est continue et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$; de plus $v'(0) = 3$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v'(t) = 0$.

Or, $0{,}1 \in]0\,;3]$, donc l'équation $v'(t) = 0{,}1$ admet une unique solution t_0 dans $[0\,;+\infty[$.

La fonction v' est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ donc pour tout réel $t \geqslant t_0$, $v'(t) \leqslant 0{,}1$.

b) Tant que $3e^{\frac{t}{10}} > 0{,}1$

| $t \leftarrow t + 0{,}1$

Fin tant que

c)

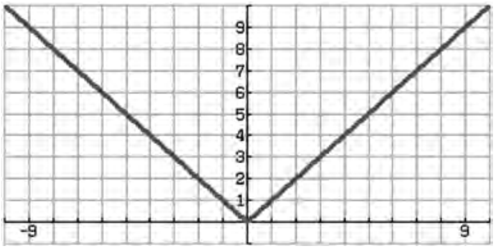
```
from math import *

def Seuil(s):
    t=0
    while 3*exp(-t/10)>0.1:
        t=t+0.1
    return t
```

```
>>> Seuil(0.1)
34.100000000000215
```

La vitesse de la randonneuse est stabilisée après environ 34,1 s de descente.

79 **a)** Par exemple, la fonction carré est continue et dérivable en 0.

b) Par exemple la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

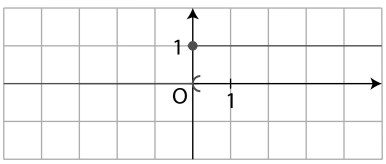


La fonction $x \mapsto -x$ admet -1 pour nombre dérivé en 0 et la fonction $x \mapsto x$ admet 1 pour nombre dérivé en 0. Donc la courbe de la fonction valeur absolue n'a pas de tangente au point d'abscisse 0.

c) La propriété énoncée au paragraphe **1. A** du cours, affirme « Si une fonction est dérivable en *a*, alors elle est continue en *a* ».

Sa contraposée « Si une fonction est discontinue en *a*, alors elle n'est pas dérivable en *a* » est donc vraie.

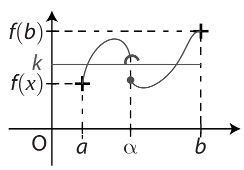
Par conséquent toute fonction discontinue en *a* est non dérivable en *a* ; c'est le cas par exemple de la fonction représentée ci-dessous en $a = 0$.



d) Il n'existe pas de telle fonction car une fonction dérivable en *a* est continue en *a*.

80 **a)** Si pour tous réels *a* et *b* d'un intervalle I avec $a < b$ et si pour tout $k \in]f(a) ; f(b)[$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $c \in]a ; b[$, alors la fonction *f* est continue sur I.

b) La fonction représentée respecte les hypothèses de la réciproque, mais cette fonction est discontinue en α de $]a ; b[$.



81 **1. a)** $A_n(x_n ; f(x_n))$ et $B(b ; f(b))$ avec $x_n \neq b$.

La pente de la droite (A_nB) est $m = \dfrac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}$, donc une équation de cette droite est :

$$y = (x - x_n)\frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n} + f(x_n).$$

b) Le point d'intersection A_{n+1} de la droite (A_nB) avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(x_{n+1} ; 0)$; elles vérifient :

$$0 = (x_{n+1} - x_n)\frac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n} + f(x_n),$$

c'est-à-dire $-f(x_n) = (x_{n+1} - x_n)\dfrac{f(b) - f(x_n)}{b - x_n}$, soit

$$-\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) = x_{n+1} - x_n$$

Ainsi, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$.

2. a) • Pour tout entier naturel *n*,

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n)$$

Or, pour tout entier naturel *n*, $b - x_n > 0$, $f(b) - f(x_n) > 0$ et $f(x_n) \leqslant 0$, donc $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Ainsi, la suite (x_n) est croissante.

• Pour tout entier naturel *n*, $a \leqslant x_n \leqslant b$. Donc la suite (x_n) est majorée par *b*.

b) La suite (x_n) est croissante et majorée par *b*, donc la suite (x_n) converge vers un réel ℓ tel que $a \leqslant \ell \leqslant b$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = \ell$.

La fonction $x \mapsto x - \dfrac{b - x}{f(b) - f(x)} f(x)$ est continue sur $[a ; b[$, donc en ℓ.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans l'intervalle $[a ; b[$ de l'équation :

$$x = x - \frac{b - x}{f(b) - f(x)} f(x),$$

c'est-à-dire $(b - x)f(x) = 0$, soit $f(x) = 0$.

Donc $\ell = \alpha$, car α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a ; b[$.

Conclusion : la suite (x_n) converge vers α.

3. a) Cadre rouge : f(x)

1er cadre vert : a

2^{e} cadre vert : X – (b – X)/(f(b) – f(X))*f(X)

b) • La fonction polynôme *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel *x*, $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Pour tout réel *x*, $f'(x) > 0$ donc la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 1]$.

• La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 6x$. Donc pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f''(x) \geqslant 0$.
Donc la fonction f est convexe sur $[0\,;1]$.
• La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$.
$f(0) = -1$, $f(1) = 1$ donc $0 \in [-1;1]$.
Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0\,;1]$.

c)
```
def f(x):
    y=x**3+x-1
    return y

def Secante(a,b,p):
    X=a
    n=0
    while abs(f(X))>10**(-p):
        X=X-(b-X)/(f(b)-f(X))*f(X)
        n=n+1
    return n,X
```

On obtient :
```
>>> Secante(0,1,6)
(11, 0.6823276862113437)
```

Donc $x_{11} \approx 0{,}68232768$ et x_{11} est le 1er terme de la suite tel que $|f(x_n)| \leqslant 10^{-6}$.

4. La droite (AA_n) a pour équation :
$$y = (x - x_n)\frac{f(a) - f(x_n)}{a - x_n} + f(x_n).$$
La suite (x_n) est définie par $x_0 = b$ et pour tout entier naturel n,
$$x_{n+1} = x_n - \frac{a - x_n}{f(a) - f(x_n)} f(x_n).$$
On montre que cette suite est décroissante et minorée par a.
Cette suite converge vers un réel ℓ' tel que $a \leqslant \ell' \leqslant b$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = \ell$.
La fonction $x \mapsto x - \dfrac{a - x}{f(a) - f(x)} f(x)$ est continue sur $]a\,;b]$, donc en ℓ'.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\ell')$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ' est solution dans l'intervalle $]a\,;b]$ de l'équation :
$$x = x - \frac{a - x}{f(a) - f(x)} f(x),$$
c'est-à-dire $(a - x)f(x) = 0$, soit $f(x) = 0$.
Donc $\ell' = \alpha$, car α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]a\,;b]$.

82 **1. a)** Une équation de la tangente à la courbe en $B_n(x_n\,;f(x_n))$ est :
$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$
b) Le point d'intersection B_{n+1} de cette tangente avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(x_{n+1}\,;0)$; elles vérifient :
$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n),$$
c'est-à-dire $-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n$,
soit $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

2. a) • Pour tout entier naturel n,
$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$
Or, pour tout entier naturel n,
$f'(x_n) > 0$ et $f(x_n) \geqslant 0$, donc $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $x_{n+1} \leqslant x_n$.
Ainsi, la suite (x_n) est décroissante.
• Pour tout entier naturel n, $a \leqslant x_n \leqslant b$. Donc la suite (x_n) est minorée par a.
b) La suite (x_n) est décroissante et minorée par a, donc la suite (x_n) converge vers un réel ℓ tel que $a \leqslant \ell \leqslant b$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = \ell$.
La fonction $x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ est continue sur $[a\,;b]$, donc en ℓ
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans l'intervalle $[a\,;b]$ de l'équation :
$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$
c'est-à-dire $f(x) = 0$.
Donc $\ell = \alpha$, car α est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a\,;b]$.
Conclusion : la suite (x_n) converge vers α.

3. a) 1er cadre rouge : f(x)
2^{e} cadre rouge : f′(x)
Cadre vert : X−f(X)/df(X)

b)
```
def f(x):
    y=x**3+x-1
    return y

def df(x):
    y=3*x**2+1
    return y

def Newton(a,b,p):
    X=b
    n=0
    while abs(f(X))>10**(-p):
        X=X-f(X)/df(X)
        n=n+1
    return n,X
```

On obtient :
```
>>> Newton(0,1,6)
(4, 0.6823278039465127)
```

Donc $x_4 \approx 0{,}68232780$ et x_4 est le 1er terme de la suite tel que $|f(x_n)| \leqslant 10^{-6}$.
On remarque que la condition $|f(x_n)| \leqslant 10^{-6}$ est obtenue plus rapidement avec la méthode de New-

ton $(n = 4)$ qu'avec la méthode de la sécante $(n = 11)$.

83 • La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-10\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant -10$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x.$$

Pour tout réel $x \geqslant -10$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (limite du produit).

D'où le tableau de variations de f :

x	-10		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-10)$	$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-10) = -9 \times \mathrm{e}^{-10} - 3$ et $f(-10) \approx -3$.

$f(-2) = -\mathrm{e}^{-2} - 3$ et $f(-2) \approx -3{,}14$.

• Pour tout réel $x \in [-10\,;-2]$, $f(x) < 0$.

• La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-2\,;\infty[$.

$0 \in [f(-2);+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-2\,;+\infty[$.

Ainsi, pour tout réel $x \in [-2\,;\alpha]$, $f(x) \leqslant 0$ et pour tout réel $x \in [\alpha\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

D'où le tableau de signes de $f(x)$ selon les valeurs de x :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

84 Pour tout réel $x \neq 0$,

$$\mathrm{P}(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right).$$

1^er^ cas : $a_n > 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{P}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n = -\infty$ (car n impair)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{P}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n = +\infty$

La fonction polynôme P est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in]-\infty\,;+\infty[$, donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

2^e^ cas : $a_n < 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{P}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n = +\infty$ (car n impair)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{P}(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n = -\infty$

La fonction polynôme P est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in]-\infty\,;+\infty[$, donc d'après le théorème de Bolzano, l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

85 **a)** La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[40\,;50]$ et pour tout réel x de l'intervalle $[40\,;50]$,

$$f'(x) = 1{,}5 - 0{,}02x.$$

$$1{,}5 - 0{,}02x \geqslant 0 \text{ si, et seulement si, } x \leqslant 75.$$

D'où le tableau de variations de f :

x	40		50
$f(x)$		$+$	
$f'(x)$	44	$\nearrow$	50

Donc pour tout réel $x \in [40\,;50]$, $f(x) \in [44\,;50]$ et donc $f(x) \in [40\,;50]$.

b) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $40 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 50$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 40$, $u_1 = 44$, donc $40 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 50$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $40 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 50$.

Or, la fonction f est croissante sur $[40\,;50]$, donc $f(40) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(50)$, et $40 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 50$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $40 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 50$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 50.

Donc la suite (u_n) converge vers un réel ℓ tel que $40 \leqslant \ell \leqslant 50$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.

La fonction polynôme f est continue sur $[40\,;50]$, donc en ℓ.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $[40\,;50]$ de l'équation $1{,}5x - 0{,}01x^2 = x$, c'est-à-dire $0{,}01x(50 - x) = 0$.

La solution de cette équation dans $[40\,;50]$ est 50, donc $\ell = 50$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 50.

Au cours du temps, cette population d'animaux se stabilisera vers une taille de 50 individus.

86 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 + 3x^2 \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

• Cette fonction est continue en 0.

En effet, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0) = 0$.

• Pour tout réel $x < 0$, $f'(x) = 12x^2 + 6x$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = 0$.

• Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 2x$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = 0$.

La fonction f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

La fonction dérivée f' est continue en 0.

$$f'(x) = \begin{cases} 12x^2 + 6x \text{ si } x < 0 \\ 2x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

• Pour tout réel $x < 0$, $f''(x) = 24x + 6$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f''(x) = 6$.

• Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = 2$.

La fonction f'' n'est pas dérivable en 0, donc f'' n'est pas continue en 0.

87 **1.** $f(0) = 0{,}1$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{C+1} = 0{,}1$, soit $C + 1 = 10$ et $C = 9$.

2. a) $f(15) = 0{,}19$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{9e^{-15a}+1} = 0{,}19$ soit $9e^{-15a} + 1 = \dfrac{100}{19}$. Ainsi, $e^{-15a} = \dfrac{9}{19}$.

b) La fonction $g : t \mapsto e^{-15t}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$,
$g'(t) = -15e^{-15t}$ et donc $g'(t) < 0$.
$\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$, d'où le tableau de variations de g :

t	0	$+\infty$
$g'(t)$	$-$	
$g(t)$	1 ↘	0

La fonction g est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
$\dfrac{9}{19} \in [0;1]$, donc l'équation $g(t) = \dfrac{9}{19}$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

c) À l'aide de la calculatrice, on obtient $a \approx 0{,}05$.

2. a) La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) = \dfrac{-9 \times 0{,}05e^{-0{,}05t}}{(9e^{-0{,}05t}+1)^2}$ c'est-à-dire $f'(t) = \dfrac{-0{,}45e^{-0{,}05t}}{(9e^{-0{,}05t}+1)^2}$.

Pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) < 0$.
$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$, d'où le tableau de variations de f :

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	0,1 ↘	1

b) La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
$0{,}9 \in [0{,}1;1]$, donc l'équation $f(t) = 0{,}9$ admet une solution unique t_0 dans $[0\,;+\infty[$.
À l'aide de la calculatrice, on obtient $t_0 \approx 88$.
La plante dépassera 88 cm de haut à partir du 88$^{\text{e}}$ jour.

88 **a)** La courbe affichée à l'écran de la calculatrice ne représente pas une fonction. En effet, on dirait que 0, par exemple, admet une infinité d'images, tous les réels de l'intervalle $[0\,;1]$.

b) La fonction f est discontinue en tout entier relatif k. En effet,

• pour tout réel x de l'intervalle $[k-1;k[$,
$$f(x) = x - (k-1)\,;$$
• pour tout réel x de l'intervalle $[k\,;k+1[$,
$$f(x) = x - k.$$
Donc $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x<k}} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to k \\ x>k}} f(x) = 0$, la fonction f n'admet pas de limite en k, donc elle n'est pas continue en k.

Objectif BAC

89 **Partie A**

1. Le café à une température initiale de 80 °C est placé dans une pièce où la température ambiante est plus fraîche, donc la température du café va diminuer au cours du temps.
On conjecture que la suite (T_n) est décroissante.

2. Pour tout entier naturel n,
$$T_{n+1} = T_n - 0{,}2(T_n - 10)$$
$$T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$$

3. a) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n$.

Initialisation : pour $n = 0$, $T_0 = 80, T_1 = 66$ donc $0 \leqslant T_1 \leqslant T_0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $0 \leqslant T_{k+1} \leqslant T_k$. Alors :
$0{,}8 \times 0 + 2 \leqslant 0{,}8T_{k+1} + 2 \leqslant 0{,}8T_k + 2$, c'est-à-dire $2 \leqslant T_{k+2} \leqslant T_{k+1}$, et donc
$$0 \leqslant T_{k+2} \leqslant T_{k+1}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $0 \leqslant T_{n+1} \leqslant T_n$.

b) La suite (T_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$.
Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} T_{n+1} = \ell$.
La fonction affine $f : x \mapsto 0{,}8x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en ℓ.
Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(T_n) = f(\ell)$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite, ℓ est solution dans $[0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = x$, c'est-à-dire $0{,}8x + 2 = x$, soit $x = 10$.
Donc la suite (T_n) converge vers $\ell = 10$.

4. a) Voici un tableau de suivi des variables, avec arrondi au dixième lorsque besoin :

n	0	1	2	3	4
T_n	80	66	54,8	45,8	38,7
$T_n \geqslant 40$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

L'algorithme renvoie la valeur $n = 4$.

b) Au bout de 4 min, la température du café sera d'environ 38,7 °C, soit moins de 40 °C.

Partie B

1. a) Les fonctions θ et $t \mapsto e^{-0,2t}$ sont dérivables sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $e^{-0,2t} \neq 0$.

Donc la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = \frac{\theta'(t)e^{-0,2t} + 0,2\theta(t)e^{-0,2t}}{(e^{-0,2t})^2}$$

$$f'(t) = \frac{(\theta'(t) + 0,2\theta(t))e^{-0,2t}}{(e^{-0,2t})^2}$$

Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) = 0$.

b) • $f(0) = \dfrac{\theta(0)}{e^0} = 80$

• D'après **a)** la fonction f est constante sur $[0\,;+\infty[$, donc pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$f(t) = f(0) = 80.$$

• Donc pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\theta(t) = f(t)e^{-0,2t} = 80e^{-0,2t}.$$

c) $\theta(0) = 80$ et pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\theta'(t) = 80 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -0,2\theta(t).$$

Donc θ est solution du problème.

2. • La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$g'(t) = 70 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -14e^{-0,2t}.$$

Donc pour tout réel $t \geqslant 0$, $g'(t) < 0$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,2t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 10$.

D'où le tableau de variations de g :

t	0	$+\infty$
$g'(t)$	$-$	
$g(t)$	80	↘ 10

• La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

$40 \in]10\,;80]$, donc l'équation $g(t) = 40$ admet une unique solution t_0 dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

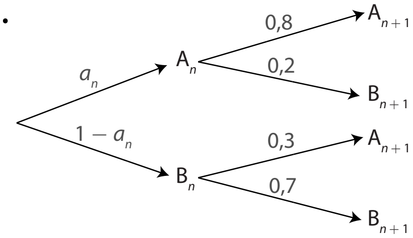
À l'aide de la calculatrice, on obtient $t_0 \approx 4,236$.

Ainsi, t_0 est environ égal à 4 min 14 s. En effet, $0,236 \times 60 \approx 14$.

Le café atteint la température de 40 °C au bout d'environ 4 min 14 s.

90 Partie A

1.



2. D'après la formule des probabilités totales, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = 0,8a_n + 0,3(1 - a_n),$$

c'est-à-dire $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

Partie B

1. a) Initialisation : pour $n = 1$, $a_1 = 0,5$ et $0 \leqslant a_1 \leqslant 0,6$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel $k \geqslant 1$, $0 \leqslant a_k \leqslant 0,6$.

Alors :

$$0,5 \times 0 + 0,3 \leqslant 0,5a_k + 0,3 \leqslant 0,5 \times 0,6 + 0,3$$

c'est-à-dire $0,3 \leqslant a_{k+1} \leqslant 0,6$, d'où $0 \leqslant a_{k+1} \leqslant 0,6$.

Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n$$

soit $a_{n+1} - a_n = -0,5a_n + 0,3$.

Or, d'après **a)**, $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$, donc $0 \geqslant -0,5a_n \geqslant -0,5 \times 0,6$ soit $-0,3 \leqslant -0,5a_n \leqslant 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$-0,3 + 0,3 \leqslant -0,5a_n + 0,3 \leqslant 0 + 0,3$$

soit $0 \leqslant -0,5a_n + 0,3 \leqslant 0,3$.

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $-0,5a_n + 0,3 \geqslant 0$ et $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.

Conclusion : la suite (a_n) est croissante.

c) La suite (a_n) est croissante et majorée par 0,6 donc la suite (a_n) converge vers un nombre réel ℓ tel que $0 \leqslant \ell \leqslant 0,6$. Donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,5a_n + 0,3) = 0,5\ell + 0,3$.

Par unicité de la limite d'une suite, $\ell = 0,5\ell + 0,3$, soit $0,5\ell = 0,3$, c'est-à-dire $\ell = 0,6$.

Conclusion : la suite (a_n) converge vers 0,6.

2. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5a_n + 0,3 - 0,6$

soit $u_{n+1} = 0,5a_n - 0,3 = 0,5(a_n - 0,6)$

c'est-à-dire $u_{n+1} = 0,5u_n$.

Conclusion : la suite (u_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6$ c'est-à-dire $u_1 = a - 0,6$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$$

Et donc $a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$.

c) $0 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$.

Cette limite ne dépend pas de la valeur de a.

d) Plus le joueur s'adonne aux jeux vidéo, plus la probabilité qu'il fasse une partie A est proche de 0,6, donc la probabilité qu'il fasse une partie B est proche de 0,4.

Le joueur verra donc plus souvent la publicité insérée au début des parties du jeu A.

91 **1.** La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = 2e^{-t} - 2te^{-t} = 2(1-t)e^{-t}.$$

Donc pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t)$ est du signe de $1-t$.

Donc la fonction f est croissante sur $[0\,;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.

2. La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale au bout d'une heure.

$f(1) = 2e$ donc la concentration maximale est $2e$ g.L^{-1}, soit environ 5,44 g.L^{-1}.

3. $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$ (en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances) donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

L'alcool tend à s'éliminer totalement au cours du temps.

4. a) Voici le tableau de variations de f :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	0

• La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$.

$0{,}2 \in [0;2e]$ donc l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une unique solution t_1 dans l'intervalle $[0\,;1]$.

• La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

$0{,}2 \in]0;2e]$ donc l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une unique solution t_2 dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

b) A l'aide de la calculatrice, on obtient $t_1 \approx 0{,}112$ et $t_2 \approx 3{,}577$.

$60 \times 0{,}577 \approx 34{,}6$ donc Paul doit attendre environ 3 h 35 min avant de reprendre le volant.

5. a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

$5 \times 10^{-3} \in]0;2e]$ donc l'équation $f(t) = 5 \times 10^{-3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

Donc il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable dans le sang.

b) On tabule la fonction f avec le pas 0,25 à partir de 3,5 :

X	Y1
3.5	0.2114
3.75	0.1764
4	0.1465
4.25	0.1212
4.5	0.1
4.75	0.0822
5	0.0674
5.25	0.0551
5.5	0.045
5.75	0.0366
6	0.0297

X	Y1
6.25	0.0241
6.5	0.0195
6.75	0.0158
7	0.0128
7.25	0.0103
7.5	0.0083
7.75	0.0067
8	0.0054
8.25	0.0043
8.5	0.0035
8.75	0.0028

L'algorithme renvoie la valeur $t = 8{,}25$ pour laquelle $f(8{,}25) < 0{,}005$.

Ainsi, il faut 8 h 25 min pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang de Paul.

92 **a)** • a et b sont deux nombres réels d'un intervalle I tels que $a < b$.

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c dans l'intervalle $[a\,;b]$.

• Ce théorème des valeurs intermédiaires permet, sous les conditions ci-dessus, de déterminer l'existence de solutions d'une équation du type $f(x) = k$ et est à la base de méthodes algorithmiques (balayage, dichotomie…) pour déterminer des approximations de ces solutions.

93 **1. a)** On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 5$, donc $u_0 \geqslant 4$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $u_k \geqslant 4$.

Alors, $u_k + 12 \geqslant 16$.

Or, la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $\sqrt{u_k + 12} \geqslant \sqrt{16}$, c'est-à-dire $u_{k+1} \geqslant 4$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$.

b) • Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - 4 = \sqrt{u_n + 12} - 4.$$

$$u_{n+1} - 4 = \frac{(\sqrt{u_n + 12} - 4)(\sqrt{u_n + 12} + 4)}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$$

$$u_{n+1} - 4 = \frac{u_n + 12 - 16}{\sqrt{u_n + 12} + 4} = \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \quad \textbf{(1)}$$

Or, d'après **a)**, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$ donc $u_n + 12 \geqslant 16$ et $\sqrt{u_n + 12} \geqslant 4$. On en déduit que pour tout entier naturel n, $\sqrt{u_n + 12} + 4 \geqslant 8$. Or, la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$, , donc pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \leqslant \dfrac{1}{8} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

On en déduit à l'aide de la question **a)** et de l'égalité **(1)**, que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_n - 4).$$

• On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^n}$.

Initialisation : pour $n=0$, $u_0 = 5$, donc $u_0 - 4 = 1 = \frac{1}{4^0}$ et $u_0 - 4 \leqslant \frac{1}{4^0}$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $u_k - 4 \leqslant \frac{1}{4^k}$.

D'après la propriété démontrée précédemment, $u_{k+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4}(u_k - 4)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$u_{k+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^k}$ soit $u_{k+1} - 4 \leqslant \frac{1}{4^{k+1}}$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^n}$.

c) $0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Or, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n - 4 \leqslant \frac{1}{4^n}$,

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 4) = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 4.

2. • On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Initialisation : pour $n=0$, $u_0 = 5$, $u_1 = \sqrt{17}$, soit $u_1 \approx 4{,}1$. Donc $4 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $4 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_k$.

Alors, $16 \leqslant u_{k+1} + 12 \leqslant u_k + 12$.

Or, la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $4 \leqslant \sqrt{u_{k+1}+12} \leqslant \sqrt{u_k + 12}$ et $4 \leqslant u_{k+2} \leqslant u_{k+1}$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $4 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

• La suite (u_n) est décroissante et minorée par 4, donc elle converge vers un réel $\ell \geqslant 4$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et la fonction racine carrée étant continue sur $[0\,;+\infty[$, donc en ℓ, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{u_n + 12}\right) = \sqrt{\ell + 12}$.

Par unicité de la limite d'une suite, $\ell = \sqrt{\ell + 12}$, soit, parce que ℓ et $\sqrt{\ell+12}$ sont des nombres positifs, $\ell^2 = \ell + 12$, c'est-à-dire $\ell^2 - \ell - 12 = 0$. Donc $\ell = -3$ ou $\ell = 4$; or, $\ell \geqslant 4$ donc $\ell = 4$.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers 4.

94 **a) Vrai.** En effet,

• la fonction $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\infty\,;1[$ et la fonction f est continue sur $]-\infty\,;1[$;

• la fonction $x \mapsto \frac{x-5}{x}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, donc en particulier sur $]1;+\infty[$ et la fonction f est continue sur $]1;+\infty[$;

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 2x - 3) = -4$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-5}{x} = -4$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = -4 = f(1)$.

Conclusion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Faux. En effet,

• sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$, la fonction f (c'est-à-dire $x \mapsto x^2 - 2x - 3$) est continue et strictement décroissante.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(1) = -4$.

Or, $0 \in [-4\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty;1]$;

• sur l'intervalle $[1;+\infty[$, la fonction f (c'est-à-dire $x \mapsto \frac{x-5}{x}$) est continue et strictement croissante.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $f(1) = -4$.

Or, $0 \in [-4\,;1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions (et non trois) dans $\mathbb{R}$.

c) Faux. En effet,

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe de f ;

• $f(0) = -3$ donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote verticale d'équation $x = 0$.

Conclusion : la courbe de f admet la seule droite d'équation $y = 1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

Pour aller plus loin

95 **Partie A**

1. a) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $a \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant b$.

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = a$, $v_0 = b$, donc $a \leqslant u_0 \leqslant v_0 \leqslant b$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $a \leqslant u_k \leqslant v_k \leqslant b$.

On procède par disjonction de cas.

1[er] cas : $f\left(\dfrac{u_k+v_k}{2}\right) \geqslant 0$

$u_{k+1}=u_k,\ v_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}.$

De l'hypothèse de récurrence $a \leqslant u_k$, on déduit que $a \leqslant u_{k+1}$.

On sait que v_{k+1} est le centre de $[u_k\,;v_k]$, donc $u_k \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k$. De l'hypothèse de récurrence $v_k \leqslant b$, on déduit que $u_k \leqslant v_{k+1} \leqslant b$.

Donc $a \leqslant u_{k+1} \leqslant v_{k+1} \leqslant b$.

2[e] cas : $f\left(\dfrac{u_k+v_k}{2}\right) < 0$

$v_{k+1}=v_k,\ u_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}.$

On sait que u_{k+1} est le centre de $[u_k\,;v_k]$, donc $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant v_k$. De l'hypothèse de récurrence $a \leqslant u_k$, on déduit que $a \leqslant u_{k+1} \leqslant v_k$.

De l'hypothèse de récurrence $v_k \leqslant b$, on déduit que $v_{k+1} \leqslant b$.

Donc $a \leqslant u_{k+1} \leqslant v_{k+1} \leqslant b$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $a \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant b$.

• Au cours du raisonnement par récurrence précédent, on a établi le sens de sens de variation des deux suites : la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

• On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - v_n = \dfrac{a-b}{2^n}$.

Initialisation : $u_0 - v_0 = a - b = \dfrac{a-b}{2^0}$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $u_k - v_k = \dfrac{a-b}{2^k}$.

1[er] cas : $f\left(\dfrac{u_k+v_k}{2}\right) \geqslant 0$

$u_{k+1}=u_k,\ v_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}.$

$$u_{k+1}-v_{k+1}=u_k-\frac{u_k+v_k}{2}=\frac{u_k-v_k}{2}$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$u_{k+1}-v_{k+1}=\frac{a-b}{2^{k+1}}.$$

2[e] cas : $f\left(\dfrac{u_k+v_k}{2}\right) < 0$

$v_{k+1}=v_k,\ u_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}.$

$$u_{k+1}-v_{k+1}=\frac{u_k+v_k}{2}-v_k=\frac{u_k-v_k}{2}$$

Donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$u_{k+1}-v_{k+1}=\frac{a-b}{2^{k+1}}.$$

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$u_n-v_n=\frac{a-b}{2^n}.$$

• Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) On sait (voir exercice 102 p. 226) que deux suites adjacentes ont la même limite.

2. a) • La suite (u_n) converge vers c de l'intervalle $[a\,;b]$. La fonction f est continue sur $[a\,;b]$ donc en c et pour tout entier naturel n, $u_n \in [a\,;b]$.

Donc la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(c)$.

• On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $f(u_n) \leqslant 0 \leqslant f(v_n)$.

Initialisation : pour $n=0$, $f(u_0)=f(a)$, $f(v_0)=f(b)$, donc $f(u_0) \leqslant 0 \leqslant f(v_0)$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $f(u_k) \leqslant 0 \leqslant f(v_k)$.

On procède par disjonction de cas.

1[er] cas : $f\left(\dfrac{u_k+v_k}{2}\right) \geqslant 0$

$u_{k+1}=u_k,\ v_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}.$

Donc $f(u_{k+1})=f(u_k)$ et par conséquent

$$f(u_{k+1}) \leqslant 0 \leqslant f(v_{k+1}).$$

2[e] cas : $f\left(\dfrac{u_k+v_k}{2}\right) < 0$

$v_{k+1}=v_k,\ u_{k+1}=\dfrac{u_k+v_k}{2}.$

Donc $f(v_{k+1})=f(v_k)$ et par conséquent

$$f(u_{k+1}) \leqslant 0 \leqslant f(v_{k+1}).$$

Conclusion : pour tout entier naturel n,

$$f(u_n) \leqslant 0 \leqslant f(v_n).$$

• Par passage à la limite dans l'inégalité $f(u_n) \leqslant 0$, on en déduit que $f(c) \leqslant 0$.

b) • La suite (v_n) converge vers c de l'intervalle $[a\,;b]$. La fonction f est continue sur $[a\,;b]$ donc en c et pour tout entier naturel n, $v_n \in [a\,;b]$.

Donc la suite $(f(v_n))$ converge vers $f(c)$.

• Par passage à la limite dans l'inégalité $0 \leqslant f(v_n)$, on en déduit que $f(c) \geqslant 0$.

c) Par passage à la limite dans l'encadrement $f(u_n) \leqslant 0 \leqslant f(v_n)$, on déduit $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$.

Donc $f(c)=0$.

Il existe donc un nombre réel de l'intervalle $[a\,;b]$ dont l'image par f est 0.

Partie B

1. a) La fonction f est continue sur $[a\,;b]$, donc il en est de même de la fonction g.

b) De $f(a) < k < f(b)$, on déduit que $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.

D'après la **partie A**, il existe au moins un nombre réel c de $[a\,;b]$ tel que $g(c)=0$. Ainsi, il existe un réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

2. Cas où $f(a) > f(b)$ et $f(a) > k > f(b)$

La fonction $h = -f$ est continue sur $[a\,;b]$. Alors, $h(a) < h(b)$ et $h(a) < -k < h(b)$.

Donc, d'après la question **1.**, il existe un réel c de $[a\,;b]$ tel que $h(c) = -k$.

Ainsi, il existe un réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c) = k$.

96 **1. a)** Pour $x = 0$ et $y = 0$, il vient $f(0+0) = f(0) + f(0)$, soit $f(0) = 2f(0)$, c'est-à-dire $f(0) = 0$.

b) Pour $y = -x$, il vient $f(x - x) = f(x) + f(-x)$, soit $f(0) = f(x) + f(-x)$, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$.

c) Initialisation : pour $n = 0$, $f(0x) = f(0) = 0$ et $0 \times f(x) = 0$, donc $f(0x) = 0 \times f(x)$.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel k, $f(kx) = kf(x)$. Alors :

$f((k+1)x) = f(kx + x) = f(kx) + f(x)$,

soit $f((k+1)x) = kf(x) + f(x)$,

c'est-à-dire $f((k+1)x) = (k+1)f(x)$.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $f(nx) = nf(x)$.

d) k désigne un nombre relatif négatif. On pose $k = -n$ avec n nombre entier naturel.

$f(kx) = f(-nx) = -f(nx)$ d'après **b)**, $f(kx) = -nf(x)$ d'après **c)** car $n \in \mathbb{N}$, $f(kx) = kf(x)$.

e) $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

D'après **c)**, $f(p) = f\left(q \times \dfrac{p}{q}\right) = q \times f\left(\dfrac{p}{q}\right)$

Donc $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{f(p)}{q}$.

Or, d'après **d)**, $f(p) = f(p \times 1) = p \times f(1)$.

Donc $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p \times f(1)}{q} = \dfrac{p}{q} \times f(1)$.

f) • x désigne un nombre réel et (u_n) est une suite de nombres rationnels tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.

– D'après **e)**, $f(u_n) = u_n \times f(1)$. Donc la suite $(f(u_n))$ converge vers $x \times f(1)$.

– La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en x.

Donc la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x)$.

• D'après l'unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $f(x) = x \times f(1)$.

g) Donc la fonction f est telle que pour tout réel x, $f(x) = ax$ où a désigne un nombre réel $(a = f(1))$.

Donc f est une fonction linéaire.

2. a) f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax$ où a désigne un nombre réel.

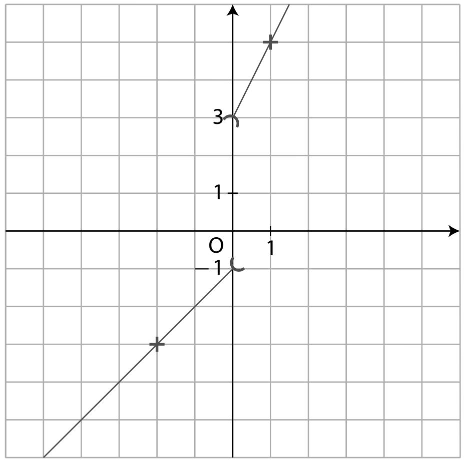
• f est continue sur $\mathbb{R}$.

• Pour tous réels x et y, $f(x + y) = k(x + y)$

Et donc $f(x+y) = kx + ky = f(x) + f(y)$.

b) L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ est constitué des fonctions linéaires.

97 **1. a)**

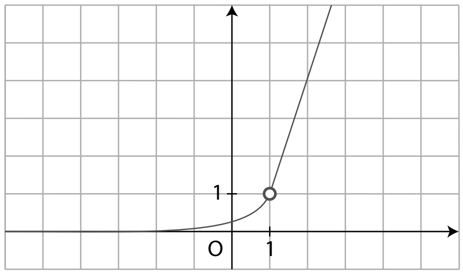


b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x - 1) = -1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2x + 3) = 3$

c) Il n'existe pas de nombre réel a tel que $g(0) = a$ et tel que g soit continue en 0.

2. a)



b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}(\mathrm{e}^{x-1}) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = \lim\limits_{x\to 1}(3x - 2) = 1.$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$.

La fonction g n'est pas définie en 1, donc la question de sa continuité en 1 ne se pose pas.

c) La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = \begin{cases} h(x) \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases} \text{ est continue en } \mathbf{1}.$$

En effet, $\lim\limits_{x\to 1} k(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = k(1) = 1$.

3. Pour tout réel $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)\mathrm{e}^x} = \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-2}$

Le prolongement par continuité de f en 2 est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 2 \\ \mathrm{e}^{-2} \text{ si } x = 2 \end{cases} = \frac{x-1}{\mathrm{e}^x}.$$

98 **1.** La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = x^3 - 3x + 4$.

La fonction polynôme f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 3x^2 - 3$.

2. a) Pour tout réel x, $f''(x) = 3(x-1)(x+1)$.

Donc, f' est croissante sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[1;+\infty[$, et décroissante sur $[-1\,;1]$.

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ (mettre x^3 en facteur pour lever l'indétermination) et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

D'où le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

• La fonction f' est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;-1]$.

$0 \in]-\infty\,;6]$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty\,;-1]$.

• Pour tout réel $x \geqslant -1$, $f'(x) > 0$ donc l'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[-1;+\infty[$.

c) On obtient $-2{,}20 \leqslant \alpha \leqslant -2{,}19$.

3. a) Voici le tableau de signes de f' :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (mettre x^4 en facteur pour lever l'indétermination).

Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) $f'(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha^3 - 3\alpha + 4 = 0$, soit $\alpha^3 = 3\alpha - 4$.

$$f(\alpha) = \frac{1}{4}\alpha^4 - \frac{3}{2}\alpha^2 + 4\alpha$$

$$f(\alpha) = \alpha\left(\frac{1}{4}\alpha^3 - \frac{3}{2}\alpha + 4\right)$$

$$f(\alpha) = \alpha\left(\frac{1}{4}(3\alpha - 4) - \frac{3}{2}\alpha + 4\right)$$

$$f(\alpha) = \alpha\left(3 - \frac{3}{4}\alpha\right) = \frac{3}{4}\alpha(4 - \alpha)$$

d) • D'après **c)**, $-2{,}20 \leqslant \alpha \leqslant -2{,}19$. Alors :

$$2{,}19 \leqslant -\alpha \leqslant 2{,}2$$

$$6{,}19 \leqslant 4 - \alpha \leqslant 6{,}2$$

$$2{,}19 \times 6{,}19 \leqslant -\alpha(4 - \alpha) \leqslant 2{,}2 \times 6{,}2$$

$$-2{,}2 \times 6{,}2, \leqslant \alpha(4 - \alpha) \leqslant -2{,}19 \times 6{,}19$$

et $-10{,}23 \leqslant f(\alpha) \leqslant -10{,}16$ d'où $f(\alpha) < 0$.

• La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\alpha]$.

$0 \in]f(\alpha)\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty\,;\alpha]$.

• La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.

$0 \in]f(\alpha)\,;+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[\alpha\,;+\infty[$.

Conclusion : le polynôme f admet deux racines exactement. Ce polynôme a pour racine évidente 0, c'est celle qui appartient à l'intervalle $[\alpha\,;+\infty[$.

99 La fonction polynôme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x) = 1731x^2 - 1632x - 1154$.

$\Delta = 1632^2 + 4 \times 1731 \times 1154 = 4\,631703$

La fonction polynôme g' a deux racines :

$$x_1 \approx -0{,}47 \text{ et } x_2 \approx 1{,}41.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ (mettre x^3 en facteur pour lever l'indétermination).

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(x_1)$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(x_1) \approx 1934{,}2$ et $g(x_2) \approx -1{,}9 \times 10^{-9}$.

• La fonction g est continue et strictement croissante sur $]-\infty\,;x_1]$.

$0 \in]-\infty\,;g(x_1)]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a dans $]-\infty\,;x_1]$.

• La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[x_1\,;x_2]$.

$0 \in [g(x_2)\,;g(x_1)]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β dans $[x_1\,;x_2]$.

• La fonction g est continue et strictement croissante sur $[x_2\,;+\infty[$.

$0 \in [g(x_2)\,;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution γ dans $[x_2\,;+\infty[$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions exactement.

Valeurs exactes des trois solutions

L'équation s'écrit donc successivement :

$$577x^3 - 816x^2 - 2 \times 577x + 2 \times 816 = 0.$$

$$577x(x^2 - 2) - 816(x^2 - 2) = 0$$

$$(577x - 816)(x^2 - 2) = 0$$

Les solutions de l'équation $g(x) = 0$ sont donc $\alpha = -\sqrt{2}$, $\beta = \dfrac{816}{577}$ et $\gamma = \sqrt{2}$.

100 • On démontre d'abord que la fonction f est périodique de période 1.

n désigne un nombre entier relatif.

Pour tout réel x de l'intervalle $[n\,;n+1[$,

$\mathrm{E}(x)=n$ et $\mathrm{E}(x+1)=n+1$ car $n+1\in[n+1;n+2[$.

$$f(x+1)=(x+1-\mathrm{E}(x+1))(x+1-\mathrm{E}(x+1)-1)$$
$$f(x+1)=(x+1-n-1)(x+1-n-1-1)$$
$$f(x+1)=(x-n)(x-n-1)$$
$$f(x+1)=(x-\mathrm{E}(x))(x-\mathrm{E}(x)-1)$$
$$f(x+1)=f(x)$$

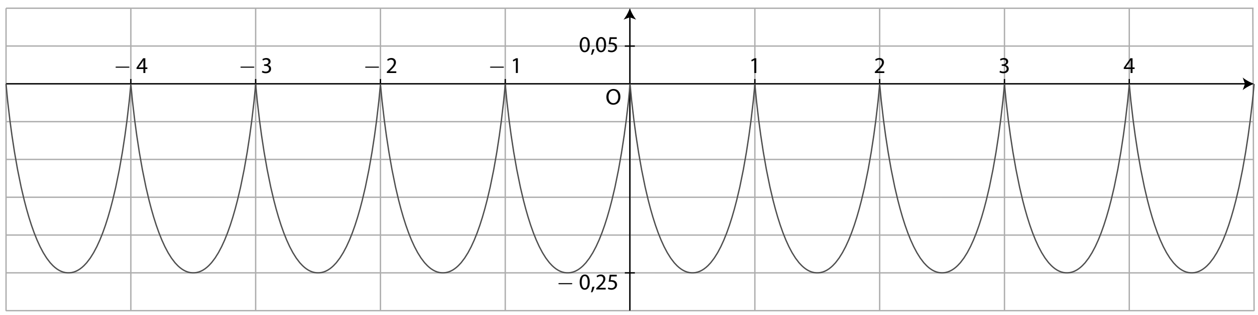
• Pour tout réel x de $[0\,;1[$,
$$f(x)=x(x-1).$$
Pour tout réel x de $[1\,;2[$,
$$f(x)=(x-1)(x-2).$$
La fonction polynôme $x\mapsto x(x-1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0\,;1[$.

La fonction polynôme $x\mapsto(x-1)(x-2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[1\,;2[$.
$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim_{x\to1}x(x-1)=0$$
$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim_{x\to1}(x-1)(x-2)=0$$
$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=0=f(1)$, donc la fonction f est continue en 1, et par conséquent sur $[0\,;2[$.

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$, les translations de vecteurs $k\vec{i}$ (avec $k\in\mathbb{Z}$) permettent d'obtenir la courbe représentative de f à partir de la courbe obtenue sur $[0\,;1[$.

Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Voici la courbe représentative de la fonction f.

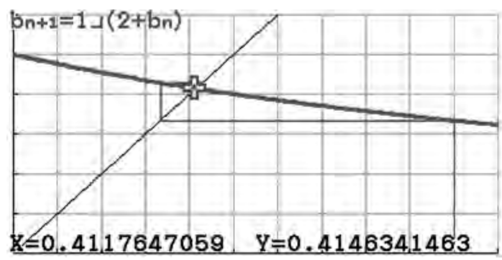


101 (u_n) est la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2+u_n}$.
$$u_1=\frac{1}{2+1}$$
$$u_2=\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+1}}$$
$$u_3=\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+1}}}$$
Et ainsi de suite ; déterminer A revient à étudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite si elle existe.

Conjecture : la représentation graphique ci-dessous de la suite (u_n) laisse penser que cette suite converge vers l'abscisse positive α du point d'intersection de la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{2+x}$ et la droite d'équation $y=x$.

Dans $[0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{2+x}=x$ équivaut à $x^2+2x-1=0$. Cette équation admet deux solutions : $\alpha=\sqrt{2}-1$ et $\beta=-(\sqrt{2}+1)$.

La suite (u_n) semble converger vers α.



Une preuve : (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$ où α et β sont les racines de l'équation $x^2+2x-1=0$. On sait que
$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-2 \text{ et } \alpha\beta=\frac{c}{a}=-1.$$

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \beta}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{\frac{1}{2+u_n} - \beta}{\frac{1}{2+u_n} - \alpha}$$

$$v_{n+1} = \frac{-\beta u_n + 1 - 2\beta}{-\alpha u_n + 1 - 2\alpha}$$

$$v_{n+1} = \frac{(\alpha+2)u_n - \alpha\beta - 2\beta}{(\beta+2)u_n - \alpha\beta - 2\alpha}$$

$$v_{n+1} = \frac{(\alpha+2)(u_n - \beta)}{(\beta+2)(u_n - \alpha)}$$

$$v_{n+1} = \frac{\alpha+2}{\beta+2} \times \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} = \frac{\alpha+2}{\beta+2} v_n$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{\alpha+2}{\beta+2} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1-\beta}{1-\alpha}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{1-\beta}{1-\alpha}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel n,

$v_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$ donc $(u_n - \alpha)v_n = u_n - \beta$ et par conséquent $u_n = \frac{\alpha v_n - \beta}{v_n - 1}$. En reportant l'expression de v_n, on obtient :

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^n \left(\alpha \frac{1-\beta}{1-\alpha} - \beta\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha} - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n\right)}$$

$$u_n = \frac{\alpha \frac{1-\beta}{1-\alpha} - \beta\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}{\frac{1-\beta}{1-\alpha} - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n}$$

Or, $-1 < \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha = \sqrt{2} - 1$.

Conclusion : $A = \sqrt{2} - 1$.

11 Fonction logarithme

Questions-Tests

1 **(2)** En effet, $f'(x) = 1 \times (e^x - 1) + x \times e^x$ c'est-à-dire $f'(x) = e^x - 1 + xe^x$.
Donc $f'(x) = (x+1)e^x - 1$.

2 **a) (2)** En effet, $e^{2x} \times e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
b) (1) En effet, $(e^x)^2 = e^{x\times 2} = e^{2x}$.
c) (2) En effet,
$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x \times e^{-x} + e^{-2x}$
c'est-à-dire $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2e^{x-x}$.
Donc $(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$.

3 **(1)** En effet, pour tout réel x, $e^x > 0$ et donc $3 + e^x > 0$ c'est-à-dire $g'(x) > 0$.

4 **(3)** En effet, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $e^{2x+1} = e^{x^2+1}$ équivaut à $2x + 1 = x^2 + 1$ c'est-à-dire $x(x-2) = 0$.
Donc $S = \{0\,;2\}$.

5 **a) (1)** En effet pour tout réel $x \neq 0$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 1) = -1$.
D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
b) (1) En effet, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ donc la courbe représentative de g dans un repère admet pour asymptote horizontale en $-\infty$ la droite d'équation $y = 0$.

6 **a) (2)** En effet, $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 3$ et $u'(x) = 2x$.
Pour tout réel x, $f'(x) = u'(x)\ e^{u(x)}$ c'est-à-dire $f'(x) = 2xe^{x^2+3}$.
b) (3) En effet, pour tout réel x, $e^{x^2+3} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $2x$.
Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;0]$ et $f'(x) > 0$ sur$[0, +\infty[$.
c) (2) En effet, d'après **b)** f admet un minimum en 0 égal à $f(0) = e^3$. Or $e^3 \approx 20{,}086$ donc $e^3 > 20$.

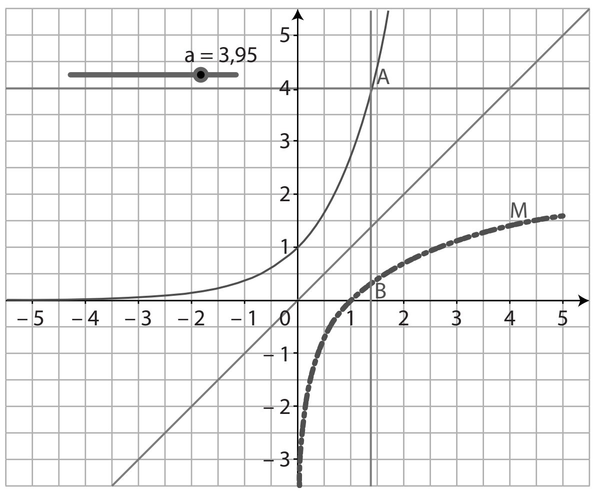
Découvrir

1 Équations $e^x = a$ avec $a > 0$

1 **a)** La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Donc, pour tout nombre réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une solution unique b dans $\mathbb{R}$.
b) s est définie sur $]0\,;+\infty[$.
$e^0 = 1$ donc $s(1) = 0$.
$e^1 = e$ donc $s(e) = 1$.

2 **c)** $s(a)$ est l'abscisse du point B.

3 **a)** et **b)**



a) L'abscisse du point M est l'ordonnée du point A et l'ordonnée du point M est l'abscisse du point A. A et M sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

b) M se déplace sur la courbe représentative de la fonction s.

c) s semble croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0} s(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = +\infty$.

2 Fonctionnement d'une table de logarithmes

1 **a)** $e^{\ln(a)} = a$.

b) $e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = ab$.

Donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$.

c) • $\ln(1) = \ln\left(b \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$.

Or $\ln(1) = 0$ donc $\ln(b) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = 0$ c'est-à-dire $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

• $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

2 **a)** • $\ln(a^1) = 1\ln(a)$ donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

• Soit n un nombre entier naturel avec $n \geqslant 1$, supposons que $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

$\ln(a^{n+1}) = \ln(a \times a^n) = \ln(a) + \ln(a^n)$

$= \ln(a) + n\ln(a)$

c'est à dire $\ln(a^{n+1}) = (n+1)\ln(a)$.

• Donc par récurrence sur n, pour tout nombre entier naturel n avec $n \geqslant 1$; $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

b) $\ln((\sqrt{a})^2) = 2\ln(\sqrt{a})$

c'est-à-dire $\ln(a) = 2\ln(\sqrt{a})$.

Donc $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

3 **a)** • $\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3)$ d'où $\ln(6) \approx 0{,}693\,147 + 1{,}098\,612$ c'est-à-dire $\ln(6) \approx 1{,}791\,759$.

• $\ln(4) = \ln(2 \times 2) = 2\ln(2)$

d'où $\ln(4) \approx 2 \times 0{,}693\,147$

c'est-à-dire $\ln(4) \approx 1{,}386\,294$.

• $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5)$

d'où $\ln(10) \approx 0{,}693\,147 + 1{,}609\,437$

c'est-à-dire $\ln(10) \approx 2{,}302\,584$.

• $\ln(0{,}1) = \ln\left(\dfrac{1}{10}\right) = -\ln(10)$

d'où $\ln(0{,}1) \approx -\,2{,}302\,584$.

• $\ln(0{,}25) = \ln\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\ln(4)$

d'où $\ln(0{,}25) \approx -\,1{,}386\,294$.

b) Avec la calculatrice on obtient :

$\ln(6) \approx 1{,}79\,175\,947$; $\ln(4) \approx 1{,}38\,629\,436$

$\ln(10) \approx 2{,}30\,258\,509$; $\ln(0{,}1) \approx -\,2{,}30\,258\,509$

$\ln(0{,}25) = -\,1{,}38\,629\,436$

Savoir-faire

3 **a)** Pour tout nombre réel x, $e^{7x} = 5$ équivaut à $7x = \ln(5)$ c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{7}\ln(5)$.

Donc, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{7}\ln(5)\right\}$.

b) Pour tout nombre réel $x > 0$, $\ln(x) = 5$ équivaut à $x = e^5$.

Donc, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{e^5\}$.

c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $6x - 1 > 0$ et $2x + 17 > 0$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{6}$ et $x > -\dfrac{17}{2}$ soit $E = \left]\dfrac{1}{6}\,;+\infty\right[$.

Pour tout x de E, $\ln(6x - 1) = \ln(2x + 17)$ équivaut à $6x - 1 = 2x + 17$ soit $x = \dfrac{9}{2}$.

$\dfrac{9}{2} \in E$, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$.

4 **a)** Pour tout nombre réel x, $4e^{3x} - 10 = 0$ équivaut à $e^{3x} = \dfrac{5}{2}$ c'est-à-dire $3x = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$ soit $x = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

Donc, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)\right\}$.

b) Pour tout nombre réel $x > 0$, $3\ln(x) = 7$ équivaut à $\ln(x) = \dfrac{7}{3}$ c'est-à-dire $x = e^{\frac{7}{3}}$.

Donc, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{e^{\frac{7}{3}}\right\}$.

c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $8x > 0$ et $3x - 7 > 0$, c'est-à-dire $x > 0$ et $x > \dfrac{7}{3}$ soit $E = \left]\dfrac{7}{3}\,;+\infty\right[$.

Pour tout x de E, $\ln(8x) = \ln(3x - 7)$ équivaut à $8x = 3x - 7$ soit $x = -\dfrac{7}{5}$.

$-\dfrac{7}{5} \notin E$ donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \varnothing$.

5 **a)** Pour tout nombre réel x, $e^{3x} \leqslant 4$ équivaut à $3x \leqslant \ln(4)$ c'est-à-dire $x \leqslant \dfrac{1}{3}\ln(4)$.

Donc, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{3}\ln(4)\right]$.

b) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $6x + 1 > 0$ c'est-à-dire $x > -\frac{1}{6}$ donc $E = \left]-\frac{1}{6}\,;+\infty\right[$.
Pour tout x de E, $\ln(6x+1) > 2$ équivaut à $6x+1 > e^2$, c'est-à-dire $x > \frac{e^2-1}{6}$.
Tous ces nombres sont dans E, donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left]\frac{e^2-1}{6}\,;+\infty\right[$.

c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3x > 0$ et $2 - 5x > 0$, c'est-à-dire $x > 0$ et $x < \frac{2}{5}$ soit $E = \left]0\,;\frac{2}{5}\right[$.
Pour tout x de E, $\ln(3x) < \ln(2 - 5x)$ équivaut à $3x < 2 - 5x$, c'est-à-dire $x < \frac{1}{4}$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E inférieurs à $\frac{1}{4}$ donc $\mathcal{S} = \left]0\,;\frac{1}{4}\right[$.

6 **a)** Pour tout nombre réel x, $e^{2x+7} - 5 < 0$ équivaut à $2x + 7 < \ln(5)$ c'est-à-dire $x < \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{7}{2}$.
Donc, l'ensemble des solutions est :
$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\frac{1}{2}\ln(5) - \frac{7}{2}\right[$.

b) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x - 7 > 0$ c'est-à-dire $x > 7$ donc $E =]7\,;+\infty[$.
Pour tout x de E, $\ln(x - 7) \leqslant 1$ équivaut à $x - 7 \leqslant e$, c'est-à-dire $x \leqslant e + 7$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E inférieurs ou égal à $e + 7$ donc $\mathcal{S} =]7\,;e + 7]$.

c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $5x - 2 > 0$ et $x - 3 > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{2}{5}$ et $x > 3$ soit $E =]3\,;+\infty[$.
Pour tout x de E, $\ln(5x - 2) > \ln(x - 3)$ équivaut à $5x - 2 > x - 3$, c'est-à-dire $x > -\frac{1}{4}$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E supérieurs à $-\frac{1}{4}$ donc $\mathcal{S} =]3\,;+\infty[$.

9 **a)** $\ln(5) + \ln(0{,}4) = \ln(5 \times 0{,}4) = \ln(2)$

b) $\ln\left(\frac{1}{16}\right) = -\ln(16) = -\ln(2^4) = -4\ln(2)$

c) $\ln(52) - \ln(13) = \ln\left(\frac{52}{13}\right) = \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)$

d) $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$

e) $\ln(\sqrt{32}) = \frac{1}{2}\ln(32) = \frac{1}{2}\ln(2^5) = \frac{5}{2}\ln(2)$

10 **a)** $\ln(72) = \ln(8 \times 9) = \ln(8) + \ln(9) = \ln(2^3) + \ln(3^2)$
Donc $\ln(72) = 3\ln(2) + 2\ln(3)$.

b) $\ln\left(\frac{9}{4}\right) = \ln(9) - \ln(4) = \ln(3^2) - \ln(2^2)$
Donc $\ln\left(\frac{9}{4}\right) = -2\ln(2) + 2\ln(3)$.

c) $\ln\left(\frac{3e}{8}\right) = \ln(3e) - \ln(8) = \ln(3) + \ln(e) - \ln(2^3)$
Donc $\ln\left(\frac{3e}{8}\right) = 1 - 3\ln(2) + \ln(3)$.

11 **a)** $\ln(e^2\sqrt{e}) = \ln(e^2) + \ln(\sqrt{e}) = 2\ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e)$.
Donc $\ln(e^2\sqrt{e}) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

b) $\ln(e^3) + \ln(e^{-2}) = 3\ln(e) - 2\ln(e) = 3 - 2 = 1$.

c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2\ln(e) = -2$.

12 **a)** $x + \ln(1 + 3e^{-x}) = \ln(e^x) + \ln(1 + 3e^{-x})$
$x + \ln(1 + 3e^{-x}) = \ln(e^x \times (1 + 3e^{-x}))$
$x + \ln(1 + 3e^{-x}) = \ln(e^x + 3e^{x-x})$
$x + \ln(1 + 3e^{-x}) = \ln(3 + e^x)$.

b) On déduit de **a)** que résoudre l'équation $x + \ln(1 + 3e^{-x}) = 2$ équivaut à résoudre l'équation $\ln(3 + e^x) = 2$ c'est-à-dire $3 + e^x = e^2$, soit $e^x = e^2 - 3$.
$e^2 - 3 > 0$ donc $x = \ln(e^2 - 3)$.
Donc l'ensemble de solutions est $S = \{\ln(e^2 - 3)\}$.

13 **a)** $4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x}) + \ln(1 + e^{-4x})$
$4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x} \times (1 + e^{-4x}))$
$4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x} + e^{4x-4x})$
$4x + \ln(1 + e^{-4x}) = \ln(e^{4x} + 1)$.

b) On déduit de **a)** que résoudre l'équation $4x + \ln(1 + e^{-4x}) = 7$ équivaut à résoudre l'équation $\ln(1 + e^{4x}) = 7$ c'est-à-dire $1 + e^{4x} = e^7$, soit $e^{4x} = e^7 - 1$.
$e^7 - 1 > 0$ donc $4x = \ln(e^7 - 1)$
c'est-à-dire $x = \frac{1}{4}\ln(e^7 - 1)$.
Donc l'ensemble de solutions est $S = \left\{\frac{1}{4}\ln(e^7 - 1)\right\}$.

14 Pour tout réel $x > 0$,
$\ln(x^3) - 6\ln(\sqrt{x}) = 3\ln(x) - 6 \times \frac{1}{2}\ln(x) = 0$.

15 Pour tout réel $x > 0$,
$\ln(2x+3) = \ln\left(x\left(2 + \frac{3}{x}\right)\right)$
$\ln(2x+3) = \ln(x) + \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right)$

18 **a)** Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est $y = \ln'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

Or $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ et $\ln'\left(\frac{1}{e}\right) = e$ donc une équation de T est $y = ex - 2$.

b) Une équation de la tangente T′ à la courbe $\mathscr{C}$ au point B est $y = \ln'(e^2)(x - e^2) + \ln(e^2)$.

Or $\ln(e^2) = 2$ et $\ln'(e^2) = \frac{1}{e^2}$ donc une équation de T′ est $y = \frac{1}{e^2}x + 1$.

19 Pour tout nombre réel $x > 0$,

$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $f'(x) = \ln(x) + 1$.

La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Or, pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ c'est-à-dire $f''(x) > 0$.

Donc, la fonction ln est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

22 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$,

$f(x) = x\left(\frac{\ln(x)}{x} - 2 + \frac{1}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} - 2 + \frac{1}{x}\right) = -2$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Donc d'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) Pour tout nombre réel $x > 0$,

$g(x) = x^2\left(1 - \frac{5}{x^2} - 2\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{5}{x^2}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{5}{x^2} - 2\frac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Donc d'après la limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

23 **a)** • La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$.

• On étudie le signe de $x^2 + x + 1$.

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ et $-3 < 0$ ce qui implique que pour tout réel x, $x^2 + x + 1 > 0$.

Donc la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.

b) On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + x + 1$ alors $g = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

c) $g'(x)$ est du signe de $2x+1$ donc $g'(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ et $g'(x) > 0$ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

g est décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$ et g est croissante sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

25 **a)** Augmenter une quantité de 0,7 % revient à la multiplier par $1 + \frac{0{,}7}{100}$ c'est-à-dire par 1,007.

Donc pour tout entier n, $S_{n+1} = 1{,}007\, S_n$.

La suite (S_n) est géométrique de 1er terme $S_0 = 17\,000$ et de raison 1,007 donc $S_n = 17\,000 \times 1{,}007^n$.

b) • Voici un programme en langage Python.

```
def Seuil(k):
    n=0
    S=17000
    while (S<k):
        n=n+1
        S=1.007*S
    return n
print(Seuil(19000))
```

Le programme renvoie 16.

• $S_n \geqslant 19\,000$ équivaut à $17\,000 \times 1{,}007^n \geqslant 19\,000$ c'est-à-dire $1{,}007^n \geqslant \frac{19}{17}$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi $1{,}007^n \geqslant \frac{19}{17}$ équivaut à $\ln(1{,}007^n) \geqslant \ln\left(\frac{19}{17}\right)$ c'est-à-dire $n\ln(1{,}007) \geqslant \ln\left(\frac{19}{17}\right)$.

Or, $1 < 1{,}007$ et $\ln(1{,}007) > 0$. Ainsi, $S_n \geqslant 19\,000$ équivaut à $n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{19}{17}\right)}{\ln(1{,}007)}$.

Or $\frac{\ln\left(\frac{19}{17}\right)}{\ln(1{,}007)} \approx 15{,}944\,92$.

Ainsi $S_n \geqslant 19\,000$ si et seulement si $n \geqslant 16$.

Acquérir des automatismes

26 La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\ln(2) > \ln(1)$ c'est-à-dire $\ln(2) > 0$.

27 **a)** 0 **b)** 1 **c)** $\ln(e^3) = 3\ln(e) = 3$

d) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\ln(e^2) = -2\ln(e) = -2$

28 Cette affirmation est fausse.
Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Le symétrique du point A par rapport à cette droite est le point $A'(e^{10}\ ;\ 10)$ qui appartient à la courbe représentative de la fonction ln.
De plus la fonction ln est définie sur $]0\ ; +\infty[$ donc $\ln(-e^{10})$ n'existe pas.

29 **a)** 5 **b)** $e^{2\ln(7)} = (e^{\ln(7)})^2 = 7^2 = 49$
c) $e^{-\ln(2)} = \dfrac{1}{e^{\ln(2)}} = \dfrac{1}{2}$
d) $\ln(e^{-3}) = -3\ln(\mathbf{e}) = -3$.

30 **a)** $S = \{\ln(7)\}$ **b)** $S = \varnothing$
c) $S = \{e^5\}$ **d)** $S = \{e^{0,5}\}$

31 $S =]e^4\ ; +\infty[$

32 **a)** $e^{\ln(3)} + e^{-\ln(5)} = 3 + \dfrac{1}{e^{\ln(5)}} = 3 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{16}{5}$
b) $\dfrac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}} \dfrac{8}{(e^{\ln(2)})^3} = \dfrac{8}{2^3} = \dfrac{8}{8} = 1$
c) $\dfrac{e^{1+\ln(2)}}{e^{1+\ln(3)}} = \dfrac{e \times e^{\ln(2)}}{e \times e^{\ln(3)}} = \dfrac{2}{3}$

33 Pour tout réel $x > 1$:
$e^{\ln(x-1)+\ln(x)} = e^{\ln(x-1)} \times e^{\ln(x)} = (x-1)x = x^2 - x$.
Donc Joanie a raison.

34 **a)** $x - 3 > 0$ c'est-à-dire $x > 3$ donc $E =]3\ ; +\infty[$.
b) $2 - x > 0$ c'est-à-dire $x < 2$ donc $E =]-\infty\ ; 2[$.
c) $x > 0$ et $x \neq 1$ (car $\ln(x) \neq 0$) donc $E =]0\ ; 1[\cup]1\ ; +\infty[$.

35 **a)** $x^2 > 0$ donc $E =]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ; +\infty[$.
b) $x^2 + 1 > 0$ donc $E = \mathbb{R}$.
c) $x^2 - 1 > 0$ donc $E =]-\infty\ ; -1[\cup]1\ ; +\infty[$.

36 **a)** $\dfrac{x}{x-1} > 0$ donc $E =]-\infty\ ; 0[\cup]1\ ; +\infty[$.
b) On résout $x^2 - 3x + 2 > 0$.
$\Delta = 1$ donc le polygone $x^2 - 3x + 2$ a deux racines :
$x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$.
On en déduit que $x^2 - 3x + 2 > 0$ sur $]-\infty\ ; 1[\cup]2\ ; +\infty[$.
Donc $E =]-\infty\ ; 1[\cup]2\ ; +\infty[$.

37 **a)** $e^{5x} = \dfrac{3}{2}$ équivaut à $5x = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ c'est-à-dire $x = \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}{5}$.

Donc $S = \left\{\dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}{5}\right\}$.

b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x > 0$ soit $E =]0\ ; +\infty[$.

$\ln(2x) = 3$ équivaut à $2x = e^3$ c'est-à-dire $x = \dfrac{e^3}{2}$.
$\dfrac{e^3}{2} \in E$ donc $S = \left\{\dfrac{e^3}{2}\right\}$.
c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $\dfrac{1}{2} - x > 0$ soit $x < \dfrac{1}{2}$.
Donc $E = \left]-\infty\ ; \dfrac{1}{2}\right[$.
$\ln\left(\dfrac{1}{2} - x\right) = -4$ équivaut à $\dfrac{1}{2} - x = e^{-4}$ c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{2} - e^{-4}$.
$\dfrac{1}{2} - e^{-4} \in E$ donc $S = \left\{\dfrac{1}{2} - e^{-4}\right\}$.

38 **a)** $e^{1-4x} \leqslant 9$ équivaut à $1 - 4x \leqslant \ln(9)$ c'est-à-dire $x \geqslant \dfrac{1-\ln(9)}{4}$.
Donc $\mathcal{S} = \left[\dfrac{1-\ln(9)}{4} ; +\infty\right[$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x > 0$ soit $E =]0\ ; +\infty[$.
Pour tout x de E, $\ln(x) < -0,2$ équivaut à $x < e^{-0,2}$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E inférieurs à $e^{-0,2}$ donc $\mathcal{S} =]0\ ; e^{-0,2}[$.
c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $4x > 0$ soit $E =]0\ ; +\infty[$.
Pour tout x de E, $\ln(4x) > 5$ équivaut à $4x > e^5$ c'est-à-dire $x > \dfrac{e^5}{4}$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E supérieurs à $\dfrac{e^5}{4}$ donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{e^5}{4} ; +\infty\right[$.
d) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x > 0$ soit $E =]0\ ; +\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(x) < 1$ équivaut à $x < e$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E inférieurs à e donc $\mathcal{S} =]0\ ; e[$.

39 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x + 3 > 0$ c'est-à-dire $x > -3$.
Donc $E =]-3\ ; +\infty[$.
Pour tout x de E, $\ln(x + 3) = 1$ équivaut à $x + 3 = e^1$ c'est-à-dire $x = e - 3$.
$e - 3 \in E$ donc $\mathcal{S} = \{e - 3\}$.

b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x+1>0$ c'est-à-dire $x>-1$. Donc $E=]-1\,;+\infty[$.

Pour tout x de E, $\ln(x+1)=-3$ équivaut à $x+1=e^{-3}$ c'est-à-dire $x=e^{-3}-1$.

$e^{-3}-1\in E$ donc $\mathcal{S}=\{e^{-3}-1\}$.

c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $1-x>0$ c'est-à-dire $x<1$. Donc $E=]-\infty\,;1[$.

Pour tout x de E, $\ln(1-x)=2$ équivaut à $1-x=e^2$ c'est-à-dire $x=1-e^2$.

$1-e^2\in E$ donc $\mathcal{S}=\{1-e^2\}$.

d) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2+5x>0$ c'est-à-dire $x>-\dfrac{2}{5}$. Donc $E=\left]-\dfrac{2}{5}\,;+\infty\right[$.

Pour tout x de E, $\ln(2+5x)=0$ équivaut à $2+5x=1$ c'est-à-dire $x=-\dfrac{1}{5}$.

$-\dfrac{1}{5}\in E$ donc $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{5}\right\}$.

40 a) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2-5x>0$ c'est-à-dire $x<\dfrac{2}{5}$. Donc $E=\left]-\infty\,;\dfrac{2}{5}\right[$.

Pour tout x de E, $\ln(2-5x)=0$ équivaut à $2-5x=1$ c'est-à-dire $x=\dfrac{1}{5}$.

$\dfrac{1}{5}\in E$ donc $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$.

b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $\sqrt{x}>0$ c'est-à-dire $x>0$. Donc $E=]0\,;+\infty[$.

Pour tout x de E, $\ln(\sqrt{x})=-1$ équivaut à $\sqrt{x}=e^{-1}$ c'est-à-dire $x=e^{-2}$.

$e^{-2}\in E$ donc $\mathcal{S}=\{e^{-2}\}$.

c) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x^2>0$ c'est-à-dire $E=]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

Pour tout x de E, $\ln(x^2)=9$ équivaut à $x^2=e^9$.

Donc $x=\sqrt{e^9}$ ou $x=-\sqrt{e^9}$.

Ces deux nombres appartiennent à E donc :

$\mathcal{S}=\{-\sqrt{e^9}\,;\sqrt{e^9}\}$.

d) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $\dfrac{1}{x^2-9}>0$ c'est-à-dire :

$E=]-\infty\,;-3[\cup]3\,;+\infty[$.

Pour tout x de E, $\ln\left(\dfrac{1}{x^2-9}\right)=-2$ équivaut à $\dfrac{1}{x^2-9}=e^{-2}$ c'est-à-dire $x^2=e^2+9$.

Donc $x=-\sqrt{e^2+9}$ ou $x=\sqrt{e^2+9}$.

Ces deux nombres appartiennent à E donc :

$\mathcal{S}=\{-\sqrt{e^2+9}\,;\sqrt{e^2+9}\}$.

41 a) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $-2x-5>0$, donc :

$E=\left]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}\right[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(-2-5x)\geqslant 4$ équivaut à $-2-5x\geqslant e^4$ c'est-à-dire $x\leqslant\dfrac{-2-e^4}{5}$.

Tous ces nombres appartiennent à E, donc l'ensemble des solutions est $S=\left]-\infty\,;\dfrac{-2-e^4}{5}\right]$.

b) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x-1>0$, donc $E=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(2x-1)>-1$ équivaut à $2x-1>e^{-1}$ c'est-à-dire $x>\dfrac{e^{-1}+1}{2}$.

Tous ces nombres appartiennent à E, donc l'ensemble des solutions est $S=\left]\dfrac{e^{-1}+1}{2}\,;+\infty\right[$.

c) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3e^x-4>0$, donc $E=\left]\ln\left(\dfrac{4}{3}\right);+\infty\right[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(3e^x-4)<0$ équivaut à $3e^x-4<1$ c'est-à-dire $e^x<\dfrac{5}{3}$ soit $x<\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels de E inférieurs à $\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$ donc l'ensemble des solutions est $S=\left]\ln\left(\dfrac{4}{3}\right);\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)\right[$.

d) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $1-e^{-x}>0$ c'est-à-dire $1>e^{-x}$ soit $0>-x$ soit encore $x>0$.

Donc $E=]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(1-e^{-x})\leqslant 2$ équivaut à $1-e^{-x}\leqslant e^2$ c'est-à-dire $e^{-x}\geqslant 1-e^2$.

Or, $1-e^2<0$ et pour tout nombre réel x, $e^{-x}>0$.

Donc l'ensemble des solutions est $S=]0\,;+\infty[$.

42 a) $\theta(t)=12{,}5$ équivaut à $25-10e^{0,1t}=12{,}5$ c'est-à-dire $e^{0,1t}=1{,}25$ soit $0{,}1t=\ln(1{,}25)$.

Donc $t=\dfrac{\ln(1{,}25)}{0{,}1}$ et $t\approx 2{,}2$.

La température atteindra 12,5 °C au bout d'environ 2,2 minutes.

b) $\theta(t)=0$ équivaut à $25-10e^{0,1t}=0$ c'est-à-dire $e^{0,1t}=2{,}5$ soit $0{,}1t=\ln(2{,}5)$.

Donc $t = \dfrac{\ln(2{,}5)}{0{,}1}$ et $t \approx 9{,}2$.
La température atteindra 0°C au bout d'environ 9,2 minutes.

43 **a)** $V(0) = 5\,000e^{-8{,}3 \times 0} = 5\,000$.
La tension initiale est 5 000 volts.
b) On résout l'équation $5\,000e^{-8{,}3t} = 2\,500$ ce qui équivaut à $e^{-8{,}3t} = \dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire $-8{,}3t = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Donc $t = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}{-8{,}3}$ et $t \approx 0{,}08$.
La tension initiale sera divisée par 2 au bout d'environ 0,08 ms.

44 **a)** Pour $x = -4 : 2x - 1 = -9$.
Or la fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$ donc $\ln(2x-1)$ n'est pas définie pour $x = -4$.
Ainsi -4 ne peut pas être solution de l'équation $\ln(2x-1) = \ln(x-5)$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x - 1 > 0$ et $x - 5 > 0$ donc $E =]5\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(2x-1) = \ln(x-5)$ équivaut à $2x - 1 = x - 5$ c'est-à-dire $x = -4$.
-4 n'appartient pas à E donc $S = \varnothing$.

45 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3x - 1 > 0$ et $2x > 0$ c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{3}$ et $x > 0$ donc $E = \left]\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(3x-1) = \ln(2x)$ équivaut à $3x - 1 = 2x$ c'est-à-dire $x = 1$.
1 appartient à E donc $S = \{1\}$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2 - 5x > 0$ et $3x + 4 > 0$ c'est-à-dire $x < \dfrac{2}{5}$ et $x > -\dfrac{4}{3}$ donc $E = \left]-\dfrac{4}{3}\,;\dfrac{2}{5}\right[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(2-5x) = \ln(3x+4)$ équivaut à $2 - 5x = 3x + 4$ c'est-à-dire $x = -\dfrac{1}{4}$.
$-\dfrac{1}{4}$ appartient à E donc $S = \left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

46 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x^2 > 0$ et $3x > 0$ c'est-à-dire $x \neq 0$ et $x > 0$ donc $E =]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(x^2) = \ln(3x)$ équivaut à $x^2 = 3x$ c'est-à-dire $x = 0$ ou $x = 3$.
Seul 3 appartient à E donc $S = \{3\}$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $1 - 4x > 0$ et $x^2 - 4 > 0$ c'est-à-dire $x < \dfrac{1}{4}$ et $x < -2$ ou $x > 2$ donc $E =]-\infty\,;-2[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(1-4x) = \ln(x^2-4)$ équivaut à $1 - 4x = x^2 - 4$ c'est-à-dire $x^2 + 4x - 5 = 0$ soit $x = -5$ ou $x = 1$.
Seul -5 appartient à E donc $S = \{-5\}$.

47 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x > 0$ et $x^2 - x > 0$ c'est-à-dire $x > 0$ et $x < 0$ ou $x > 1$ donc $E =]1\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(x) = \ln(x^2 - x)$ équivaut à $x = x^2 - x$ c'est-à-dire $x^2 - 2x = 0$ soit $x = 0$ ou $x = 2$.
Seul 2 appartient à E donc $S = \{2\}$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $-2x > 0$ et $1 + x^2 > 0$ donc $E =]-\infty\,;0[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(-2x) = \ln(1+x^2)$ équivaut à $-2x = 1 + x^2$ c'est-à-dire $x^2 + 2x + 1 = 0$ soit $x = -1$.
-1 appartient à E donc $S = \{-1\}$.

48 **a)** On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3 + 2x > 0$ et $1 - x > 0$ c'est-à-dire $x > -\dfrac{3}{2}$ et $x < 1$ donc $E = \left]-\dfrac{3}{2}\,;1\right[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(3+2x) > \ln(1-x)$ équivaut à $3 + 2x > 1 - x$ c'est-à-dire $x > -\dfrac{2}{3}$.
$-\dfrac{3}{2} < -\dfrac{2}{3} < 1$ donc $S = \left]-\dfrac{2}{3}\,;1\right[$.
b) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x + 2 > 0$ et $x^2 - 4 > 0$ c'est-à-dire $x > -2$ et $x < -2$ ou $x > 2$ donc $E =]2\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(x+2) \leqslant \ln(x^2-4)$ équivaut à $x + 2 \leqslant x^2 - 4$ c'est-à-dire $x^2 - x - 6 \geqslant 0$ soit $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 3$.
Donc $S = [3\,;+\infty[$.

49 **a)** On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x + 3 > 0$ c'est-à-dire $x > -3$ donc $E =]-3\,;+\infty[$.
On peut dresser ce tableau de signes.

x	-3		-2		2		$+\infty$
$2-x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln(x+3)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$(2-x)\ln(x+3)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S =]-2\,;2[$.
b) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x > 0$ c'est-à-dire $E =]0\,;+\infty[$.

On peut dresser ce tableau de signes.

x	0		$\frac{1}{e}$		e^2		$+\infty$
$1+\ln(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln(x)$	$\|\|$	$+$		$+$	0	$-$	
$(1+\ln(x))(2-\ln(x))$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $S = \left]0\,;\frac{1}{e}\right] \cup \left[e^2\,;+\infty\right[$.

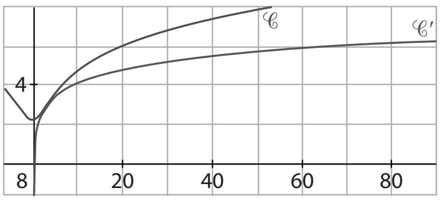
50 • En multipliant la première équation par 3 le système s'écrit alors $\begin{cases}-3\ln(x)+6\ln(y)=3\\ 3\ln(x)-5\ln(y)=-1\end{cases}$.

Par addition membres à membres on obtient $\ln(y)=2$ c'est-à-dire $y=e^2$.

• En remplaçant $\ln(y)$ par 2 dans la première équation, on obtient $-\ln(x)+4=1$ c'est-à-dire $\ln(x)=3$ soit $x=e^3$.

• Le couple $(e^3\,;e^2)$ est l'unique solution du système.

51 **a)** La courbe $\mathscr{C}$ semble être au-dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;+\infty[$.



b) On résout sur $]0\,;+\infty[$ l'inéquation :
$\ln(x^2+9) \geqslant \ln(6x)$.
$\ln(x^2+9) \geqslant \ln(6x)$ équivaut à $x^2+9 \geqslant 6x$ c'est-à-dire $x^2-6x+9 \geqslant 0$ soit $(x-3)^2 \geqslant 0$.
Donc $S =]0\,;+\infty[$.
Pour tout nombre réel $x>0$, $\ln(x^2+9) \geqslant \ln(6x)$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;+\infty[$.

52 **a)** Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses vérifient l'équation $f(x)=0$ c'est-à-dire $(\ln(x)-1)(3-\ln(x))=0$ soit $x=e$ ou $x=e^3$.
Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont e et e^3.

b) On peut dresser ce tableau de signes.

x	0		e		e^3		$+\infty$
$\ln(x)-1$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$3-\ln(x)$	$\|\|$	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

f est négative sur $]0\,;e] \cup]e^3\,;+\infty[$.
f est positive sur $]e\,;e^3[$.

53 $\ln(10)-\ln(8)-\ln(2)=\ln(10)-\ln(8\times 2)$
$\ln(10)-\ln(8)-\ln(2)=\ln(10)-\ln(16)$
$\ln(10)-\ln(8)-\ln(2)=\ln\left(\frac{10}{16}\right)=\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
$\ln\left(\frac{5}{8}\right)\neq 0$ donc Numa se trompe.

54 **a)** $\ln\left(\frac{1}{9}\right)=-\ln(9)$
b) $\ln(81)=\ln(9^2)=2\ln(9)$
c) $\ln(3)=\ln(\sqrt{9})=\frac{1}{2}\ln(9)$
d) $\ln(45)-\ln(5)=\ln(9)+\ln(5)-\ln(5)=\ln(9)$

55 **a)** $\ln(7)+\ln(8)=\ln(\mathbf{56})$
b) $\ln(24)-\ln(4)=\ln(\mathbf{6})$
c) $\ln(25)=\mathbf{2}\ln(5)$ **d)** $\ln(7)=\mathbf{\frac{1}{2}}\ln(49)$

56 **a)** $\ln(5^8)+\ln(5^3)=8\ln(5)+3\ln(5)=11\ln(5)$
b) $\ln(6^{11})-\ln(6^7)=11\ln(6)-7\ln(6)=4\ln(6)$

57 **a)** $\ln(8)=\ln(2^3)=3\ln(2)$
b) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$
c) $\ln(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln(2)$
d) $\ln(40)-\ln(10)=\ln(4\times 10)-\ln(10)$
$\ln(40)-\ln(10)=\ln(4)+\ln(10)-\ln(10)$
$\ln(40)-\ln(10)=\ln(2^2)$
$\ln(40)-\ln(10)=2\ln(2)$

58 **a)** $\ln\left(\frac{1}{25}\right)=-\ln(25)=-\ln(5^2)=-2\ln(5)$
b) $\ln(35)-\ln(7)=\ln(5\times 7)-\ln(7)$
$\ln(35)-\ln(7)=\ln(5)+\ln(7)-\ln(7)$
$\ln(35)-\ln(7)=\ln(5)$
c) $\ln(125)+\ln(\sqrt{5})=\ln(5^3)+\frac{1}{2}\ln(5)$
$\ln(125)+\ln(\sqrt{5})=3\ln(5)+\frac{1}{2}\ln(5)$
$\ln(125)+\ln(\sqrt{5})=\frac{7}{2}\ln(5)$

59 **a)** $\ln(567)-\ln(72)-\ln\left(\frac{7}{8}\right)+\ln(27)$
$=\ln(81\times 7)-\ln(9\times 8)-(\ln(7)-\ln(8))+\ln(27)$
$=\ln(3^4)+\ln(7)-\ln(9)-\ln(8)-\ln(7)+\ln(8)+\ln(3^3)$
$=4\ln(3)+3\ln(3)-2\ln(3)$
$=5\ln(3)$
b) $\ln(\sqrt{135})+\ln(\sqrt{75})-\ln(\sqrt{15})-\ln(\sqrt{27})$
$=\frac{1}{2}\ln(135)+\frac{1}{2}\ln(75)-\frac{1}{2}\ln(15)-\frac{1}{2}\ln(27)$
$=\frac{1}{2}(\ln(5\times 27)+\ln(5\times 15)-\ln(15)-\ln(27))$
$=\frac{1}{2}(\ln(5)+\ln(27)+\ln(5)+\ln(15)-\ln(15)-\ln(27))$
$=\ln(5)$

60 $\ln(x+1)$ et $\ln(x-1)$ ne sont pas définis sur $]-\infty\,;1[$.
Alisson aurait dû dans un premier temps déterminer l'ensemble E des nombres réels x tels que tel que $x+1>0$ et $x-1>0$ soit $E=]1\,;+\infty[$.
Ainsi Alisson aurait dû écrire :
Pour tout $x>1$, $\ln(x^2-1)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$.

61 Il s'agit ici de déterminer l'ensemble E des nombres réels x tels qui vérifient $x-1>0$ et $x+2>0$ c'est-à-dire $x>1$ et $x>-2$.
Donc $E=]1\,;+\infty[$.

62 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $9x>0$ et $x>0$ c'est-à-dire $x>0$ donc $E=]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(9x)+\ln(x)=25$ équivaut à $\ln(9x^2)=25$ soit $9x^2=e^{25}$ c'est-à-dire $x=-\dfrac{\sqrt{e^{25}}}{3}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{e^{25}}}{3}$.
Seul $\dfrac{\sqrt{e^{25}}}{3}$ appartient à E, donc $S=\left\{\dfrac{\sqrt{e^{25}}}{3}\right\}$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x+4>0$, $2x-1>0$ et $x+10>0$ c'est-à-dire $x>-4$, $x>\dfrac{1}{2}$ et $x>-10$ donc $E=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(x+4)+\ln(2x-1)=\ln(x+10)$ équivaut à $\ln((x+4)(2x-1))=\ln(x+10)$ soit $\ln(2x^2+7x-4)=\ln(x+10)$.
D'où, $2x^2+7x-4=x+10$ c'est-à-dire $x^2+3x-7=0$.
$\Delta=3^2-4\times(-7)=37$ donc la fonction polynôme $x^2+3x-7=0$ a deux racines :
$x_1=\dfrac{-7-\sqrt{37}}{2}$ ou $x_2=\dfrac{-7+\sqrt{37}}{2}$.
Ces deux nombres n'appartiennent pas à E.
Donc $S=\{\varnothing\}$.

63 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x>0$, $x+4>0$ et $2x>0$ c'est-à-dire $x>0$ donc $E=]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $2\ln(x)=\ln(x+4)+\ln(2x)$ s'écrit aussi $\ln(x^2)=\ln((x+4)\times 2x)$ soit $\ln(x^2)=\ln(2x^2+8x)$.
Ce qui équivaut à $x^2=2x^2+8x$ c'est à dire $x^2+8x=0$.
D'où $x=-8$ ou $x=0$.
Ces deux nombres n'appartiennent pas à E.
Donc $S=\{\varnothing\}$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x^2>0$ et $2x^2+8x>0$ c'est-à-dire $x\neq 0$ et $x\in]-\infty\,;-4[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ donc $E=]-\infty\,;-4[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(x^2)=\ln(2x^2+8x)$ équivaut à $x^2=2x^2+8x$ c'est à dire $x^2+8x=0$.
D'où $x=-8$ ou $x=0$.
Seul -8 appartient à E.
Donc $S=\{-8\}$.

64 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x-2>0$ et $x-3>0$ c'est-à-dire $x>2$ et $x>3$ donc $E=]3\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(x-2)-\ln(x-3)=1$ s'écrit aussi $\ln(x-2)=\ln(\mathbf{e})+\ln(x-3)$ soit $\ln(x-2)=\ln(e(x-3))$.
Ce qui équivaut à $x-2=e(x-3)$ soit $x=\dfrac{3e-2}{e-1}$.
$\dfrac{3e-2}{e-1}\approx 3{,}58$ donc $\dfrac{3e-2}{e-1}$ appartient à E.
Donc $S=\left\{\dfrac{3e-2}{e-1}\right\}$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x-3>0$, $x+1>0$ et $x-3>0$ c'est-à-dire $x>\dfrac{3}{2}$, $x>-1$ et $x>3$ donc $E=]3\,;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(2x-3)-2\ln(x+1)=\ln(x-3)$ s'écrit aussi $\ln(2x-3)=\ln((x+1)^2)+\ln(x-3)$ soit $\ln(2x-3)=\ln((x+1)^2(x-3))$.
Ce qui équivaut à $2x-3=(x+1)^2(x-3)$ soit $2x-3=(x^2+2x+1)(x-3)$ c'est-à-dire $x^3-x^2-7x=0$.
$x^3-x^2-7x=0$ équivaut à $x(x^2-x-7)=0$ soit $x=0$, $x=\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ ou $x=\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$.
Seul $\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ appartient à E.
Donc $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

65 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x>0$, $x+1>0$ et $x-1>0$ c'est-à-dire $x>0$, $x>-1$ et $x>1$ donc $E=]1;+\infty[$.
Pour tout réel x de E, $\ln(x)-\ln(x+1)=\ln(x-1)$ équivaut à $\ln(x)=\ln(x-1)+\ln(x+1)$ soit $\ln(x)=\ln((x-1)(x+1))$ soit encore $\ln(x)=\ln(x^2-1)$.
$\ln(x)=\ln(x^2-1)$ équivaut à $x=x^2-1$ c'est-à-dire $x^2-x-1=0$.
$\Delta=1^2-4\times1\times(-1)=5$.
$\Delta>0$ donc la fonction polynôme x^2-x-1 a deux racines : $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Seul $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ appartient à E, donc $S=\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $5-x>0$ et $x-1>0$ c'est-à-dire $x<5$ et $x>1$ donc $E=]1\,;5[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(5-x)-\ln(3)+\ln(x-1)=0$ s'écrit aussi $\ln\left(\frac{(5-x)(x-1)}{3}\right)=0$ ce qui équivaut à $\frac{(5-x)(x-1)}{3}=1$ soit $x^2-6x+8=0$.

$\Delta=(-6)^2-4\times1\times8=4$ et $\sqrt{4}=2$.

$\Delta>0$ donc la fonction polynôme x^2-6x+8 a deux racines : $x_1=\frac{6-2}{2}=2$ ou $x_2=\frac{6+2}{2}=4$.

2 et 4 appartiennent à E.

Donc $S=\{2\,;4\}$.

66 **a)** On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3x-1>0$, $x>0$ et $1-x>0$ c'est-à-dire $x>\frac{1}{3}$, $x>0$ et $x<1$ et donc $E=\left]\frac{1}{3};1\right[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(\sqrt{3x-1})+\ln(\sqrt{x})=\ln(1-x)$ s'écrit aussi $\frac{1}{2}\ln((3x-1)x)=\ln(1-x)$

ce qui équivaut à $\ln((3x-1)x)=2\ln(1-x)$

soit encore $\ln((3x-1)x)=\ln((1-x)^2)$.

$\ln((3x-1)x)=\ln((1-x)^2)$ équivaut à $(3x-1)x=(1-x)^2$ soit $2x^2+x-1=0$.

$\Delta=1^2-4\times2\times(-1)=9$ et $\sqrt{9}=3$.

$\Delta>0$ donc la fonction polynôme $2x^2+x-1$ a deux racines : $x_1=\frac{-1-3}{4}=-1$ et $x_2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$.

Seul $\frac{1}{2}$ appartient à E.

Donc $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x>0$ et $x-2>0$ c'est-à-dire $x>0$ et $x>2$ donc $E=]2\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de E, $2\ln(x)-\ln(x-2)=\ln(2)$ s'écrit aussi $2\ln(x)=\ln(x-2)+\ln(2)$ soit $\ln(x^2)=\ln((2(x-2))$ c'est dire $\ln(x^2)=\ln(2x-4)$.

$\ln(x^2)=\ln(2x-4)$ équivaut à $x^2=2x-4$ c'est à dire $x^2-2x+4=0$.

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12$.

$\Delta<0$ donc la fonction polynôme x^2-2x+4 n'a pas de racines.

Donc $S=\{\varnothing\}$.

67 **a)** On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x+3>0$ et $x+1>0$ c'est-à-dire $x>-3$ et $x>-1$ donc $E=]-1;+\infty[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(x+3)<2\ln(x+1)$ s'écrit aussi $\ln(x+3)<\ln((x+1)^2)$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, aussi $\ln(x+3)<\ln((x+1)^2)$ équivaut à $x+3<(x+1)^2$ soit $0<x^2+x-2$.

$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=9$ et $\sqrt{9}=3$.

$\Delta>0$ donc la fonction polynôme x^2+x-2 a deux racines : $x_1=\frac{-1-3}{2}=-2$ et $x_2=\frac{-1+3}{2}=1$.

Donc $x^2+x-2>0$

si et seulement si $x\in]-\infty\,;-2[\cup]1\,;+\infty[$.

x doit appartenir à E donc $S=]1\,;+\infty[$.

b) On résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x-2>0$, $x+4>0$ et $3x+2>0$ c'est-à-dire $x>2$, $x>-4$ et $x>-\frac{2}{3}$ donc $E=]2\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(x-2)+\ln(x+4)\geqslant\ln(3x+2)$ s'écrit aussi $\ln((x-2)(x+4))\geqslant\ln(3x+2)$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, aussi $\ln((x-2)(x+4))\geqslant\ln(3x+2)$ équivaut à $(x-2)(x+4)\geqslant 3x+2$ soit $x^2-x-10\geqslant0$.

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-10)=41$.

$\Delta>0$ donc la fonction polynôme x^2-x-10 a deux racines : $x_1=\frac{1-\sqrt{41}}{2}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{41}}{2}$.

Donc $x^2-x-10\geqslant0$ si et seulement si

$x\in\left]-\infty\,;\frac{1-\sqrt{41}}{2}\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{41}}{2}\,;+\infty\right[$.

x doit appartenir à E donc $S=\left]\frac{1+\sqrt{41}}{2}\,;+\infty\right[$.

68 **a)** La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi $2^n<10^6$ équivaut à $\ln(2^n)<\ln(10^6)$ c'est à dire $n\ln(2)<\ln(10^6)$.

Or $\ln(2)>0$, ainsi $2^n<10^6$ équivaut à $n<\frac{\ln(10^6)}{\ln(2)}$.

$\frac{\ln(10^6)}{\ln(2)}\approx19{,}9$, ainsi $2^n<10^6$ si et seulement si $n<19$.

b) La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi $\left(\frac{1}{5}\right)^n<10^{-3}$ équivaut à $\ln\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)<\ln(10^{-3})$ c'est-à-dire $n\ln\left(\frac{1}{5}\right)<\ln(10^{-3})$.

Or $\ln\left(\frac{1}{5}\right)<0$, ainsi $\left(\frac{1}{5}\right)^n<10^{-3}$ équivaut à $n>\frac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$.

$\frac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}\approx4{,}29$, ainsi $\left(\frac{1}{5}\right)^n<10^{-3}$ si et seulement si $n\geqslant5$.

69 **a)** La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, aussi $\left(1+\frac{2}{100}\right)^n \geqslant 10$ équivaut à $\ln(1{,}02^n) \geqslant \ln(10)$ c'est-à-dire $n\ln(1{,}02) \geqslant \ln(10)$.

Or $\ln(1{,}02) > 0$, ainsi $\left(1+\frac{2}{100}\right)^n \geqslant 10$ équivaut à $n \geqslant \frac{\ln(10)}{\ln(1{,}02)}$.

$\frac{\ln(10)}{\ln(1{,}02)} \approx 116{,}3$, ainsi $\left(1+\frac{2}{100}\right)^n \geqslant 10$ si et seulement si $n \geqslant 117$.

b) La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, aussi $\left(1-\frac{3}{100}\right)^n < 10^{-4}$ équivaut à $\ln(0{,}97^n) < \ln(10^{-4})$ c'est-à-dire $n\ln(0{,}97) < \ln(10^{-4})$.

Or $\ln(0{,}97) < 0$, ainsi $\left(1-\frac{3}{100}\right)^n < 10^{-4}$ équivaut à $n > \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0{,}97)}$.

Or $\frac{\ln(10^{-4})}{\ln(0{,}97)} \approx 302{,}4$, ainsi $\left(1-\frac{3}{100}\right)^n < 10^{-4}$ si et seulement si $n \geqslant 303$.

70 Pour tout entier naturel n, $u_n = 4 \times 1{,}5^n$.

$u_n > 10^4$ équivaut à $4 \times 1{,}5^n > 10^4$, c'est à dire $1{,}5^n > 2\,500$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, aussi $1{,}5^n > 2\,500$ équivaut à $\ln(1{,}5^n) > \ln(2\,500)$ c'est-à-dire $n\ln(1{,}5) > \ln(2\,500)$.

Or $\ln(1{,}5) > 0$, ainsi $u_n > 10^4$ équivaut à $n > \frac{\ln(2500)}{\ln(1{,}5)}$.

$\frac{\ln(2500)}{\ln(1{,}5)} \approx 19{,}3$, ainsi $u_n > 10^4$ si et seulement si $n \geqslant 20$.

71 On note n le nombre d'heures écoulées.

Il s'agit ici de déterminer le plus entier n tel que $1{,}6^n \geqslant 16$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, aussi $1{,}6^n \geqslant 16$ équivaut à $\ln(1{,}6^n) \geqslant \ln(16)$ c'est-à-dire $n\ln(1{,}6) \geqslant \ln(16)$.

Or $\ln(1{,}6) > 0$, ainsi $1{,}6^n \geqslant 16$ équivaut à $n \geqslant \frac{\ln(16)}{\ln(1{,}6)}$.

$\frac{\ln(16)}{\ln(1{,}6)} \approx 5{,}9$, ainsi $1{,}6^n \geqslant 16$ si et seulement si $n \geqslant 6$.

La population de bactéries aura été multipliée par 16 au bout de 6 h.

72 Il s'agit ici de déterminer le plus entier n tel que $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n > 0{,}99$ c'est-à-dire tel que $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}01$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}01$ équivaut à $\ln\left(\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) < \ln(0{,}01)$ c'est-à-dire $n\ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln(0{,}01)$.

Or $\ln\left(\frac{5}{6}\right) < 0$, ainsi $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}01$ équivaut à $n > \frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$.

$\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 25{,}3$, ainsi $\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0{,}01$ si et seulement si $n \geqslant 26$.

Le nombre minimum de lancers pour que la probabilité soit supérieure à 0,99 est 26.

73 **a)** $f'(x) = -\frac{1}{x}$ **b)** $f'(x) = \frac{3}{x}$

74 $g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$ donc $g'(x) = \frac{2\ln(x)}{x}$.

75 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

76 **a)** f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = \ln(x) + 1$.

b) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) - 2 \times \frac{1}{x}$.

Donc $f'(x) = \frac{2}{x} \times (\ln(x) - 1)$.

77 **a)** f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}$.

Donc $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.

b) f est dérivable sur $]0\,;\mathrm{e}[$ et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1-\ln(x)) - (1+\ln(x)) \times \left(-\frac{1}{x}\right)}{(1-\ln(x))^2}.$$

Donc $f'(x) = \frac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

78 f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$.

Pour tout réel $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ et alors $\frac{1}{x} + 1 > 0$ soit $f'(x) > 0$.

Donc f est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

79 g est dérivable sur $]1\ ;+\infty[$ et, pour tout réel $x>1$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1$.

Pour tout réel $x>1$, $\dfrac{1}{x}<1$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{x}-1<0$ soit $g'(x)<0$.

Donc g est décroissante sur $]1\ ;+\infty[$.

80 **a)** h est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $h'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)-\dfrac{1}{x}$.

Donc $h'(x)=\dfrac{2\ln(x)-1}{x}$.

b) $x>0$ donc $h'(x)$ est du signe de $2\ln(x)-1$.

c) Pour tout réel $x>0$, l'inéquation $2\ln(x)-1>0$ s'écrit $\ln(x)>\dfrac{1}{2}$ c'est-à-dire $x>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

Donc $h'(x)<0$ sur $\left]0\ ;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$ et $h'(x)>0$ sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;+\infty\right[$.

h est décroissante sur $\left]0\ ;\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$ et h est croissante sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ ;+\infty\right[$.

81 **a)** k est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $k'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{x}{x^2}$.

Donc $h'(x)=\dfrac{-x-1}{x^2}$.

b) $x^2>0$ donc $h'(x)$ est du signe de $-x-1$.

Pour tout réel $x>0$, $-x-1<0$, donc k est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$.

82 f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$.

Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A est $y=f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e})+f(\mathrm{e})$.

Or $f(\mathrm{e})=\mathrm{e}-1$ et $f'(\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$ donc une équation de T est $y=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+\mathrm{e}-1$ c'est-à-dire $y=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}x$.

83 **1.** $\lim\limits_{x\to0}\ln(x)=-\infty$, d'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to0}(\ln(x))^2=+\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to0}-\ln(x)=+\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$.

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x))^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\ln(x)=-\infty$ donc l'étude de la limite de f en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée « $\infty-\infty$ ».

b) On remarque que pour tout $x>0$, $f(x)=\ln(x)(\ln(x)-1)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x)-1)=+\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

84 **1. a)** Lorsque $x>1$, $\ln(x)>0$.

b) $\lim\limits_{x\to1}(3+\ln(x))=3$ et $\lim\limits_{x\to1}\ln(x)=0$.

D'après la limite d'un quotient, $\lim\limits_{x\to1}g(x)=+\infty$.

2. Pour tout $x>1$:

$$g(x)=\frac{3+\ln(x)}{\ln(x)}=\frac{3}{\ln(x)}+\frac{\ln(x)}{\ln(x)}=\frac{3}{\ln(x)}+1.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\ln(x)}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=1$.

85 **a)** $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ et $\lim\limits_{x\to0}2\ln(x)=-\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)=+\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$,

$f'(x)=2x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2+2}{x}$.

c) Pour tout réel $x>0$, $f'(x)>0$. D'où le tableau de variations de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) f est continue et strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

De plus $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;+\infty[$.

Avec la calculatrice on obtient $\alpha\approx0{,}75$.

86 **a)** g est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\mathrm{e}}{x^2}=\dfrac{x-\mathrm{e}}{x^2}$.

b) Pour tout réel $x>0$, $x^2>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x-\mathrm{e}$ d'où le tableau de variation de la fonction g.

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

c) D'après le tableau variations de g, pour tout nombre réel $x>0$, $g(x)\geqslant2$.

Donc g est strictement positive sur $]0\ ;+\infty[$.

87 **a)** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

88 **a)** Cette affirmation est fausse.

En effet, pour tout entier $n\geqslant1$, $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln(x)=0$ donc $\lim\limits_{x\to0}x^2\ln(x)=0$.

b) Cette affirmation est exacte.
En effet, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

89 Pour tout réel $x > 0$:
$f'(x) = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$ et $g'(x) = \dfrac{7}{7x} = \dfrac{1}{x}$.
Donc pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = g'(x)$.
Donc Mathis a raison.

90 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}$.

91 **a)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-3x) = +\infty$.

Pour $x < \dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} (1-3x) = 0$ (avec $1 - 3x > 0$).

b) On utilise le schéma de décomposition ci-dessous :

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{1-3x}_{\mathrm{X} \mapsto \ln(\mathrm{X})}}$$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(\mathrm{X}) = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \mathrm{X} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to 0} \ln(\mathrm{X}) = -\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

92 **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc d'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

b) Pour tout $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x}\ln((\sqrt{x})^2)$ c'est-à-dire $g(x) = 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})$.
On utilise le schéma de décomposition ci-dessous :

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{\sqrt{x}}_{\mathrm{X} \mapsto 2\mathrm{X}\ln(\mathrm{X})}}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{X} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to 0} 2\mathrm{X}\ln(\mathrm{X}) = 0$.
Donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

93 **a)** • $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.
D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

• Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x^2\left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x^2} - 1\right) = -1$.
D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b) • $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.
D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

• $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{\ln(x)}{x}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (avec $\dfrac{\ln(x)}{x} > 0$) donc d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

94 **a)** • $\lim\limits_{x \to 0} x^2 - 3x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} -\ln(x) = +\infty$.
D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

• Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

D'après la limite d'une somme
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$.
D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) On utilise le schéma de décomposition ci-dessous :

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{e^x - 1}_{\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}\ln(\mathrm{X})}}$$

• $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{X} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to 0} \mathrm{X}\ln(\mathrm{X}) = 0$.
Donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to +\infty} \ln(\mathrm{X}) = +\infty$.
D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{\mathrm{X} \to +\infty} \mathrm{X}\ln(\mathrm{X}) = +\infty$.
Donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

95 **a)** • Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

On utilise le schéma de décomposition ci-dessous :

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{\sqrt{x}}_{\mathrm{X} \mapsto \frac{2\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}}}}$$

• $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{X} = 0$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to 0} \dfrac{2\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = -\infty$.
Donc par composition $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{\mathrm{X} \to +\infty} \dfrac{2\ln(\mathrm{X})}{\mathrm{X}} = 0$.
Donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b) • $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} (x^2+1) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

• Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\dfrac{\ln(x)}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

96 On note u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x) = x + \dfrac{1}{x}$; alors $f = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout nombre réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{x+\dfrac{1}{x}} = \frac{\dfrac{x^2-1}{x^2}}{\dfrac{x^2+1}{x}} = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}.$$

97 On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$, alors $f = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x+\mathrm{e}^{-x}}$.

98 Pour tout nombre réel $x > 3$,
$f(x) = \ln(x+2) - \ln(x-3)$.

f est dérivable sur $]3\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 3$:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-3} = -\frac{5}{(x+2)(x-3)}.$$

99 On note u la fonction définie sur $]-\infty\,;1[$ par $u(x) = \sqrt{1-x}$; alors $f = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $]-\infty\,;1[$ donc f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$.

Pour tout nombre réel $x < 1$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2(1-x)}.$$

100 On note u la fonction définie sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ par $u(x) = \ln(x)$; alors $f = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $]1\,;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

Pour tout nombre réel $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\dfrac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}.$$

101 On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{x}$; alors $f(x) = x\ln(u(x))$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = \ln(u(x)) + \frac{u'(x)}{u(x)} = \ln(1+\mathrm{e}^{x}) + \frac{x\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}.$$

102 **a)** On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \mathrm{e}^{x^2-5x} + 1$; alors $f = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{(2x-5)\mathrm{e}^{x^2-5x}}{\mathrm{e}^{x^2-5x}+1}.$$

b) Pour tout nombre réel x : $\mathrm{e}^{x^2-5x} > 0$ et $\mathrm{e}^{x^2-5x} + 1 > 0$ donc g' est du signe de $(2x-5)$.

On en déduit ce tableau de variation de la fonction g.

x	$-\infty$		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\ln\left(\mathrm{e}^{-\frac{25}{4}}+1\right)$	$\nearrow$	

103 **1.** On note u la fonction polynôme définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $u(x) = x^2 + 4x + 3$. Alors $f = \ln(u)$.

$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$ et $\sqrt{4} = 2$.

$\Delta > 0$ donc la fonction polynôme u a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$ et $x_2 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$.

Donc $u(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$ et alors $u(x) > 0$ sur I.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur I et $f = \ln(u)$ donc f est dérivable sur I.

b) Pour tout nombre x de I :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}.$$

c) Pour tout nombre x de I, $x^2 + 4x + 3 > 0$ donc f' est du signe de $2x + 4$.

$2x + 4 > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$ donc $f'(x) > 0$ sur I.

f est strictement croissante sur I.

104 **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$:

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}.$$

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout nombre réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{x(x+1)}{x(x+1)^2} - \frac{(x+1)^2}{x(x+1)^2} + \frac{x}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

b) Pour tout nombre réel $x > 0$: $x(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

c) • Pour déterminer la limite en 0 de la fonction f on utilise l'écriture : $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)-\dfrac{1}{x+1}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x+1)=0\,;\ \lim\limits_{x\to 0}-\ln(x)=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{x+1}=-1$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.

• Pour déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f on utilise l'écriture : $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$.

On utilise le schéma de décomposition ci-dessous :

$$\boxed{x\mapsto \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{X\mapsto \ln(X)}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}X=1$ et $\lim\limits_{X\to 1}\ln(X)=0$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=0$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x+1}=0$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

d) Voici le tableau de variations de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

105 **a)** On note u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2+1$ alors $f(x)=\ln(u(x))-x$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre x réel : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}-1=\dfrac{2x}{x^2+1}-1$.

Donc $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x-1}{x^2+1}$.

b) Pour tout nombre réel $x^2+1>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+2x-1$.

Or $-x^2+2x-1=-(x-1)^2$.

Donc $f'(x)\leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) • On utilise le schéma de décomposition ci-dessous :

$$\boxed{x\mapsto \underbrace{\frac{x^2+1}{x}}_{X\mapsto \ln(X)}}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}X=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+1)=+\infty$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

d) Voici le tableau de variations de la fonction f.

x	0		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	-1	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		$\searrow$		$-\infty$

e) On lit sur le tableau de variations : $f(x)>0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $f(x)<0$ sur $]0\,;+\infty[$.

Pour se tester

106 **1.** C

En effet, l'inéquation $e^{2x}<3$ équivaut à $2x<\ln(3)$ c'est-à-dire $x<\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

Donc $S=\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\ln(3)\right[$.

2. C

En effet, $\ln(1-2x)$ est défini dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $1-2x>0$ c'est-à-dire $x<\dfrac{1}{2}$. Donc $E=\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

3. B

En effet, on résout l'inéquation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $3-x>0$ c'est-à-dire $x<3$.

Donc $E=]-\infty\,;3[$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi $\ln(3-x)<1$ équivaut à $3-x<e$ c'est-à-dire $x>3-e$.

$3-e<0$.

x doit appartenir à E donc $S=]3-e\,;3[$.

4. B

En effet, $\ln(20)-\ln(4)+\ln(25)=\ln(5\times 4)-\ln(4)+\ln(5^2)$ $=\ln(5)+\ln(4)-\ln(4)+2\ln(5)=3\ln(5)$

5. A

En effet, $\ln\left(\dfrac{2^5}{7^3}\right)=\ln(2^5)-\ln(7^3)=5\ln(2)-3\ln(7)$.

6. B

En effet, pour tout nombre réel $x>0$,

$f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1=\ln(x)$.

7. C

En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$.

D'après la limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+1-\frac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty.$$

107 **1.** B et D

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, aussi $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-3}$ équivaut à $\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < \ln(10^{-3})$ c'est-à-dire $n\ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(10^{-3})$.

Or $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, ainsi $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-3}$ équivaut à $n > \dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$.

$\dfrac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 9{,}97$. Ainsi $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-3}$ si et seulement si $n \geqslant 10$.

2. A et C

• $g(0) = \ln(1) = 0$, $g(1) = \ln(3)$, $g(2) = \ln(5)$ et $g(4) = \ln(9) = \ln(3^2) = 2\ln(3)$.

• Pour tout nombre réel $x > -\frac{1}{2}$: $g'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$.

$g'(0) = 2$, $g'(1) = \frac{2}{3}$, $g'(2) = \frac{2}{5}$ et $g'(4) = \frac{2}{9}$.

3. B

• $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln(x)) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln(x) - 1) = -1$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ (avec $x^2 > 0$).

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

• Pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

108 **1. L'affirmation est fausse.**

On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels tels que $6x - 2 > 0$, $2x - 1 > 0$ et $x > 0$ c'est-à-dire $x > \frac{1}{3}$, $x > \frac{1}{2}$ et $x > 0$. Donc $\mathrm{E} = \left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Pour tout réel x de E, l'équation $\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x)$ s'écrit $\ln((6x - 2)(2x - 1)) = \ln(x)$ soit $\ln(12x^2 - 10x + 2) = \ln(x)$.

L'équation $\ln(12x^2 - 10x + 2) = \ln(x)$ équivaut à $12x^2 - 10x + 2 = x$ c'est-à-dire $12x^2 - 11x + 2 = 0$.

$\Delta = 11^2 - 4 \times 12 \times 2 = 25$ et $\sqrt{25} = 5$.

$\Delta > 0$ donc l'équation $12x^2 - 11x + 2 = 0$ a deux solutions $x_1 - \dfrac{11-5}{24} = \dfrac{1}{4}$ et $x_2 = \dfrac{11+5}{24} = \dfrac{2}{3}$.

Seul $\frac{2}{3}$ appartient à E.

Donc $\mathrm{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

2. L'affirmation est vraie.

On note u la fonction définie sur $]-\infty\,;-3[$ par $u(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$; alors $f = \ln(u)$.

La fonction u est dérivable et strictement positive sur $]-\infty\,;-3[$ donc f est dérivable sur $]-\infty\,;-3[$.

Pour tout réel x de $]-\infty\,;-3[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1\times(x+3)-(x-1)\times 1}{(x+3)^2}}{\dfrac{x-1}{x+3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(x-1)(x+3)}$$

$f'(x)$ est du signe de $(x-1)(x+3)$ sur $]-\infty\,;-3[$.

Or pour tout nombre réel de $]-\infty\,;-3[$, $(x-1)(x+3) > 0$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;-3[$,

La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;-3[$.

Remarque : pour déterminer $f'(x)$ on aurait pu aussi utiliser le fait que pour tout réel x de $]-\infty\,;-3[$, $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+3)$.

3. L'affirmation est vraie.

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = x - 1 - \ln(x)$.

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Pour tout réel $x > 0$, f' est du signe de $x - 1$ et on peut construire le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

On déduit de ce tableau de variations que pour tout réel $x > 0$: $f(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $x - 1 - \ln(x) \geqslant 0$.

Donc pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

S'entraîner

109 **1.** • f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}$

$f'(x) = \dfrac{2}{2x} - \dfrac{x}{2x}$

$f'(x) = \dfrac{2-x}{2x}$.

• Sur $]0\,;+\infty[$, $2x>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2-x$.
$2-x>0$ sur $]0\,;2[$ et $2-x<0$ sur $]2\,;+\infty[$ donc $f'(x)>0$ sur $]0\,;2[$ et $f'(x)<0$ sur $]2\,;+\infty[$.
f est croissante sur $]0\,;\,2[$ et f est décroissante sur$]2\,;+\infty[$.
De plus $f(2)=\ln(2)-1$.
• D'où le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\ln(2)-1$	$\searrow$	

• La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\ln(2)<\ln(\mathbf{e})$ c'est-à-dire $\ln(2)<1$.
Donc $\ln(2)-1<0$.
Or pour tout réel $x>0$, $f(x)<\ln(2)-1$ donc $f(x)<0$.
Pour tout réel $x>0$, $f(x)<0$ équivaut à $\ln(x)-\dfrac{1}{2}x<0$ c'est-à-dire $\ln(x)<\dfrac{1}{2}x$.
Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite d.
2. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)-\mathrm{e}x+1$.
f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout nombre réel $x>0$, $f''(x)=\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}=\dfrac{1-\mathrm{e}\times x}{x}$.
Pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $1-\mathrm{e}\times x$, donc $f'(x)>0$ sur $\left]0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$ et $f'(x)<0$ sur $\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;+\infty\right[$.
D'où le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$:

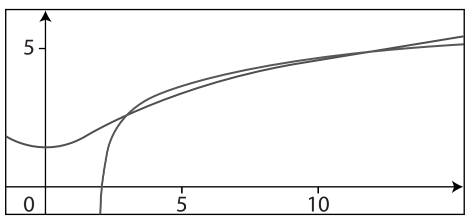
x	0		$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$		$-$	
$f(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	

$f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-1$ est le maximum de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ donc pour tout nombre réel $x>0$, $f(x)<0$ et ainsi $\ln(x)<\mathrm{e}\times x-2$.
Donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de la droite d sur $]0\,;+\infty[$.

110 **a)** $\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=0$ donc l'étude de la limite de la fonction f en 0 conduit à une forme indéterminée « ∞ sur ∞ ».
b) La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, donc en particulier en 1.
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=\ln'(1)$.
Or, pour tout $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ donc $\ln'(1)=1$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

111 **a)** La fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ vérifie $f(a)=\mathrm{A}$ et $f(b)=\mathrm{B}$.
b) Pour tout réel $x>0$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x)$.
La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x(x+1)}$.
Pour tout réel $x>0$, $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
$a<b$ donc $f(a)>f(b)$ c'est-à-dire $\mathrm{A}>\mathrm{B}$.

112 **Parcours 1**
On pose $\mathrm{X}=\ln(x)$ et on obtient l'équation $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-6=0$ (**E**).
$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)=25$, $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=5$ donc l'équation (**E**) a deux solutions :
$x_1=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{1+5}{2}=3$.
x est solution de l'équation $(\ln(x))^2-\ln(x)-6=0$ si, et seulement si, X est solution de (**E**) c'est-à-dire si, et seulement si, $\ln(x)=-2$ ou $\ln(x)=3$.
$\ln(x)=-2$ équivaut à $x=\mathrm{e}^{-2}$ et $\ln(x)=3$ équivaut à $x=\mathrm{e}^3$.
L'ensemble S des solutions de l'équation
$(\ln(x))^2-\ln(x)-6=0$ est $\mathrm{S}=\ \mathrm{S}=\{\mathrm{e}^{-2}\,;\mathrm{e}^3\}$.
Parcours 2
a) $\Delta=(-1)^2-4\times2\times(-1)=9$, $\Delta>0$ et $\sqrt{\Delta}=3$ donc l'équation $2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-1=0$ a deux solutions :
$x_1=\dfrac{1-3}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+3}{4}=1$.
b) En posant $\mathrm{X}=\ln(x)$, (**E**) s'écrit $2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-1=0$.
x est solution de (**E**) si, et seulement si, X est solution de $2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-1=0$ c'est-à-dire x est solution de (**E**) si, et seulement si, $\ln(x)=-\dfrac{1}{2}$ ou $\ln(x)=1$.
c) $\ln(x)=-\dfrac{1}{2}$ équivaut à $x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ et $\ln(x)=1$ équivaut à $x=\mathrm{e}$.
L'ensemble S des solutions de E est $\mathrm{S}=\left\{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\,;\mathrm{e}\right\}$.

113 Remarque : la fonction $x\mapsto\ln(13x-26)$ n'est pas définie sur $]-\infty\,;2]$ donc on ne peut pas étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur cet intervalle.
a)


La courbe $\mathscr{C}$ semble au-dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $]2\,;3[\,\cup\,]10\,;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}'$ semble au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$ sur $]3\,;10[$.

b) On résout l'inéquation $\ln(x^2+4) > \ln(13x-26)$ dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $x^2+4>0$ et $13x-26>0$ c'est-à-dire $x>2$ donc $E =]2\,;+\infty[$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi pour tout réel x de E, $\ln(x^2+4) > \ln(13x-26)$ équivaut à $x^2+4>13x-26$ soit $x^2-13x+30>0$.

$\Delta = 13^2 - 4\times 1\times 30 = 49$ et $\sqrt{49}=7$.

$\Delta>0$ donc la fonction polynôme $x^2-13x+30$ a deux racines : $x_1 = \dfrac{13-7}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{13+7}{2} = 10$.

Donc $x^2-13x+30>0$ si et seulement si $x\in]-\infty\,;3[\cup]10\,;+\infty[$.

$x\in E$ donc $\ln(x^2+4)>\ln(13x-26)$ si et seulement si $x\in]2\,;3[\cup]10\,;+\infty[$.

• Si $x\in]2\,;3[\cup]10\,;+\infty[$. la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}'$.

• Si $x\in]3\,;10[$, la courbe $\mathscr{C}'$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

114 **a)** On résout l'inéquation sur $]0\,;+\infty[$.

$(\ln(x))^2+\ln(x)>0$ équivaut à $\ln(x)(\ln(x)+1)>0$.

On peut construire ce tableau de signes.

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$\ln(x)$	||	$-$		$-$	0	$+$	
$(\ln(x)+1)$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x)\times(\ln(x)+1)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S =]0\,;e^{-1}[\cup]1\,;+\infty[$.

b) • On pose $X=\ln(x)$, l'inéquation $2(\ln(x))^2-5\ln(x)-3>0$ s'écrit alors $2X^2-5X-3>0$.

$\Delta = (-5)^2-4\times2\times(-3)=49$ et $\sqrt{49}=7$.

$\Delta>0$ donc la fonction polynôme $x^2-13x+30$ a deux racines : $x_1=\dfrac{5-7}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{5+7}{2}=6$.

Donc l'ensemble S′ des solutions de l'inéquation $2X^2-5X-3>0$ est $S' =]-\infty\,;-1[\cup]6\,;+\infty[$.

• $\ln(x)=-1$ équivaut à $x=e^{-1}$ et $\ln(x)=6$ équivaut à $x=e^6$.

La fonction ln est définie et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc l'ensemble S des solutions de E est $S=]0\,;e^{-1}[\cup]e^6\,;+\infty[$.

115 Les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$ c'est-à-dire $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right)$ soit $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;\dfrac{\ln(ab)}{2}\right)$.

Les coordonnées de N sont $\left(\dfrac{a+b}{2}\,;0\right)$.

Donc $MN=\dfrac{1}{2}\ln(ab)$ c'est-à-dire $MN=\ln(\sqrt{ab})$.

116 **1.** $u_0>0$.

Soit un entier naturel $n>0$, on suppose $u_n>0$ on a alors $e\times u_n>0$ et donc $\sqrt{e\times u_n}$ c'est-à-dire $u_{n+1}>0$.

Donc par récurrence sur n, pour tout entier naturel n, $u_n>0$.

2. a) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=\dfrac{\ln(u_{n+1})-1}{\ln(u_n)-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\ln(\sqrt{e\times u_n})-1}{\ln(u_n)-1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}\ln(e\times u_n)-1}{\ln(u_n)-1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}\ln(e)+\frac{1}{2}\ln(u_n)-1}{\ln(u_n)-1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}\ln(u_n)-\frac{1}{2}}{\ln(u_n)-1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{\frac{1}{2}(\ln(u_n)-1)}{\ln(u_n)-1}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{2}.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) • $v_0=\ln(e^2)-1=2\ln(\mathbf{e})-1=2-1=1$.

(v_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 1 donc pour tout entier naturel n, $v_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

• Pour tout entier naturel n, $v_n=\ln(u_n)-1$ équivaut à $\ln(u_n)=v_n+1$ soit $u_n=e^{v_n+1}$.

En remplaçant v_n par $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ on obtient $u_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1\right)=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$.

117 On note n le nombre de tirages.

La probabilité d'obtenir aucune boule blanche est $0{,}7^n$ et on est amené à déterminer le plus petit entier n tel que $0{,}7^n<0{,}01$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi $0{,}7^n<0{,}01$ équivaut à $\ln(0{,}7^n)<\ln(0{,}01)$ c'est-à-dire $n\ln(0{,}7)<\ln(0{,}01)$.

Or $\ln(0{,}7)<0$, ainsi $0{,}7^n<0{,}01$ équivaut à $n>\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}7)}$.

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}7)}\approx 12{,}9$, ainsi $0{,}7^n<0{,}01$ si et seulement si $n\geqslant 13$.

Il faut effectuer au moins 13 tirages pour que la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche soit inférieure à 0,01.

118 **a)** Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A est $y = \ln'(a)\,(x - a) + \ln(a)$.

Or $\ln'(a) = \dfrac{1}{a}$ donc $y = \dfrac{1}{a}(x-a) + \ln(a)$ c'est-à-dire $y = \dfrac{1}{a}x - 1 + \ln(a)$.

Q est le point de T d'abscisse zéro, donc $y_Q = \dfrac{1}{a} \times 0 - 1 + \ln(a)$ c'est-à-dire $y_Q = -1 + \ln(a)$.

Les coordonnées de Q sont $(0\,;-1+\ln(a))$.

Les coordonnées de P sont $(0\,;\ln(a))$.

Donc PQ = 1.

b) Pour construire la tangente T :

- on place le point P ;
- on place le point Q de l'axe des ordonnées tel que $y_Q = y_P - 1$;
- La tangente T est la droite (AQ).

119 **1.a)** La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ c'est-à-dire $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x+1$ donc $g'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) $g(1) = 1 - 1 + \ln(1) = 0$.

g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $g(1) = 0$ donc $g(x) < 0$ sur $]0\,;1[$ et $g(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.

2. a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1 \times x - (x-1) \times 1}{x^2} \times \ln(x) + \frac{x-1}{x} \times \frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \times \ln(x) + \frac{x-1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ et on déduit que $f'(x) < 0$ sur $]0\,;1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

Donc f est décroissante sur $]0\,;1[$ et f est croissante sur $]1\,;+\infty[$.

c) • Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln(x)$ c'est-à-dire aussi $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)$.

• $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0}\ln(x) = -\infty$.

D'après la limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\ln(x) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

d) Voici le tableau de variations de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

120 Cette affirmation est exacte.

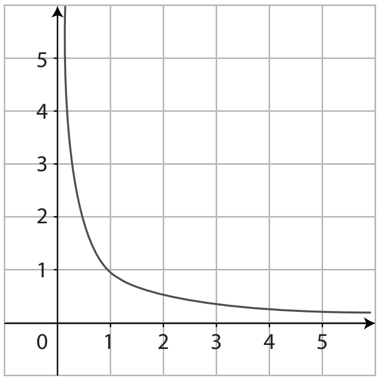
En effet, la variable I contient la valeur 16 en fin d'exécution donc $2^{15} \leqslant A < 2^{16}$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, ainsi $2^{15} \leqslant A < 2^{16}$ équivaut à $\ln(2^{15}) \leqslant \ln(A) < \ln(2^{16})$ c'est-à-dire $15\ln(2) \leqslant \ln(A) < 16\ln(2)$.

121 **a)** La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$ donc $x > 0$ et $y > 0$.

$\ln(x) + \ln(y) = 0$ s'écrit aussi $\ln(xy) = 0$ c'est-à-dire $xy = 1$ soit $y = \dfrac{1}{x}$.

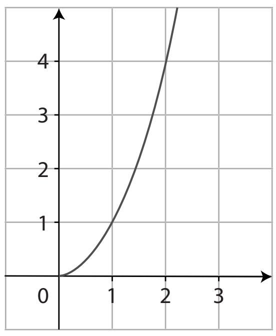
On a représenté ci-dessous l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ qui vérifient $\ln(x) + \ln(y) = 0$.



b) La fonction ln est définie sur $]0\,;+\infty[$ donc $x > 0$ et $y > 0$.

$\ln(y) - 2\ln(x) = 0$ s'écrit aussi $\ln\left(\dfrac{y}{x^2}\right) = 0$ c'est-à-dire $\dfrac{y}{x^2} = 1$ soit $y = x^2$.

On a représenté ci-dessous l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ qui vérifient $\ln(y) - 2\ln(x) = 0$.



Remarque : O(0 ; 0) ne fait pas partie de cet ensemble.

122 **Parcours 1**

• La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$: $f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ c'est à dire $f'(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

Pour tout réel $x>0$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

• $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x)=+\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$.

• On peut construire le tableau de variations de la fonction f.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors de conclure que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

Parcours 2

a) • $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$.

b) • La fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et pour tout réel $x>0$: $g'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour tout réel x de $]0\,;1]$, $\dfrac{1}{x}>0$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ donc $g'(x)>0$ sur $]0\,;1]$.

g est strictement croissante sur $]0\,;1]$.

• On peut construire le tableau de variations de la fonction g sur $]0\,;1]$.

x	0	1
$g'(x)$	‖ $+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$ ↗	1

c) Le tableau de variations de g et le théorème des valeurs intermédiaires permettent de conclure que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;1[$.

123 **a)** Pour déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(3x+1)$, on utilise le schéma de composition ci-dessous.

$$\boxed{x\mapsto \underbrace{3x+1}_{X\mapsto \ln(X)}}$$

$\lim\limits_{x\to +\infty}X=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty}\ln(X)=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(3x+1)=+\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-5)=+\infty$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=+\infty$.

b) • La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant 0$: $g'(x)=\dfrac{3}{3x+1}+1$ c'est-à-dire $g'(x)=\dfrac{3x+4}{3x+1}$.

Pour tout nombre réel $x\geqslant 0$, $3x+4>0$ et $3x+1>0$ donc $g'(x)>0$ sur $[0\,;+\infty[$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $+$	
$g(x)$	‖ -5 ↗	$+\infty$

c) Le tableau de variations de g et le théorème des valeurs intermédiaires permettent de conclure que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans$[0\,;+\infty[$.

$g(2)=\ln(7)-3$ et $\ln(7)-3\approx -1{,}05$ donc $g(2)<0$.

$g(3)=\ln(10)-2$ et $\ln(10)-2\approx 0{,}3$ donc $g(3)>0$.

$g(2)<0$ et $g(3)>0$ donc $2<\alpha<3$.

d) En tabulant avec la calculatrice on obtient : $2{,}76<\alpha<2{,}77$.

2.76	-0.01213845
2.77	0.001089891

124 **a)** • $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}-4\ln(x)=+\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(3x-5)=-5$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=+\infty$.

b) La fonction h est dérivable sur $]0\,;4]$ et pour tout réel $x>0$: $h'(x)=-4\times\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+3$ c'est-à-dire $h'(x)=\dfrac{3x^2-4x-1}{x^2}$.

Pour tout réel $x>0$, $x^2>0$ donc $h'(x)$ est du signe de $3x^2-4x-1$.

$\Delta=(-4)^2-4\times 3\times(-1)=28$.

$\Delta>0$ donc la fonction polynôme $3x^2-4x-1$ a deux racines :

$x_1=\dfrac{4-\sqrt{28}}{6}=\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$

et $x_2=\dfrac{4+\sqrt{28}}{62}=\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$.

Donc $x^2-x-1>0$ si et seulement si $x\in\left]-\infty\,;\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}\right[\cup\left]\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\,;+\infty\right[$.

$\dfrac{2-\sqrt{7}}{3}<0$ et $0<\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}<4$ donc $h'(x)<0$ sur $\left]0\,;\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$ et $h'(x)>0$ sur $\left]\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\,;4\right]$.

On en déduit le tableau de variation de variations de la fonction h.

x	0		$\frac{2+\sqrt{7}}{3}$		4
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	$h\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$	↗	$-4\ln(4)+\frac{29}{4}$

c) $h\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) = -4\times\ln\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) + \frac{3}{2+\sqrt{7}} + \frac{2+\sqrt{7}}{3} - 5.$

donc $h\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right) \approx -1{,}46.$

D'après le tableau de variations de h :

- $0 \in \left]h\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right);+\infty\right[$ donc l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left]0;\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$
- $0 \in \left]h\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right);-4\ln(4)+\frac{29}{4}\right[$ donc l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution β dans l'intervalle $\left]\frac{2+\sqrt{7}}{3};4\right[$.

d) $\frac{2+\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}54$ donc $0 < \alpha < 1{,}54$.

En tabulant la fonction h avec la calculatrice on obtient $0{,}69 < \alpha < 0{,}691$.

0.69	0.003538888
0.691	-0.001368176

125 **a)** On utilise le schéma de composition ci-dessous.

$$\boxed{x \mapsto \underbrace{e^{-2x}-1}_{X\mapsto\ln(X)}}$$

$\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

b) On utilise le même schéma de composition.

$\lim\limits_{x\to -\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

c) • La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et pour tout réel $x < 0$, $f'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{e^{-2x}-1}$.

• Pour tout réel $x < 0$, $-2e^{-2x} < 0$.

• $e^{-2x} - 1 > 0$ équivaut à $e^{-2x} > 1$ c'est-à-dire $-2x > 0$ soit $x < 0$.

On en déduit que $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$.

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.

Voici le tableau de variations de la fonction f sur $]-\infty\,;0[$.

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

d) D'après le tableau de variations de f et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α sur $]-\infty\,;0[$. Cela signifie que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point A d'abscisse α.

e) Avec la calculatrice on obtient $-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$.

-0.4	0.2033623
-0.3	-0.1958784

126 **a)** L'affirmation est fausse.

En effet, on remarque que pour tout réel $x > 0$: $f(x) = x^2\ln(x) - x^2$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2 = 0$.

Donc d'après la limite d'une somme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

b) L'affirmation est fausse.

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 2x(\ln(x)-1) + x^2\times\frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$.

Pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln(x) - \frac{1}{2}$.

$\ln(x) - \frac{1}{2} > 0$ équivaut $\ln(x) > \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $x > e^{\frac{1}{2}}$.

Donc $f'(x) < 0$ sur $\left]0\,;e^{\frac{1}{2}}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]e^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$.

On en déduit que le minimum de f sur$[0\,;+\infty[$ est $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$.

$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - 1\right)$

$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = e\left(\frac{1}{2} - 1\right)$

$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{e}{2}$

Le minimum de f sur$[0\,;+\infty[$ est $-\frac{e}{2}$ et non $-\frac{2}{e}$.

127 **a)** • $f(1)=2$ se traduit par $a=2$.
Donc $f(x)=2x+(bx+c)\ln(x)$.
• $f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\ln(2)$ se traduit par
$1+\left(\frac{1}{2}b+c\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}\ln(2)$
c'est à dire $\left(\frac{1}{2}b+c\right)\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$.
Donc $\frac{1}{2}b+c=-\frac{1}{2}$.
• $f'(x)=2+b\ln(x)+b+\frac{c}{x}$ et $f'(1)=0$ se traduit alors par $2+b+c=0$ c'est-à-dire $b+c=-2$.
• b et c vérifient le système :
$\begin{cases}\frac{1}{2}b+c=-\frac{1}{2}(1)\\ b+c=-2(2)\end{cases}$.
Par soustraction membre à membre on obtient $\frac{1}{2}b=-\frac{3}{2}$ c'est-à-dire $b=-3$.
(2) devient alors $-3+c=-2$ c'est-à-dire $c=1$.
• Donc $f(x)=2x+(-3x+1)\ln(x)$.
2. a) • Pour tout réel $x>0$: $g(x)=2x-3x\ln(x)+\ln(x)$.
$\lim\limits_{x\to 0}2x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}-3x\ln(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$.
D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$.
• Pour tout réel $x>0$: $g(x)=x\left(2-3\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}-3\ln(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$.
D'après la limite d'une somme :
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-3\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}\right)=-\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.
D'après la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.
b) La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour réel $x>0$:
$g'(x)=2-3\ln(x)+(1-3x)\times\frac{1}{x}$
c'est-à-dire $g'(x)=-1-3\ln(x)+\frac{1}{x}$
soit aussi $g'(x)=-3\ln(x)+\frac{1-x}{x}$.
Pour tout réel x tel que $0<x<1$: $\frac{1-x}{x}>0$ et $-3\ln(x)>0$.
Donc $\frac{1-x}{x}-3\ln(x)>0$ c'est-à-dire $g'(x)>0$.
Pour tout réel $x>1$; $\frac{1-x}{x}<0$ et $-3\ln(x)<0$.
Donc $\frac{1-x}{x}-3\ln(x)<0$ c'est-à-dire $g'(x)<0$.

c) Voici le tableau de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$

128 **1. a)** f est dérivable sur $[-1\,;+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant-1$: $f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$.
f' est dérivable sur $[-1\,;+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant-1$: $f''(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1\times(x+2)-x\times1}{(x+2)^2}$
$f''(x)=\frac{x+2}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x+2)^2}$
$f''(x)=\frac{x+4}{(x+2)^2}$.
b) $f''(x)$ est du signe de $x+4$ qui est positif sur $[-1\,;+\infty[$.
Pour $x\geqslant-1$, $f''(x)>0$ donc f' est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$.
c) • Pour tout réel $x\geqslant-1$, $\frac{x}{x+2}=\frac{1}{1+\frac{2}{x}}$.
D'après les règles opératoires $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}=1$.
D'autre part, on montre à l'aide du schéma de composition ci-contre que : $\boxed{x\mapsto \underbrace{x+2}_{X\mapsto\ln(X)}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2)=+\infty$.
Donc d'après la limite d'une somme :
$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.
2. a) On peut construire le tableau de variations de la fonction f' sur $[-1\,;+\infty[$.

x	-1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	-1	↗	$+\infty$

Ce tableau de variations et le théorème des valeurs intermédiaires permettent de conclure que l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution α sur $[-1\,;+\infty[$.
$f'(-0{,}6)\approx-0{,}09$ et $f'(-0{,}5)\approx0{,}37$.
$f'(-0{,}6)<0$ et $f'(-0{,}5)>0$ donc $\alpha\in\,]-0{,}6\,;-0{,}5[$.
b) $f'(x)<0$ sur $[-1\,;\alpha[$ et $f'(x)>0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.
3. a) • D'après la question **2. c)** f est décroissante sur $[-1\,;\alpha[$ et f est croissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.
b) • $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2)=+\infty$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Donc d'après la limite d'un produit :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x+2) = +\infty$.

Et d'après la limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

c) Voici le tableau de variations de la fonction *f*.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

129 **1. a)** $\log(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(10)} = 0$

$\log(10) = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$

$\log(0,1) = \dfrac{\ln(0,1)}{\ln(10)} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{10}\right)}{\ln(10)} = \dfrac{-\ln(10)}{\ln(10)} = -1$

$\log(10^n) = \dfrac{\ln\left(10^n\right)}{\ln(10)} = \dfrac{n\ln(10)}{\ln(10)} = n$

b) • $\log(ab) = \dfrac{\ln(ab)}{\ln(10)}$

$\log(ab) = \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{\ln(10)}$

$\log(ab) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)} + \dfrac{\ln(b)}{\ln(10)}$

$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

• $\log = \left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\ln(10)}$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln(a)-\ln(b)}{\ln(10)}$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)} - \dfrac{\ln(b)}{\ln(10)}$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

2. a. La fonction log est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$: $\log'(x) = \dfrac{1}{x\ln(10)}$.

$\ln(10)$ est positif donc pour tout réel $x > 0$, $\log'(x) > 0$.

La fonction log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Voici le tableau de variations de la fonction log.

x	0		$+\infty$
$\log'(x)$		$+$	
$\log(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

b) • Une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 1 est de la forme :

$$y = \log'(1) \times (x-1) + \log(1).$$

Or, $\log'(1) = \dfrac{1}{\ln(10)}$ et $\log(1) = 0$.

Une équation de T est $y = \dfrac{1}{\ln(10)}(x-1)$.

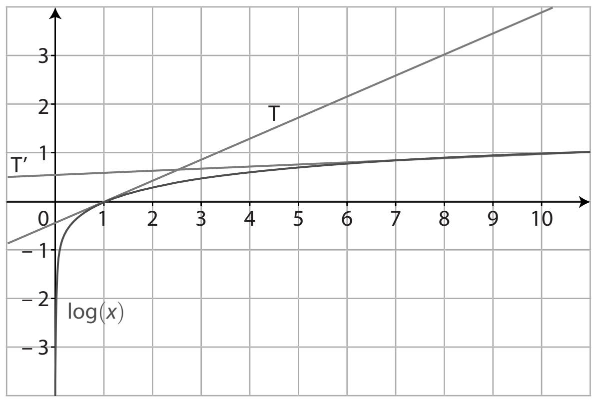
• Une équation de la tangente T′ à la courbe au point d'abscisse 10 est de la forme :

$y = \log'(10) \times (x-10) + \log(10)$.

Or, $\log'(10) = \dfrac{1}{10\ln(10)}$ et $\log(10) = 1$.

Une équation de T′ est $y = \dfrac{1}{10\ln(10)}(x-10)+1$.

Voici la courbe représentative de la fonction log.



130 **a)** $S = 10\log\left(\dfrac{10^6 I_0}{I_0}\right)$

$S = 10\log(10^6)$

$S = 10 \times 6 \times \log(10)$

$S = 60$.

Le niveau sonore est de 60 décibels.

b) $S = 100$ c'est-à-dire $10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 100$

soit $\dfrac{\ln\left(\dfrac{I}{I_0}\right)}{\ln(10)} = 10$.

$\ln\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 10\ln(10)$ ce qui équivaut à $\dfrac{I}{I_0} = e^{10\ln(10)}$

c'est-à-dire $\dfrac{I}{I_0} = 10^{10}$.

131 **a)** • $M = \log\left(\dfrac{2\times10^5 A_0}{A_0}\right)$

$M = \log(2\times10^5)$

$M = \log(2) + \log(10^5)$

$M = \log(2) + 5$.

Donc $M \approx 5,3$.

La magnitude du séisme de Barcelonnette était environ 5,3.

• $M = \log\left(\dfrac{1,26\times10^9 A_0}{A_0}\right)$

$M = \log(1,26\times10^9)$

$M = \log(1{,}26) + \log(10^9)$
$M = \log(1{,}26) + 9.$
Donc $M \approx 9{,}1$.
La magnitude du séisme de Tohoku était environ 9,1.

b) $\log\left(\dfrac{A}{A_0}\right) = 6{,}2$ c'est-à-dire $\dfrac{\ln\left(\dfrac{A}{A_0}\right)}{\ln(10)} = 6{,}2$ soit $\ln\left(\dfrac{A}{A_0}\right) = 6{,}2\ln(10)$ ce qui équivaut à $\dfrac{A}{A_0} = e^{6{,}2\ln(10)}$, soit $A = 1{,}6 \times 10^6 A_0$.
L'amplitude de ce tremblement de terre était d'environ $1{,}6 \times 10^6\, A_0$.

132 **a)** $pH = -\log(6 \times 10^{-5})$
$pH = -\log(6) - \log(10^{-5})$
$pH = -\log(6) + 5\log(10)$
$pH = -\log(6) + 5.$
Donc $pH \approx 4{,}2$.
Le pH est environ 4,2.
b) On note n le nombre de moles par litre d'ions H_3O^+.
On a alors $-\log(n) = 2{,}4$ c'est-à-dire $\dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} = -2{,}4$ soit $\ln(n) = -2{,}4\ln(10)$.
Donc $n = e^{-2{,}4\ln(10)}$ et alors $n \approx 0{,}004$.
Le nombre de moles par litre d'ions H_3O^+ est environ 0,004.
c) $-\log(2 \times n) = -\log(2) - \log(n)$
$-\log(2 \times n) = -\log(n) - \log(2)$.
Lorsque la concentration en H_3O^+ double le pH diminue de $\log(2)$.

133 **a)** $G = 20\log(7{,}4 \times 10^{-9} \times 9 \times 10^9)$
$G = 20\log(7{,}4 \times 10^{-9} \times 9 \times 10^9)$
$G = 20\log(66{,}6)$
$G \approx 36{,}47$
Le gain de l'antenne est environ 36,47 dB.
b) On résout l'inéquation $20\log(7{,}4 \times 10^{-9} f) > 20$.
$\log(7{,}4 \times 10^{-9} f) > 1$
$\dfrac{\ln(7{,}4 \times 10^{-9} f)}{\ln(10)} > 1$ (car $\ln(10) > 0$)
$\ln(7{,}4 \times 10^{-9} f) > \ln(10)$
$7{,}4 \times 10^{-9} f > 10$
$f > \dfrac{10}{7{,}4 \times 10^{-9}}$ c'est-à-dire $f > \dfrac{10^{10}}{7{,}4}$.
Or $\dfrac{10^{10}}{7{,}4} \approx 135 \times 10^7$.
Donc la fréquence doit être supérieure à environ 135×10^7 Hz.

134 **a)** $\log(N+1) = \log(2^{82589933})$
$\log(N+1) = 8589933 \times \log(2)$.
b) La partie entière de $\log(N+1)$ est 24 862 047.
c) On en déduit l'encadrement :
$24\,862\,047 < \log(N+1) < 24\,862\,048$.
Ce qui équivaut à : $10^{24\,862\,047} < N + 1 < 10^{24\,862\,048}$
c'est-à-dire $10^{24\,862\,047} < 2^{82\,589\,933} < 10^{24\,862\,048}$
d) $10^{24\,862\,047} < 2^{82\,589\,933} < 10^{24\,862\,048}$ entraine
$10^{24\,862\,047} \leqslant 2^{82\,589\,933} - 1 < 10^{24\,862\,048}$
soit $10^{24\,862\,047} \leqslant N < 10^{24\,862\,048}$
Donc l'écriture décimale de N comporte 24 862 048 chiffres.

135 **a)** Faux. En effet, si $x > e^{100}$ alors $\ln(x) > 100$.
b) Vrai. En effet, la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x)$ avec $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.
c'est-à-dire $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;1]$ et croissante sur $[1\,;+\infty[$.
Or $f(1) = 1$ donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant 1$ soit $x - \ln(x) \geqslant 1$.
On a alors pour tout réel $x > 0$, $x - \ln(x) > 0$ c'est-à-dire $\ln(x) < x$.
c) Vrai. En effet, pour $x > 0$, $\ln(x) = -100$ équivaut à $x = e^{-100}$.
d) Vrai. En effet, la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc l'inéquation $\ln(x) \geqslant 10^{10}$ équivaut à $x \geqslant e^{10^{10}}$.
On pouvait aussi justifier cette affirmation par le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

136 x est un nombre réel strictement positif.
a) Si $\ln(x^2) = 2$ alors $2\ln(x) = 2$ donc $\ln(x) = 1$et $(\ln(x))^2 = 1$.
La proposition est vraie.
b) Si $(\ln(x))^2 = 1$ alors $\ln(x) = -1$ ou $\ln(x) = 1$ donc $x = \dfrac{1}{e}$ ou $x = e$.
$\ln\left(\left(\dfrac{1}{e}\right)^2\right) = 2\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -2\ln(e) = -2.$
Donc la réciproque est fausse.

137 **a)** $C = \sqrt{AB} = \sqrt{1 \times 10}$ donc $C \approx 3{,}162\,277$
$IC = \dfrac{1}{2}(IA + IB) = \dfrac{1}{2}(0+1) = 0{,}5000000$

A	B	*I*A	*I*B	$\sqrt{AB}$	$\lvert R - x\rvert < 10^{-3}$
1	10	0	1	3,162 277	Faux
3,162 277	10	0,5	1	5,623 368	Faux
3,162 277	5,623 413	0,5	0,75	4,216 964	Faux

On obtient bien $D = 5{,}623\,413$ et $E = 4{,}216\,964$

b) Voici le programme en langage Python.

```
def Briggs(x,p) :
    A = 1
    B = 10
    lA = 0
    lB = 1
    while abs(B-x)>10**(-p):
        if (A*B)**0.5<x:
            A=(A*B)**0.5
            lA=(lA+lB)/2
        else:
            B=(A*B)**0.5
            lB=(lA+lB)/2
    return lB
print (Briggs(5,7))
```

```
>>>
0.6989700049161911
```

La valeur obtenue avec ce programme correspond à la valeur de *l*Z obtenue par Euler.

c) Voici le programme initialisé avec A $=10$, B $=100$, *l*A $=1$, *l*B $=2$.

```
def Briggs(x,p) :
    A = 10
    B = 100
    lA = 1
    lB = 2
    while abs(B-x)>10**(-p):
        if (A*B)**0.5<x:
            A=(A*B)**0.5
            lA=(lA+lB)/2
        else:
            B=(A*B)**0.5
            lB=(lA+lB)/2
    return lB
print (Briggs(62,14))
```

```
>>>
1.792391689498254
```

Une valeur approchée à 10^{-14} près de $\log(62)$ est 1,79 239 168 949 825.

138 **1. b)** On lit que $2^4-4^2=0$ c'est-à-dire $2^4=4^2$.

Donc $n=2$ et $p=4$ (et $n=4$ et $p=2$).

2. a) Pour tous entiers naturels $n>1$ et $p>1$, $n^p=p^n$ équivaut à $\ln(n^p)=\ln(p^n)$ c'est-à-dire $p\ln(n)=n\ln(p)$ soit $\dfrac{\ln(n)}{n}=\dfrac{\ln(p)}{p}$.

b) • La fonction f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant 1$: $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)}{x^2}$ c'est-à-dire $f'(x)=\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

$f'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$ donc f' est positive sur $[1\,;\mathrm{e}[$ et f' est négative sur $]\mathrm{e}\,;+\infty[$.

On peut construire le tableau de variations de f.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

c) • D'après le tableau de variations ci-dessus $f(x)\in\left[0\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ donc $\lambda\in\left[0\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$.

• Lorsque $p=1$, $\lambda=0$ et d'après le tableau de variations de f l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

Donc il n'existe pas de solution dans $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ de l'équation $f(x)=\lambda$.

• Lorsque $p>1$, $\lambda\in\left]0\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ donc d'après le tableau de variations de f l'équation $f(x)=\lambda$ a une unique solution a dans l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$ et une unique solution b dans $[\mathrm{e}\,;+\infty[$.

c) Les nombres entiers naturels de l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$ sont 1 et 2.

On en déduit que les nombres entiers naturels distincts tels que $\dfrac{\ln(n)}{n}=\dfrac{\ln(p)}{p}$ sont 2 et 4.

3. Les nombres entiers naturels non nuls et distincts n et p tels que $n^p=p^n$ sont 2 et 4.

139 On note respectivement $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère.

On note h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x)=f(x)-g(x)$.

• $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(2)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -2\ln(x)=+\infty$.

Donc d'après la limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$.

• Pour tout réel $x>0$,

$h(x)=x\ln(2)-2\ln(x)=x\left(\ln(2)-2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2)-2\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=\ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Donc d'après la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$.

• La fonction h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$: $h'(x)=\ln(2)-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x\ln(2)-2}{x}$.

Pour tout réel $x>0$, $h'(x)$ est du signe de $x\ln(2)-2$ donc $h'(x)<0$ sur $\left]0\,;\dfrac{2}{\ln(2)}\right[$ et $h'(x)>0$ sur $\left]\dfrac{2}{\ln(2)}\,;+\infty\right[$

• On peut construire le tableau de variation de h.

x	0		$\frac{2}{\ln(2)}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$h\left(\frac{2}{\ln(2)}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$h\left(\dfrac{2}{\ln(2)}\right)=\dfrac{2}{\ln(2)}\times\ln(2)-2\ln\left(\dfrac{2}{\ln(2)}\right)$

$h\left(\dfrac{2}{\ln(2)}\right) = 2 - \ln(2) + 2\ln(\ln(2))$

$h\left(\dfrac{2}{\ln(2)}\right) \approx -0{,}12$ donc $h\left(\dfrac{2}{\ln(2)}\right) < 0$.

• D'après ce tableau de variations :

$0 \in \left[h\left(\dfrac{2}{\ln(2)}\right) ; +\infty\right[$ donc l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution a dans l'intervalle $\left]0 ; \dfrac{2}{\ln(2)}\right]$.

De plus $2 \in \left]0 ; \dfrac{2}{\ln(2)}\right]$ et $h(2) = 0$, donc $a = 0$.

• De même l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution b dans l'intervalle $\left]\dfrac{2}{\ln(2)} ; +\infty\right[$.

De plus $4 \in \left]0 ; \dfrac{2}{\ln(2)}\right]$ et $h(4) = 0$, donc $b = 0$.

• On en déduit que :

– sur $]0 ; 2[\cup]4 ; +\infty[$, $h(x) > 0$, c'est-à-dire : $f(x) > g(x)$ et la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}'$.

– sur $]2 : 4[$, $h(x) < 0$, c'est-à-dire : $f(x) < g(x)$ et la courbe $\mathscr{C}'$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

140 • Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 4ab$.

Or $(a-b)^2 \geqslant 0$ donc $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

C'est-à-dire $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$.

• La fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc l'inégalité $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$

équivaut à $\ln\left(\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right) \geqslant \ln(ab)$

c'est-à-dire $2\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \ln(a) + \ln(b)$.

Donc pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b))$.

141 **Traduction :** Déterminer les abscisses des points d'intersections de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x) - \ln(7-x) + 2$ avec l'axe des abscisses.

Solution : Il s'agit ici de résoudre l'équation $\ln(x) - \ln(7-x) + 2 = 0$.

On résout cette équation dans l'ensemble E des nombres réels tels que $x > 0$ et $7 - x > 0$ soit $x > 0$ et $7 > x$. Donc $E =]0 ; 7[$.

$\ln(x) - \ln(7-x) + 2 = 0$

équivaut à $\ln(x) + \ln(e^2) = \ln(7-x)$

c'est-à-dire $\ln(x \times e^2) = \ln(7-x)$.

Donc $x \times e^2 = 7 - x$ c'est-à-dire $x = \dfrac{7}{1+e^2}$.

$\dfrac{7}{1+e^2} \in E$. Donc $S = \left\{\dfrac{7}{1+e^2}\right\}$.

La courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\dfrac{7}{1+e^2}$.

142 On note x l'abscisse du point $M (x \in]0 ; +\infty[)$.

$OM = \sqrt{x^2 + \ln^2(x)}$.

On pose $f(x) = x^2 + (\ln(x))^2$, alors $f'(x) = 2x + 2\dfrac{\ln(x)}{x}$

c'est-à-dire $f'(x) = 2\dfrac{(x^2 + \ln(x))}{x}$.

Pour $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 + \ln(x)$,

alors $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

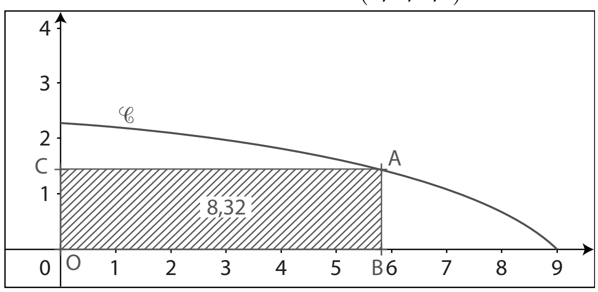
D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, g étant continue sur $]0 ; +\infty[$, il existe un nombre réel α tel que $g(\alpha) = 0 (0{,}65 < \alpha < 0{,}66)$.

Pour $x \in]0 ; \alpha]$, $g(x) \leqslant 0$ donc $f'(x) \leqslant 0$ et pour $x \in [\alpha ; +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$.

f est décroissante sur $]0 ; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha ; +\infty[$ donc elle admet un minimum en α sur $]0 ; +\infty[$.

La distance OM est donc minimale pour le point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse α.

143 **a)** L'aire maximum semble atteinte lorsque les coordonnées de A sont environ (5,8 ; 1,4)



b) On note x l'abscisse du point $M (x \in [0 ; 9])$.

L'aire $A(x)$ du rectangle OBAC est alors $A(x) = x\ln(10-x)$.

La fonction A est dérivable sur $[0 ; 9]$ et pour réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 9$: $A'(x) = \ln(10-x) - \dfrac{x}{10-x}$.

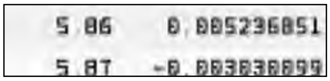
$A'(x)$ est dérivable sur$[0 ; 9]$ et pour réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 9$: $A''(x) = -\dfrac{1}{10-x} - \dfrac{10-x+x}{(10-x)^2}$

$A''(x) = \dfrac{x-20}{(10-x)^2}$.

$A''(x)$ est strictement négative sur $[0 ; 9]$ donc A' est strictement décroissante sur $[0 ; 9]$.

De plus $A'(0) = \ln(10)$ et $A'(9) = -9$ donc l'équation $A'(x) = 0$ admet une unique solution α dans$[0 ; 9]$.

Avec la calculatrice on obtient $5{,}86 \leqslant \alpha \leqslant 5{,}87$.



Donc pour $x \in [0\ ;\ \alpha]$, $A'(x) \geqslant 0$ et pour $x \in [\alpha\ ;\ 9]$, $A'(x) < 0$.

A est croissante sur $[0\ ;\ \alpha]$ et A est décroissante sur$[\alpha\ ;\ 9]$ donc A admet un maximum en α sur $[0\ ;\ 9]$.

L'aire du rectangle OBAC est maximale lorsque les coordonnées du point A sont $(\alpha\ ;\ \alpha\ln(10-\alpha))$ avec $5{,}86 \leqslant \alpha \leqslant 5{,}87$.

144 **1. a)** case rouge : 2, $n+1$,
case verte : $\log(2-\exp(-v))$, case bleue : $S+v$.

b)

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,398	4,615	6,909	9,210	11,513	13,816

On conjecture que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

2. a) $u_1 = e^{u_1} = e^{\ln(2)} = 2$.

Pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} = e^{v_{n+1}} = e^{\ln(2-e-vn)} = 2 - e^{-vn} = 2 - \frac{1}{u_n}.$$

b) $u_2 = 2 - \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{3}{2}$.

$$u_3 = 2 - \frac{1}{u_2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$u_4 = 2 - \frac{1}{u_3} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

c) Pour $n = 1$, $u_1 = \dfrac{1+1}{1}$.

On suppose que pour un entier $n \geqslant 1$ donné, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Alors $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} = 2 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1}$ et l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

3. a) Pour $n \geqslant 1$, $v_n = \ln u_n$, donc $v_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

b) $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{2}{1} + \ln\dfrac{3}{2} + \ln\dfrac{4}{3}$,

donc $S_3 = \ln\left(\dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{4}{3}\right)$, soit $S_3 = \ln 4$.

c) Pour $n \geqslant 1$,

$$S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$

$$S_n = \ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

$$S_3 = \ln\left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \ldots \times \frac{n+1}{n}\right) \text{ donc } S_n = \ln(n+1).$$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Objectif BAC

145 **Partie A**

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} \text{ c'est-à-dire } f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $]0\ ;\ e[$ et $f'(x) < 0$ sur $]e\ ;\ +\infty[$.

On peut construire le tableau de variations de f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

D'après le tableau de variation précédent, la fonction f a pour maximum $\dfrac{1}{e}$ et ce maximum est atteint en $x = e$.

Partie B

1. Pour tout entier $n \geqslant 3$, $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{e}$.

De plus $f(1) = 0$ et $f(e) = \dfrac{1}{e}$ donc $\dfrac{1}{n} \in [f(1)\,;f(e)]$.

Or f est continue et strictement croissante sur $[1\ ;\ e]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\ ;\ e]$ notée α_n.

2. a) Les nombres α_3, α_4 et α_5 sont les abscisses inférieures à e des points d'intersection des droites D_3, D_4, D_5 et la courbe $\mathscr{C}$.

Graphiquement, on lit que $\alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$.

On conjecture donc que la suite (α_n) est décroissante.

b) Première méthode :

Pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$.

Or pour tout entier $n \geqslant 3$, $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{e}$ donc $f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1})$.

De plus α_n et α_{n+1} appartiennent à $[1\ ;\ e]$ et la fonction f est strictement croissante sur $[1\ ;\ e]$ donc $\alpha_n > \alpha_{n+1}$.

La suite (α_n) est décroissante.

Deuxième méthode :

On suppose que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

De plus α_n et α_{n+1} appartiennent à $[1\,;\,e]$ et la fonction f est strictement croissante sur $[1\,;\,e]$ donc $f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n)$ (1).

Or pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$ donc $f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1})$.

Ce qui est impossible d'après (1).

Donc pour tout entier $n \geqslant 3$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

La suite (α_n) est décroissante.

c) $\alpha_n \in [1\,;\,e]$ donc la suite (α_n) est minorée par 1.

La suite (α_n) est décroissante et minorée donc la suite (α_n) converge.

3. a) $f(\beta_n) = \dfrac{1}{n}$ équivaut à $\dfrac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \dfrac{1}{n}$ c'est-à-dire $\ln(\beta n) = \dfrac{\beta_n}{n}$. On obtient de même $\ln(\beta_3) = \dfrac{\beta_3}{3}$.

La fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$ et la suite (β_n) est croissante donc pour tout entier $n \geqslant 3$:

$\ln(\beta_n) \geqslant \ln(\beta_3)$ c'est-à-dire $\dfrac{\beta_n}{n} \geqslant \dfrac{\beta_3}{3}$.

On en déduit alors que tout entier $n \geqslant 3$: $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$.

b) $\beta_3 > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{\beta_3}{3} = +\infty$.

Pour tout entier $n \geqslant 3$, $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{\beta_3}{3} = +\infty$, donc d'après un théorème de comparaison :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

146 Partie A

1. Pour tout réel $x > 0$, $g(x) = 0$ équivaut à $4x - x\ln(x) = 0$ soit $4 = \ln(x)$ et donc $x = e^4$.

2. $g(x) > 0$ équivaut à $x(4 - \ln(x)) > 0$ c'est-à-dire $4 - \ln(x) > 0$ (car $x > 0$).

Donc $\ln(x) < 4$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $x < e^4$.

On en déduit que $g(x) > 0$ sur $]0\,;e^4[$ et $g(x) < 0$ sur $]e^4\,;+\infty[$.

3. • $g(x) < 0$ sur $]e^4\,;+\infty[$ donc la première conjecture est fausse.

• $g(1) = 4$ et $g(e^4) = 0$.

$1 < e^4$ et $g(1) > g(e^4)$ donc la fonction g n'est pas strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

La deuxième conjecture est fausse.

Partie B

1. a) Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \dfrac{1}{x}$.

Alors $x = \dfrac{1}{X}$ et $x\ln(x) = \dfrac{1}{X}\ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\dfrac{\ln(X)}{X}$.

Or $\lim\limits_{x\to0} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$.

Donc, par composition, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to0}(4x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0}(-x\ln(x)) = 0$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$.

• Pour tout réel $x > 0$: $g(x) = x(4 - \ln(x))$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(4 - \ln(x)) = -\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2.a) g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$: $g'(x) = 4 - 1\times\ln(x) - x\times\dfrac{1}{x}$

c'est-à-dire $g'(x) = 3 - \ln(x)$.

b) • Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) > 0$ équivaut à $3 - \ln(x) > 0$ c'est-à-dire $3 > \ln(x)$ et donc $x < e^3$.

Donc g est croissante sur $]0\,;e^3[$ et décroissante sur $]e^3\,;+\infty[$.

• $g(e^3) = 4e^3 - e^3\ln(e^3) = 4e^3 - 3e^3 = e^3$.

• On peut construire le tableau de variations de g.

x	0		e^3		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 0	$\nearrow$	e^3	$\searrow$	$-\infty$

147 **1.** Pour tout réel x tel que $0 \leqslant x < 1$, $1 - x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-bx + b - 2$.

$f'(x) > 0$ équivaut à $-bx + b - 2 > 0$ c'est-à-dire $-bx > 2 - b$.

Or $b > 2$ donc $f'(x) > 0$ équivaut à $x < \dfrac{2-b}{-b}$ c'est-à-dire $x < \dfrac{b-2}{b}$.

f est croissante sur $\left[0\,;\dfrac{b-2}{b}\right[$ et décroissante $\left]\dfrac{b-2}{b}\,;1\right[$

donc f admet un maximum en $\dfrac{b-2}{b}$ égal à $f\left(\dfrac{b-2}{b}\right)$.

$f\left(\dfrac{b-2}{b}\right) = b\times\left(\dfrac{b-2}{b}\right) + 2\ln\left(1 - \dfrac{b-2}{b}\right)$

c'est-à-dire $f\left(\dfrac{b-2}{b}\right) = b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

Le maximum de f est égal à $b - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. On note g la fonction définie sur$[2\,;+\infty[$ par $g(x) = x - 2 + 2\ln\left(\dfrac{2}{x}\right)$

c'est-à-dire aussi $g(x) = x - 2 + \ln(4) - 2\ln(x)$.

La fonction g est dérivable sur$[2\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 2$: $g'(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ c'est-à-dire $g'(x) = \dfrac{x-2}{x}$.

Or pour tout réel $x \geqslant 2$, $x - 2 \geqslant 0$ et $x > 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$.

La fonction g est croissante sur$[2\,;+\infty[$.

$g(2) = 0$ et $g(6) \approx 1{,}8$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel b_0 dans l'intervalle de $[2\,;+\infty[$ tel que $g(b_0)=1{,}6$ et de plus $2<b_0<6$.

Avec la calculatrice on obtient $5{,}69<b_0<5{,}70$.

5.69	1.598874
5.7	1.605962

La hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre lorsque $b\in[2\,;b_0[$ avec $5{,}69<b_0<5{,}70$.

3. Une équation de la tangente T en O à la courbe est $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

$f(0)=0$ et comme $b=5{,}69$, il vient

$$f'(0)=\frac{-5{,}69\times 0+5{,}69-2}{1-0}=3{,}69.$$

Une équation de T est $y=3{,}69x$.

Cela signifie que l'origine du repère, le point de coordonnée $(1\,;0)$ et le point de coordonnées $(1\,;3{,}69)$ forment un triangle rectangle, dans lequel le côté opposé à l'angle θ mesure 3,69 et le côté adjacent mesure 1, donc $\tan(\theta)=\dfrac{3{,}69}{1}$.

Avec la calculatrice, on obtient $\theta\approx 74{,}8°$

148 **1. a)** la fonction f est dérivable sur $]0\,;1]$ et pour tout réel x de $]0\,;1]$,

$$f'(x)=1\times(1-\ln(x))^2+x\times 2\times\left(-\frac{1}{x}\right)\times(1-\ln(x))$$

$f'(x)=(1-\ln(x))^2-2(1-\ln(x))$

$f'(x)=(1-\ln(x))(1-\ln(x)-2)$

$f'(x)=(1-\ln(x))(-\ln(x)-1)$

$f'(x)=(\ln(x)+1)(\ln(x)-1)$.

b) $\ln(x)+1>0$ équivaut à $\ln(x)>-1$ c'est-à-dire $x>e^{-1}$.

De plus pour tout réel x tel que $0<x<1$, $\ln(x)-1<0$.

Donc $f'(x)>0$ sur $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[$ et $f'(x)<0$ sur $\left]\dfrac{1}{e}\,;1\right]$.

On en déduit le tableau des variations de f.

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ 0	↗	$4e^{-1}$	↘	1

2.a) Une équation de la tangente d_a en M_α *à la courbe* Γ est $y=g'(a)(x-a)+g(a)$.

$g'(a)=\dfrac{1}{a}$ et $g(a)=\ln(a)$.

Une équation de d_a est $y=\dfrac{1}{a}(x-a)+\ln(a)$ c'est-à-dire $y=\dfrac{1}{a}x-1+\ln(a)$.

• Les coordonnées de P_a sont $(0\,;-1+\ln(a))$.

$a\in\,]0\,;1]$ donc $-1+\ln(a)<0$ et alors $OP_a=1-\ln(a)$.

• Pour déterminer l'abscisse de N_a on résout l'équation $\dfrac{1}{a}x-1+\ln(a)=0$ c'est-à-dire $x=a\,(1-\ln(a))$.

Les coordonnées de N_a sont $(a(1-\ln(a))\,;0)$ et alors $ON_a=a(1-\ln(a))$.

• L'aire $A(a)$, en unités d'aire, du triangle ON_aP_a est

$A(a)=\dfrac{1}{2}\times OP_a\times ON_a$

c'est-à-dire $A(a)=\dfrac{1}{2}(1-\ln(a))a(1-\ln(a))$

soit $A(a)=\dfrac{1}{2}a(1-\ln(a))^2$.

b) On remarque que $A(a)=\dfrac{1}{2}f(a)$ donc $A(a)$ est maximale si $f(a)$ est maximum.

On en déduit que $A(a)$ est maximum si $a=e^{-1}$ et on a alors $A(e^{-1})=\dfrac{1}{2}f(e^{-1})$

c'est-à-dire $A(e^{-1})=\dfrac{1}{2}\times 4e^{-1}$ soit $A(e^{-1})=\dfrac{2}{e}$.

L'aire est maximum pour $a=e^{-1}$ cette aire maximum est $\dfrac{2}{e}$ unités d'aire.

149 **a)** Le logarithme décimal et ses propriétés sont traités dans l'exercice 129 p 339.

Voici un résumé de ces propriétés.

La fonction **logarithme décimal**, notée **log**, est la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

• $\log(1)=0$; $\log(10)=1$; $\log(0{,}1)=-1$;

Pour tout entier naturel n, $\log(10^n)=n$;

• a et b désignent deux nombres réels strictement positifs.

$\log(ab)=\log(a)+\log(b)$ et $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$

• la fonction log est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x>0$: $\log'(x)=\dfrac{1}{x\ln(10)}$ et $\log'(x)>0$.

La fonction log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

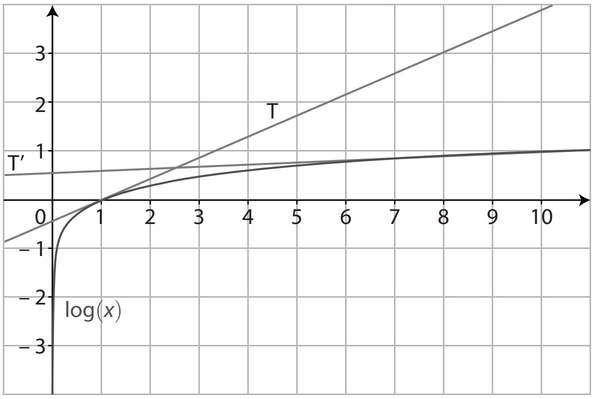
Voici le tableau de variations de la fonction log.

x	0		$+\infty$
$\log'(x)$	‖	+	
$\log(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

• Une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 1 est $y=\dfrac{1}{\ln(10)}(x-1)$.

Une équation de la tangente T′ à la courbe au point d'abscisse 10 est $y=\dfrac{1}{10\ln(10)}(x-10)+1$.

Voici la courbe représentative de la fonction log.



• Le logarithme décimal est notamment utilisé pour mesurer :

– un niveau d'intensité sonore, en décibel (dB) d'un son (exercice 130 p 239) ;

– la magnitude d'un séisme sur l'échelle Richter (exercice 131 p 239) ;

– le pH d'une solution aqueuse (exercice 132 p 239) ;

– le nombre de chiffres d'une écriture décimale (exercice 134 p 239) ;

– en astronomie notamment pour exprimer de la magnitude absolue d'une étoile.

b) Au choix des candidats.

150 On a ici C = 150 000, $t = 1{,}8$ et M = 1 000.

La formule devient alors

$$1000 = \frac{150000 \times \frac{1{,}8}{1200} \times \left(1 + \frac{1{,}8}{1200}\right)^n}{\left(1 + \frac{1{,}8}{1200}\right)^n - 1}$$

c'est-à-dire $1000\left(\left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right)^n - 1\right) = 225 \times \left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right)^n$

soit encore $775\left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right)^n = 1000.$

Donc $\left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right)^n = \frac{1000}{775}$ soit $\left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right)^n = \frac{40}{31}$

ce qui équivaut à $\ln\left(\left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right)^n\right) = \ln\left(\frac{40}{31}\right)$

soit $n\ln\left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right) = \ln\left(\frac{40}{31}\right).$

Donc $n = \dfrac{\ln\left(\frac{40}{31}\right)}{\ln\left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right)}.$

$$\frac{\ln\left(\frac{40}{31}\right)}{\ln\left(1+\frac{1{,}8}{1200}\right)} \approx 170{,}0556.$$

Donc la durée minimale de l'emprunt de Louise sera 171 mois.

151 **(1)** Pour tout réel $x > 0$,

$$f(x) = x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 2 + \frac{5}{x^2}\right).$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0.$$

D'après la limite d'une somme,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 2 + \frac{5}{x^2}\right) = -2.$$

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Donc l'affirmation est exacte.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}(-2x^2+5) = 5$.

D'après la limite d'une somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Donc l'affirmation est exacte.

(3) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \frac{1}{x} - 4x = \frac{1-4x^2}{x}$.

Sur $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $1-4x^2$ et on peut construire le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-\ln(2)+\frac{9}{2}$	↘	$-\infty$

$-\ln(2) + \frac{9}{2} > 0$ donc d'après le tableau ci-dessus et le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$.

Donc l'affirmation est fausse.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc la droite d d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$.

Donc l'affirmation est exacte.

(5) Une équation de la tangente d à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Or $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) + \frac{9}{2}$.

Donc une équation de d est $y = -\ln(2) + \frac{9}{2}$.

$-\ln(2) + \frac{9}{2} \neq 4.$

Donc l'affirmation est fausse.

Pour aller plus loin

152 **1.** Pour tout nombre réel $x > 0$, pour tout pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$e^{n\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^n = x^n$

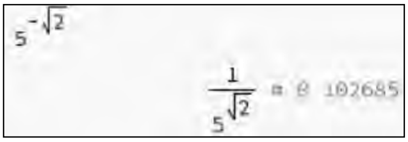
et $e^{-n\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^{-n} = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Lorsque $\alpha = n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $x > 0$, on retrouve bien avec $e^{\alpha\ln(x)}$ les définitions de x^n et x^{-n}.

2. a) Avec la calculatrice, on obtient :
$e^{1,3\ln(2)} \approx 2{,}462289$.

b) On obtient aussi $2^{1,3} \approx 2{,}462289$.

c) On obtient $5^{-\sqrt{2}} \approx 0{,}102685$.



3. a) La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f_α est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$:

$f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} \times e^{\alpha\ln(x)}$

$f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{e^{\ln(x)}} \times e^{\alpha\ln(x)}$

$f'_\alpha(x) = \alpha \times e^{\alpha\ln(x)-\ln(x)}$

$f'_\alpha(x) = \alpha \times e^{(\alpha-1)\ln(x)}$

$f'_\alpha(x) = \alpha \times x^{\alpha-1}$

b) • Pour tout réel $x > 0$: $x^{\alpha-1} > 0$.

De plus $\alpha > 0$ donc $\alpha \times x^{\alpha-1} > 0$ c'est-à-dire $f'_\alpha(x) > 0$.

Donc f_α est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

• On pose $X = \alpha\ln(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ (car $\alpha > 0$) et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$

Donc, par composition, on en déduit que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha\ln(x)} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to0} X = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

Donc, par composition, on en déduit que :

$\lim\limits_{x\to0} e^{\alpha\ln(x)} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = 0$.

On peut construire le tableau de variations de f_α.

x	0		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$+$	
$f_\alpha(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

• $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to0} g_\alpha(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to0} g_\alpha(x) = g_\alpha(0)$ donc la fonction g_α est continue en 0.

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\alpha\ln(x)}}{x}$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\alpha\ln(x)}}{e^{\ln(x)}}$

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0} e^{(\alpha-1)\ln(x)}$

On pose $X = (\alpha-1)\ln(x)$.

Cas où $\alpha > 1$

$\lim\limits_{x\to0} X = -\infty$ (car $\alpha - 1 > 0$) et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

Donc, par composition, on en déduit que :

$\lim\limits_{x\to0} e^{(\alpha-1)\ln(x)} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(0)}{x-0} = 0$.

Cas où $0 < \alpha < 1$

$\lim\limits_{x\to0} X = +\infty$ (car $\alpha - 1 < 0$) et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

Donc, par composition, on en déduit que :

$$\lim_{x\to0} e^{(\alpha-1)\ln(x)} = +\infty$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g_\alpha(x)-g_\alpha(0)}{x-0} = +\infty$.

Bilan

Si $\alpha > 1$, g_α est dérivable en 0 et $g'_\alpha(0) = 0$.

Dans un repère orthonormé la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de g_α est alors horizontale.

Si $0 < \alpha < 1$, g_α n'est pas dérivable en 0.

Dans un repère orthonormé la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de g_α est alors verticale.

c) • Pour tout réel $x > 0$: $f'_\alpha(x) = \dfrac{\alpha}{x} \times e^{\alpha\ln(x)}$.

Or $\alpha < 0$ et $\dfrac{e^{\alpha\ln(x)}}{x} > 0$ donc $f'_\alpha(x) < 0$.

La fonction f_α est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

• On pose $X = \alpha\ln(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} X = -\infty$ (car $\alpha < 0$) et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$.

Donc, par composition, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\alpha\ln(x)} = 0$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.

$\lim\limits_{x\to0} X = +\infty$ (car $\alpha < 0$) et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$.

Donc, par composition, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0} e^{\alpha\ln(x)} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to0} x^\alpha = +\infty$.

Dans un repère orthonormé :

– l'axe des ordonnées est une asymptote verticale en 0 à la courbe représentative de la fonction f_α.

– l'axe des abscisses est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f_α.

d) rouge : $\alpha < 0$; bleu : $0 < \alpha < 1$; vert : $\alpha > 1$.

153 **1.** Lorsque $x = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $u_n = 1^n$ c'est-à-dire $u_n = 1$.

Donc la limite de (u_n) est 1.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$:

$$u_n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$u_n = \mathrm{e}^{x\times\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$u_n = \mathrm{e}^{x\times\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$u_n = \mathrm{e}^{x\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}$$

b) On utilise le schéma de décomposition ci-dessous.

$$x \mapsto \underbrace{\frac{x}{n}}_{\mathrm{N}\mapsto\frac{\ln(1+\mathrm{N})}{\mathrm{N}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{N} = 0 \text{ et } \lim_{\mathrm{N}\to 0} \frac{\ln(1+\mathrm{N})}{\mathrm{N}} = 1.$$

Donc par composition $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$ et il vient

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x.$

c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x.$

154 **1. a)** $f(0) = f(0 \times 0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$.

b) Pour tout réel x, $0 = f(0) = f(0 \times x) = f(0) + f(x)$, donc $f(x) = 0$.

f est donc nulle.

2. a) Pour tout réel $x > 0$,

• $g(x) = f(ax) - f(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$.

• $g(x) = f(a)$. g est donc constante.

b) • g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$.

• g est constante sur $]0 ; +\infty[$ donc $g'(x) = 0$.

c) D'après **b)**, on a pour tout réel $a > 0$, $af'(ax) - f'(x) = 0$.

En particulier pour $x = 1$, $af'(a) - f'(1) = 0$.

3. a) $f'(1) = k$ donc $af'(a) - k = 0$ c'est-à-dire $f'(a) = \dfrac{k}{a}$.

b) D'après ce qui précède, on a pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{k}{x}$. **(1)**

c) • $f_1'(x) = k \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{k}{x}$.

Donc la fonction f_1 vérifie la condition **(1)**.

• $f_2'(x) - f_1'(x) = \dfrac{k}{x} - \dfrac{k}{x} = 0$ donc la fonction $f_2 - f_1$ est constante.

d) Les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ qui vérifient la condition **(1)** sont de la forme $f(x) = k\ln(x) + \mathrm{C}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

De plus $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 0$.

Or $f(1) = \mathrm{C}$ donc $\mathrm{C} = 0$.

Les fonctions f définies sur $]0 ; +\infty[$ telles que pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ $f(ab) = f(a) + f(b)$, ont pour expressions $f(x) = k\ln(x)$ où $k \in \mathbb{R}$.

155 **a)** f et g sont les fonctions définies sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - (x - 1)$ et $g(x) = \ln(x) - \dfrac{x-1}{x}$.

• f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.

Pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - x$.

On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$1-x$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc $\ln(x) \leqslant x - 1$.

• g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$g'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$.

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x - 1$.

On en déduit le tableau de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

Pour tout réel $x > 0$, $g(x) \geqslant 0$ donc $\ln(x) \geqslant \dfrac{x-1}{x}$.

Conclusion : Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \ln(x) \leqslant x - 1$.

b) $\ln(x) \approx \dfrac{\frac{x-1}{x} + x - 1}{2}$

$$\ln(x) \approx \frac{\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x^2-x}{x}}{2}$$

$$\ln(x) \approx \frac{\dfrac{x^2-1}{x}}{2}$$ c'est-à-dire $\ln(x) \approx \dfrac{x-1}{2x}$.

c) $\ln(0{,}99) = \dfrac{0{,}99^2-1}{2\times 0{,}99}$.

Donc $\ln(0{,}99) \approx -0{,}010\,050$.

$\ln(0{,}9995) = \dfrac{0{,}9995^2-1}{2\times 0{,}9995}$.

Donc $\ln(0{,}999\,5) \approx -0{,}000\,500$.

2. a) $0{,}99^{36} \approx 0{,}696$ donc $0{,}99^{36} < 0{,}7$.

$0{,}99^{35} \approx 0{,}703$ donc $0{,}99^{35} > 0{,}7$.

D'où $0{,}99^{36} < 0{,}7 < 0{,}99^{35}$.

b) $0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{10} \approx 0{,}699\,938$.

Donc $0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{10} < 0{,}7$.

$0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{9} \approx 0{,}700\,29$.

Donc $0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{9} < 0{,}7$.

D'où $0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{10} < 0{,}7 < 0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{9}$

c) La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $\ln(0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{10}) < \ln(0{,}7)$ et $\ln(0{,}7) < \ln(0{,}99^{35} \times 0{,}999\,5^{9})$ c'est-à-dire $35\ln(0{,}99) + 10\ln(0{,}999\,5) < \ln(0{,}7)$ et $\ln(0{,}7) < 35\ln(0{,}99) + 9\ln(0{,}999\,5)$

En utilisant les résultats de la question **a)**, il vient :

$35 \times (-0{,}010\,050) + 10 \times (-0{,}000\,500) < \ln(0{,}7)$ et $\ln(0{,}7) < 35 \times (-0{,}010\,050) + 9 \times (-0{,}000\,500)$ c'est-à-dire $-0{,}356\,75 < \ln(0{,}7) < -0{,}356\,25$.

d) Avec la calculatrice on obtient :

$$\ln(0{,}7) \approx -0{,}356\,674\,9.$$

3. Voici un programme possible.

```python
def Neper(x):
    if x<=0:
        print("x doit être strictement supérieur à 0")
    else:
        lnx=((x**x-1)/(2*x))
        return lnx
```

156 **1. a)** $\Delta = (-\mathrm{e}^2) - 4\mathrm{e} = \mathrm{e}(\mathrm{e}-4)$ donc $\Delta < 0$.

$a = 1$ et $1 > 0$ donc pour tout réel x, $x^2 - x\mathrm{e} + \mathrm{e} > 0$.

b) $\Delta = (-2\mathbf{e})^2 - 4 \times 2 \times 2(\mathrm{e}-1) = 4\mathrm{e}^2 - 16\mathrm{e} + 16$ c'est-à-dire $\Delta = (2\mathrm{e}-4)^2$.

Donc $\Delta > 0$ et $\sqrt{\Delta} = 2\mathrm{e} - 4$.

Donc P a deux racines α et β : $\alpha = \dfrac{2\mathrm{e}-(2\mathrm{e}-4)}{4} = 1$ et $\beta = \dfrac{2\mathrm{e}+(2\mathrm{e}-4)}{4} = \mathrm{e}-1$.

$P(x) > 0$ sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]\mathrm{e}-1\,;+\infty[$ et $P(x) < 0$ sur $]1\,;\mathrm{e}-1[$.

2. a) $f(0) = 0$; $f(1) = 1$; $f(\mathrm{e}-1) = 1$; $f(\mathbf{e}) = 0$.

$$f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) = 1 - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{2} + \mathrm{e}\right)$$

$$f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) = 1 - \ln\left(\mathrm{e}\left(-\frac{\mathrm{e}}{4}+1\right)\right)$$

$$f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) = 1 - \ln(\mathrm{e}) - \ln\left(-\frac{\mathrm{e}}{4}+1\right)$$

$$f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) = 1 - 1 - \ln\left(-\frac{\mathrm{e}}{4}+1\right)$$

$$f\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right) = -\ln\left(-\frac{\mathrm{e}}{4}+1\right)$$

• On pose $X = x^2 - x\mathrm{e} + \mathrm{e}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \ln(X) = -\infty$.

Donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

On obtient de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = -\frac{2x-\mathrm{e}}{x^2 - x\mathrm{e} - \mathrm{e}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x\mathrm{e} + \mathrm{e} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x + \mathrm{e}$.

Sur $\left]-\infty\,;\dfrac{\mathrm{e}}{2}\right]$, $f'(x) \geqslant 0$

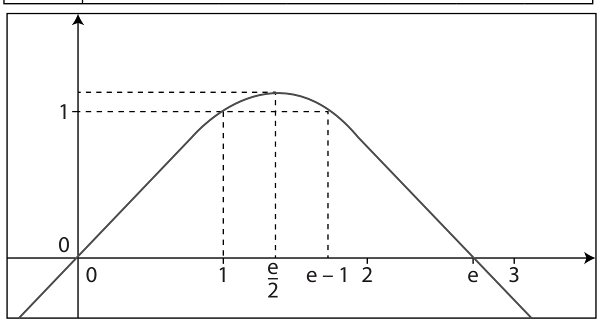
Sur $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}\,;+\infty\right[$, $f'(x) \leqslant 0$

$$f'(0) = \frac{2\times 0 - \mathrm{e}}{0^2 - 0\times\mathrm{e} - \mathrm{e}} = -\frac{-\mathrm{e}}{-\mathrm{e}} = -1$$

et $$f'(\mathrm{e}) = \frac{2\times\mathrm{e} - \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\times\mathrm{e} - \mathrm{e}} = -\frac{\mathrm{e}}{-\mathrm{e}} = 1.$$

c)

x	$-\infty$	0	1	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	$\mathrm{e}-1$	e	$+\infty$
$x-1$		$+$		0		$-$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$-\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}}{4}\right)$	↘ 1	↘ 0	↘ $-\infty$



157 Les coordonnées de A sont $(0\,;a)$.

Pour un point M d'abscisse $x(x > 0)$ de la courbe $\mathscr{C}$, $AM^2 = x^2 + (\ln(x) - a)^2$

On note γ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\gamma(x) = x^2 + (\ln(x) - a)^2$.

$$\gamma'(x) = 2x + 2\frac{\ln(x) - a}{x}$$

$\gamma'(x) = 2\dfrac{x^2 + \ln(x) - a}{x}$.

On note g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x) - a$.

$g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$, donc $g'(x) > 0$.

g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, d'autre part $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.

g étant continue sur $]0\,;+\infty[$, il existe un nombre réel $\alpha > 0$ unique tel que $g(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Ce nombre α est tel que $\alpha^2 + \ln(\alpha) - a = 0$.

Alors pour $x \in]0\,;\alpha]$, $g(x) \leqslant 0$ donc $\gamma'(x) \leqslant 0$ est γ est décroissante sur $]0\,;\alpha]$.
Pour $x \in [\alpha\,;+\infty[$, $g(x) \geqslant 0$ donc $\gamma'(x) \geqslant 0$ est γ est croissante sur $[\alpha\,;+\infty[$.
Donc γ admet un minimum en α sur $]0\,;+\infty[$.
Alors le minimum de la distance AM est obtenu pour le point M d'abscisse α.
Comme $-\alpha^2 + a = \ln(\alpha)$, ce point M est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

158 $\log\left(10^{10^{10^{10^{10}}}}\right) = 10^{10^{10^{10}}}$

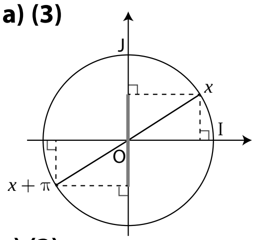
12 Fonctions sinus et cosinus

Questions-Tests

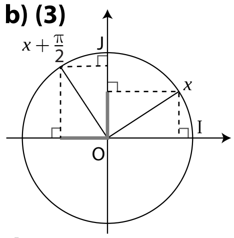
1 **a) (3)** En effet, $\dfrac{\pi}{180} \times 80 = \dfrac{4\pi}{9}$.

b) (2) En effet, $\dfrac{180}{\pi} \times \dfrac{2\pi}{3} = 120$.

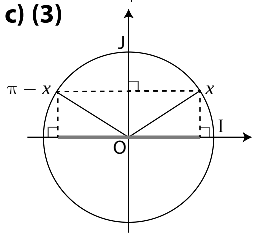
2 **a) (3)**



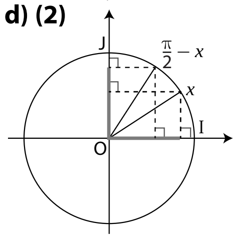
b) (3)



c) (3)



d) (2)



3 **(1)** En effet, pour tout réel x, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

4 **(2)** En effet,
$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5 **a) (2)** En effet, pour tout réel x, $f(-x) = -\sin(-x)$.
Ainsi, comme la fonction sinus est impaire,
$f(-x) = -(-\sin(x)) = \sin(x)$
c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$
b) (1) En effet, pour tout réel x, $g(-x) = -2\cos(-x)$.
Ainsi, comme la fonction cosinus est paire,
$g(-x) = -2 \times \cos(x)$ c'est-à-dire $g(-x) = g(x)$.

6 **a) (1)** En effet, la fonction sinus est périodique de période 2π. Ainsi, pour tout réel x, $\sin(x + 4\pi)$ $= \sin(x + 2\pi + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

b) (3) En effet, la fonction cosinus est périodique de période 2π. Ainsi, pour tout réel x,
$\cos(x + 3\pi) = \cos(x + \pi + 2\pi) = \cos(x + \pi)$.
De plus, pour tout réel x, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $\cos(x + 3\pi) = -\cos(x)$.

Découvrir

1 Variations des fonctions sinus et cosinus

1 **a)** La courbe représentative de la fonction f est de couleur bleue, la courbe représentative de la fonction g est de couleur verte.

b) Les deux courbes représentent les fonctions sinus (fonction f) et cosinus (fonction g).
Or, la fonction sinus est impaire donc, dans un repère, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine, ce qui est le cas de la courbe de couleur bleue.
La fonction cosinus est paire donc, dans un repère, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui est le cas de la courbe de couleur verte.

2 **a)** Sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$,
• la fonction f est croissante sur les intervalles $\left[-2\pi\,;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$;
• la fonction f est décroissante sur les intervalles $\left[-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.
b) Sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$,
• la fonction g est croissante sur les intervalles $[-\pi\,;0]$ et $[\pi\,;2\pi]$;

• la fonction g est décroissante sur les intervalles $[-2\pi ; -\pi]$ et $[0 ; \pi]$.

3 Dans cette question, on utilise le lien entre signe de la dérivée d'une fonction et sens de variation de la fonction.

a) • Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$.

Or, $\cos(x) \geqslant 0$ sur les intervalles $\left[-2\pi ; -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$, ce qui est en accord avec le fait que la fonction f soit croissante sur ces intervalles.

D'autre part, $\cos(x) \leqslant 0$ sur les intervalles $\left[-\frac{3\pi}{2} ; -\frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$, ce qui est en accord avec le fait que la fonction f soit décroissante sur ces intervalles.

• Pour tout réel x, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Or, $\sin(x) \leqslant 0$ sur les intervalles $[-\pi ; 0]$ et $[\pi ; 2\pi]$; ainsi $-\sin(x) \geqslant 0$ sur ces intervalles, ce qui est en accord avec le fait que la fonction g soit croissante sur ces intervalles.

D'autre part, $\sin(x) \geqslant 0$ sur les intervalles $[-2\pi ; -\pi]$ et $[0 ; \pi]$; ainsi $-\sin(x) \leqslant 0$ sur ces intervalles, ce qui est en accord avec le fait que la fonction g soit décroissante sur ces intervalles.

• Conclusion : toutes les réponses à la question **2.** sont en accord avec les définitions des dérivées des fonctions sinus et cosinus.

b) • Tableau de variations de la fonction sinus sur $[-\pi ; \pi]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

• Tableau de variations de la fonction cosinus sur $[-\pi ; \pi]$.

x	$-\pi$		0		π
$\cos'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$\cos(x)$	-1	↗	1	↘	-1

2 Étude de variations et recherche d'un optimum

1 Pour tout réel x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$S(x) = OP \times OQ = \cos(x)\sin(x).$$

2 **a)** Pour tout réel x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$.

Alors, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.

Donc, pour tout réel x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

$S'(x) = -\sin(x) \times \sin(x) + \cos(x) \times \cos(x)$

$S'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$.

b) Pour tout réel x, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Ainsi, $S'(x) = -(1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x)$

$S'(x) = -1 + \cos^2(x) + \cos^2(x)$

soit $S'(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

c) D'après l'écran de calcul formel,

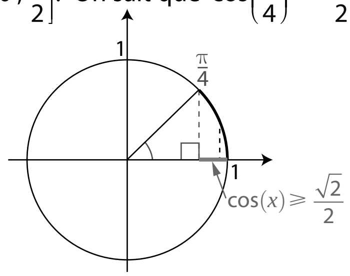
$$S'(x) = (\sqrt{2}\cos(x) - 1)(\sqrt{2}\cos(x) + 1).$$

Or, pour tout réel x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

Donc, $\sqrt{2}\cos(x) + 1$ est un nombre réel positif.

Ainsi, $S'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}\cos(x) - 1$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

d) On s'aide du cercle trigonométrique pour résoudre l'inéquation $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Les solutions de l'inéquation sont les réels x tels que $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$. L'ensemble des solutions est $S = \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$.

3. D'après la question **2. c)**, $S'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}\cos(x) - 1$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Or, $\sqrt{2}\cos(x) - 1 \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a résolu cette inéquation dans la question **2. d)**.

On peut donc dresser le tableau de variations de la fonction S sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		↗		↘	

L'aire $S(x)$ est maximum pour $x = \frac{\pi}{4}$. Le point M est le point du cercle trigonométrique tel que $\widehat{POM} = \frac{\pi}{4}$ rad.

Dans ce cas, $\sin(x) = \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, le rectangle OPMQ est un carré.

Savoir-faire

3 **a)** La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose :
$u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \sin(x) - 1$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x,
$$f'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) - 1) + \sin(x) \times \cos(x).$$
b) On factorise : $f'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) - 1 + \sin(x)$
Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = \cos(x) \times (2\sin(x) - 1)$.

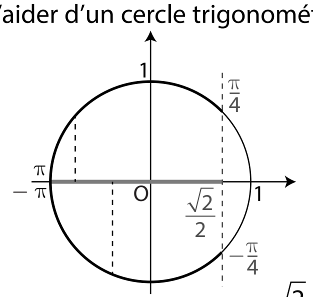
4 **a)** La fonction g est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \sin(x)$.
Alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x, $g'(x) = 1 + \cos(x)$.
b) La fonction h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \sin(x)$.
Alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x, $h'(x) = 1 \times \sin(x) + x \times \cos(x)$
$$h'(x) = \sin(x) + x\cos(x).$$

5 **a)** Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$,
$p(x) = 2(\text{MP} + \text{PQ}) = 2(\sin(x) + \sin(x) + 1)$
$p(x) = 2(2\sin(x) + 1)$.
Ainsi, $p(x) = 4\sin(x) + 2$.
b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\pi]$.
Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $p'(x) = 4\cos(x)$.
c) 4 est positif, donc $p'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.
Or, pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \geqslant 0$ et pour tout réel x de $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\cos(x) \leqslant 0$.
Donc, pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $p'(x) \geqslant 0$ et pour tout réel x de $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $p'(x) \leqslant 0$.
d) La fonction p est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

8 **a)** La fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \cos(x)$.
Alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\sin(x)$.
Donc, pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \sin(x)$.
b) La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = x$ et $v(x) = \cos(x)$.
Alors, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\sin(x)$.
Pour tout réel x, $g'(x) = 1 \times \cos(x) + x \times (-\sin(x))$
$$g'(x) = \cos(x) - x\sin(x).$$

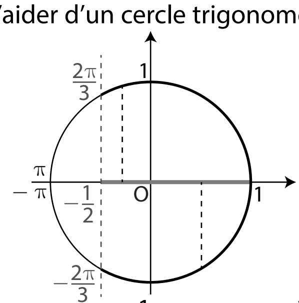
9 **a)** La fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.
Donc, pour tout réel x, $f'(x) = \cos(x) - \sin(x)$.
b) La fonction g est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.
Donc, pour tout réel x, $g'(x) = \cos(x) - (-\sin(x))$
$$g'(x) = \cos(x) + \sin(x).$$

10 **a)** Dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right\}$.
b) On peut s'aider d'un cercle trigonométrique.



Dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$.
L'ensemble des solutions est $S = \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}\,;\pi\right]$.

11 **a)** Dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ équivaut à $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left[-\frac{2\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$.
b) On peut s'aider d'un cercle trigonométrique.



Dans $[-\pi\,;\pi]$, $\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$ équivaut à $-\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left[-\frac{2\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$.

13 **a)** On note f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \cos(x) - \frac{x}{2}$.

f est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$f'(x) = -\sin(x) - \frac{1}{2}.$$

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) < 0$.

De plus $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur I et $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire l'équation $\cos(x) = \frac{x}{2}$, admet une seule solution α dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Voici le programme en langage Python.

```python
from math import*

def Balayage(p):
    a=0
    while cos(a)>a/2:
        a=a+p
    return a-p,a
```

Voici l'affichage obtenu avec le programme.

```
>>> Balayage(0.0001)
(1.0297999999999903, 1.0298999999999903)
```

La solution α de l'équation $\cos(x) = \frac{x}{2}$ dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est telle que $1{,}029\,8 < \alpha < 1{,}029\,9$.

14 **a)** On note f la fonction définie sur $\mathrm{I} = \left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$ par :

$$f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}.$$

f est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}.$$

Sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$, $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ donc $f'(x) \leqslant 0$.

De plus, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ (soit $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}34$)

et $f(\pi) = -\frac{\pi}{2}$.

La fonction f est continue et décroissante sur I et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f(\pi) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire l'équation $\sin(x) = \frac{x}{2}$ admet une seule solution β dans $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$.

b) Voici le programme en langage Python.

```python
from math import*

def Balayage(p):
    a=pi/3
    while sin(a)>a/2:
        a=a+p
    return a-p,a
```

• Voici l'affichage obtenu avec le programme pour $p = 0{,}000\,1$.

```
>>> Balayage(0.0001)
(1.8953975511965042, 1.8954975511965042)
```

La solution β de l'équation $\sin(x) = \frac{x}{2}$ dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$ est telle que $1{,}895\,4 < \beta < 1{,}895\,5$.

• Voici l'affichage obtenu avec le programme pour $p = 10^{-6}$.

```
>>> Balayage(0.000001)
(1.8954935511268112, 1.895494551126811)
```

La solution β de l'équation $\sin(x) = \frac{x}{2}$ dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$ est telle que $1{,}895\,494 < \beta < 1{,}895\,495$.

Acquérir des automatismes

15 **(2)** En effet, pour tout réel x, $f(-x) = -2\sin(-x)$.
Or, la fonction sinus est impaire,
donc $f(-x) = -2 \times (-\sin(x)) = 2\sin(x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$, donc la fonction f est impaire.

16 La fonction sinus est impaire, donc sa courbe représentative dans un repère est symétrique par rapport à l'origine du repère. Ainsi, par symétrie par rapport au point O, on obtient la partie de la courbe sur $[0\,;\pi]$.
La fonction sinus est périodique de période 2π, donc on trace l'image de la partie donnée de la courbe (sur $[-\pi\,;0]$) par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ pour obtenir la partie de la courbe sur $[\pi\,;2\pi]$.

17 La fonction sinus est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$.

18 La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $g'(x) = \sin'(2x)$ soit $g'(x) = 2\cos(2x)$.

19 $f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3}{2} \times \left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3}{2} \times x + \frac{3}{2} \times \frac{4\pi}{3}\right)$.

Ainsi, pour tout réel x, $f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}x + 2\pi\right)$.

Or, la fonction sinus est périodique de période 2π, donc $\sin\left(\frac{3}{2}x + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right)$.

Ainsi, pour tout réel x, $f\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = f(x)$, donc la fonction f est périodique de période $\frac{4\pi}{3}$.

20 **1. a)** La courbe semble symétrique par rapport à l'origine du repère, donc la fonction g semble impaire.

b) $g(-x) = -2\sin(-2x)$. Or, la fonction sinus est impaire, donc $-2\sin(-2x) = -2 \times (-\sin(2x)) = 2\sin(2x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $g(-x) = -g(x)$, donc la fonction g est impaire.

2. $g(x + \pi) = -2\sin(2 \times (x + \pi))$

$g(x + \pi) = -2\sin(2x + 2\pi)$

Or, la fonction sinus est périodique de période 2π, donc $-2\sin(2x + 2\pi) = -2\sin(2x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $g(x + \pi) = g(x)$, donc la fonction g est périodique de période π.

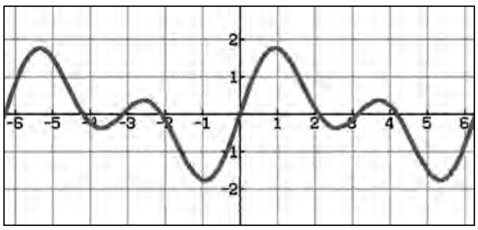
21 **a)** Pour tout réel x,

$$h(-x) = \sin(-x) + \sin(-2x).$$

Or, la fonction sinus est impaire, donc
$h(-x) = -\sin(x) - \sin(2x) = -(\sin(x) + \sin(2x))$.
Ainsi, pour tout réel x, $h(-x) = -h(x)$, donc la fonction h est impaire.

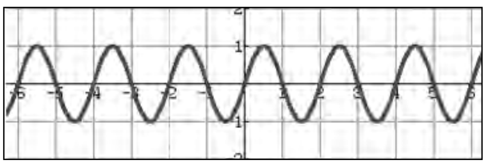
b) Dans un repère, la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

c) Voici la courbe $\mathscr{C}$ à l'écran de la calculatrice.



L'origine du repère est bien centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

22 **a)** Voici la courbe à l'écran de la calculatrice.



b) Il semble que la courbe puisse être tracée à l'aide d'une translation de vecteur $2\vec{i}$. On peut conjecturer que la fonction k est périodique de période 2.

c) Pour tout réel x,

$$k(x + 2) = \sin(\pi \times (x + 2)) = \sin(\pi x + 2\pi).$$

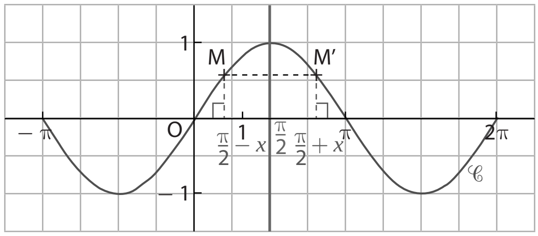
Or, la fonction sinus est périodique de période 2π, donc $\sin(\pi x + 2\pi) = \sin(\pi x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $k(x + 2) = k(x)$, donc la fonction k est bien périodique de période 2.

23 **a)** Ordonnée de M : $y_M = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Ordonnée de M′ : $y_{M'} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Ainsi, pour tout réel x, les points M et M′ ont la même ordonnée.

b) La droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

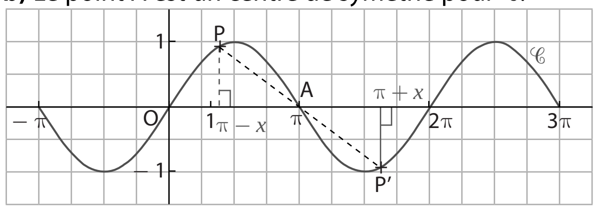


24 **a)** Ordonnée de P : $y_P = \sin(\pi - x) = \sin(x)$
Ordonnée de P′ : $y_{P'} = \sin(\pi + x) = -\sin(x)$
On calcule les coordonnées du milieu du segment [PP′].
Pour tout réel x, $\left(\dfrac{x_P + x_{P'}}{2} ; \dfrac{y_P + y_{P'}}{2}\right)$

$= \left(\dfrac{\pi - x + \pi + x}{2} ; \dfrac{\sin(x) - \sin(x)}{2}\right) = (\pi ; 0)$.

Ainsi, le point A(π ; 0) est le milieu du segment [PP′].

b) Le point A est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$.



25 **a)** La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x, $f'(x) = 3 \times \cos(x) \times \sin^2(x)$
$f'(x) = 3\cos(x)\sin^2(x)$.

b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x) - 2$
et $v(x) = \sin(x) + 1$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$
Donc, pour tout réel x,
$g'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) + 1) + (\sin(x) - 2) \times \cos(x)$
$g'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) + 1 + \sin(x) - 2)$
$g'(x) = \cos(x) \times (2\sin(x) - 1)$
soit $g'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x)$
Remarque : on peut aussi commencer par développer $g(x)$ puis déterminer sa dérivée.
$g(x) = \sin^2(x) - \sin(x) - 2$
et $g'(x) = 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x)$

26 **a)** La fonction g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur I.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = x$.

Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = 1$.
Donc, pour tout réel x de I,

$$g'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.$$

b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est dérivable sur I.
Pour tout réel x de I, on pose $v(x) = \sin(x)$.
Alors, $v'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x de I, $h'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

27 **1.** La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = (\sin^2(x))' + (2\sin(x))'$
Pour déterminer $(\sin^2(x))'$, on pose, pour tout réel x, $u(x) = \sin(x)$; alors, $u'(x) = \cos(x)$.
Ainsi, $(\sin^2(x))' = 2\sin(x)\cos(x)$.
Donc $f'(x) = 2 \times \sin(x) \times \cos(x) + 2\cos(x)$.
En factorisant, on obtient :
$f'(x) = 2\cos(x) \times (\sin(x) + 1)$
soit $f'(x) = 2(\sin(x) + 1)\cos(x)$.
2. a) Pour tout réel x de $[0 ; \pi]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
Ainsi, $1 \leqslant \sin(x) + 1 \leqslant 2$. Le produit $2(\sin(x) + 1)$ est un nombre positif, donc $f'(x)$ est du signe du troisième facteur $\cos(x)$.
Or, $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.
Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.
b) Voici le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 = 0$
$f(\pi) = 0^2 + 2 \times 0 = 0$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^2 + 2 \times 1 = 3$

28 **a)** La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur I.
Pour tout réel x de I, $f'(x) = 2\cos(x)$.
2 est un nombre positif, donc $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$.
Or, $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.
Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.
b) La fonction f est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2 + 2\cos(x) = 2(1 + \cos(x))$.
Or, pout tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $1 + \cos(x) \geqslant 0$.
Ainsi, pout tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$.

29 **a)** La fonction f est la différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = \cos(x) - 1$.
Or, pout tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$,
donc $\cos(x) - 1 \leqslant 0$.
Ainsi, pout tout réel x, $f'(x) \leqslant 0$.
b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$.
Ainsi, pour tout réel x de I, $f'(x) = 2\cos(x)\sin(x)$.
Or, $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0 ; \pi]$, donc $2\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0 ; \pi]$.
Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $\cos(x)$ sur $[0 ; \pi]$.
Or, $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.
Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

30 **a)** La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur I.
Pour tout réel x de I, on pose $v(x) = 1 + \sin(x)$.
Alors, $v'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x de I, $f'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{(1 + \sin(x))^2}$.
Pour tout réel x, $(1 + \sin(x))^2 \geqslant 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $-\cos(x)$.
Or $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.
Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.
b) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur I.
Pour tout réel x de I, on pose $u(x) = \sin(x) + 2$ et $v(x) = \sin(x)$. Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x de I,
$f'(x) = \cos(x) \times \sin(x) + (\sin(x) + 2) \times \cos(x)$
En factorisant, on obtient :
$f'(x) = \cos(x) \times (\sin(x) + \sin(x) + 2)$
$f'(x) = \cos(x)(2\sin(x) + 2)$ soit, pour tout réel x de I, $f'(x) = 2\cos(x)(\sin(x) + 1)$.
Or, $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ (et aussi $2\cos(x) \geqslant 0$).
Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $\sin(x) + 1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$.
Or, pour tout réel x de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $\sin(x) + 1 \geqslant 0$.
Donc, pout tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.

31 **a)** La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;2\pi]$.
Pour tout réel x de $[0\,;2\pi]$, on pose $u(x) = 2 - \sin(x)$ et $v(x) = \sin(x)$. Alors, $u'(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.
Donc, pour tout réel x de $[0\,;2\pi]$,
$h'(x) = -\cos(x) \times \sin(x) + (2 - \sin(x)) \times \cos(x)$.
En factorisant, on obtient :
$h'(x) = \cos(x) \times (-\sin(x) + 2 - \sin(x))$
$h'(x) = \cos(x)(2 - 2\sin(x))$.
Ainsi, pour tout réel x de $[0\,;2\pi]$,
$h'(x) = 2\cos(x)(1 - \sin(x))$.
b) Pour tout réel x de $[0\,;2\pi]$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $1 - \sin(x) \geqslant 0$.
Le produit $2(1 - \sin(x))$ est un nombre positif, donc $h'(x)$ a le même signe que le troisième facteur $\cos(x)$.
c) On sait que $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ et que $\cos(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$.
Ainsi, $h'(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ et $h'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$.
Voici le tableau de variations de h sur $[0\,;2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

$h(0) = (2 - 0) \times 0 = 0$
$h(2\pi) = (2 - 0) \times 0 = 0$
$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2-1) \times 1 = 1$
$h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (2+1) \times (-1) = -3$

32 Une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé est $y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$.
Ici, on recherche une équation de la forme :
$$y = \cos(a)\,(x - a) + \sin(a)$$
a) $y = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
soit $y = 0 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$
Ainsi, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est $y = 1$.
b) $y = \cos(\pi)\,(x - \pi) + \sin(\pi)$
soit $y = -1 \times (x - \pi) + 0$
Ainsi, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse π est $y = -x + \pi$.
c) $y = \cos(2\pi)\,(x - 2\pi) + \sin(2\pi)$
soit $y = 1 \times (x - 2\pi) + 0$
Ainsi, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2π est $y = x - 2\pi$.

33 Pour tout réel x, $f(-x) = -2\cos(-x) + 1$.
Or, la fonction cosinus est paire,
donc $f(-x) = -2\cos(x) + 1$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$,
donc la fonction f est paire.

34 La fonction cosinus est paire, donc sa courbe représentative dans un repère est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on obtient la partie de la courbe sur $[-\pi\,;0]$.
La fonction cosinus est périodique de période 2π, donc on trace l'image de la partie de la courbe obtenue précédemment, sur $[-\pi\,;0]$, par la translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ pour obtenir la partie de la courbe sur $[\pi\,;2\pi]$.

35 La fonction cosinus est aussi décroissante sur $\left[-\frac{3\pi}{2}\,;-\pi\right]$.

36 $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$ équivaut à $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$.
Ainsi, $-\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$. Alors, $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

37 $f(x + 2) = \cos(\pi\,(x + 2) + 3) = \cos(\pi x + 2\pi + 3)$.
Or, la fonction cosinus est périodique de période 2π, donc $f(x + 2) = \cos(\pi x + 3)$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(x + 2) = f(x)$, donc la fonction f est périodique de période 2.

38 Juliette a raison.
En effet, $g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(4x + 2\pi)$
Or, la fonction cosinus est périodique de période 2π, donc $g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(4x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = g(x)$, donc la fonction f est bien périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

39 **a)** • $f(-x) = \cos(-2x) + \cos(-3x)$
Or, la fonction cosinus est paire,
donc $f(-x) = \cos(2x) + \cos(3x)$
• $f(x + 2\pi) = \cos(2(x + 2\pi) + \cos(3(x + 2\pi))$
$f(x + 2\pi) = \cos(2x + 4\pi) + \cos(3x + 6\pi)$
Or, la fonction cosinus est périodique de période 2π, donc $f(x + 2\pi) = \cos(2x) + \cos(3x)$.

b) Pour tout réel x,

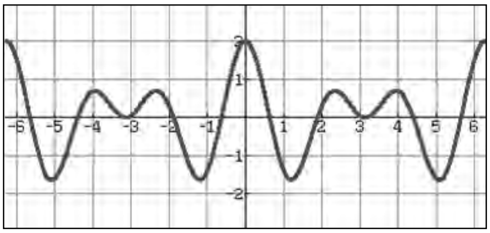
• $f(-x) = f(x)$ donc la fonction f est paire.

• $f(x + 2\pi) = f(x)$ donc la fonction f est périodique de période 2π.

c) La fonction f est paire, donc sa courbe représentative dans un repère est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Comme la fonction f est périodique de période 2π, on peut utiliser une translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ pour tracer la courbe à partir d'une partie.

Voici la courbe représentative de la fonction f à l'écran de la calculatrice.



On peut vérifier les réponses à la question **c)**. En effet, sur cet écran, on remarque que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe, et que la partie de la courbe sur $[0\,;2\pi]$ est l'image par une translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ de la partie de la courbe sur $[-2\pi\,;0]$.

40 **a)** Ordonnée de M : $y_M = \cos(x)$

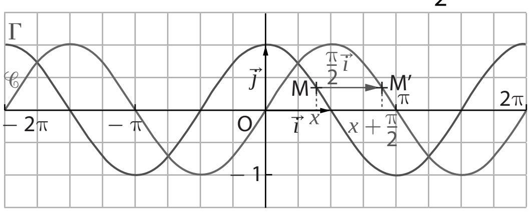
Ordonnée de M′ : $y_{M'} = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

Ainsi, pour tout réel x, les points M et M′ ont la même ordonnée.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}\left(x + \dfrac{\pi}{2} - x\,;0\right)$

soit $\overrightarrow{MM'}\left(\dfrac{\pi}{2}\,;0\right)$.

b) Ainsi, $\overrightarrow{MM'} = \dfrac{\pi}{2}\vec{i}$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction sinus est l'image de la courbe Γ de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\dfrac{\pi}{2}\vec{i}$.



41 **a)** La fonction f est la différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 2 - (-\sin(x)) = 2 + \sin(x)$.

b) La fonction g est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \cos(x)$.

Alors, $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

Donc, pour tout réel x,

$g'(x) = 2x \times \cos(x) + x^2 \times (-\sin(x))$

$g'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$.

c) La fonction h est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \cos(x) - 1$ et $v(x) = \sin(x)$.

Alors, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.

Donc, pour tout réel x,

$h'(x) = -\sin(x) \times \sin(x) + (\cos(x) - 1) \times \cos(x)$

$h'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x) - \cos(x)$.

d) La fonction k est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour déterminer la dérivée de $\cos^2(x)$, on pose $u(x) = \cos(x)$. Alors, $u'(x) = -\sin(x)$.

Donc, pour tout réel x,

$k'(x) = 1 + 2 \times \cos(x) \times (-\sin(x))$

$k'(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$.

42 La fonction g est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.

Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

Donc, pour tout réel x,

$g'(x) = \cos(x) \times \cos(x) + \sin(x) \times (-\sin(x))$

$g'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Or, pour tout réel x, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Ainsi, $g'(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.

43 **a)** La fonction g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur I.

Pour tout réel x de I, on pose $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = x$.

Alors, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = 1$.

Donc, pour tout réel x de I,

$$g'(x) = \frac{-\sin(x) \times x - \cos(x) \times 1}{x^2}.$$

$$g'(x) = \frac{-x\sin(x) - \cos(x)}{x^2}.$$

b) La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est dérivable sur I.

Pour tout réel x de I, on pose $v(x) = \cos(x)$.

Alors, $v'(x) = -\sin(x)$.

Donc, pour tout réel x de I, $h'(x) = -\dfrac{-\sin(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$.

44 **1.** La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;2\pi]$.

Pour tout réel x, $f'(x) = (\cos^2(x))' - (2\cos(x))'$

$f'(x) = 2 \times \cos(x) \times (-\sin(x)) - 2 \times (-\sin(x))$

$f'(x) = -2\cos(x)\sin(x) + 2\sin(x)$

En factorisant, on obtient :

$f'(x) = -2\sin(x) \times (\cos(x) - 1)$, ce qui est bien le résultat affiché.

2. a) Pour tout réel x de $[0\,;2\pi]$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $\cos(x) - 1 \leqslant 0$. Le produit $-2(\cos(x) - 1)$ est donc positif et $f'(x)$ est du signe du troisième facteur $\sin(x)$.

Or, $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$ et $\sin(x) \leqslant 0$ sur $[\pi\,;2\pi]$.

Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\pi\,;2\pi]$.

b) Voici le tableau de variations de f sur $[0\,;2\pi]$.

x	0		π		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$f(0) = 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0$

$f(2\pi) = 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 0$

$f(\pi) = (-1)^2 - 2 \times (-1) + 1 = 4$

45 **a)** La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur I.

Pour tout réel x, $f'(x) = -\sin(x)$.

Or, $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$ et $\sin(x) \leqslant 0$ sur $[\pi\,;2\pi]$.

Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\pi\,;2\pi]$.

b) La fonction f est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 2 - 2\sin(x) = 2(1 - \sin(x))$.

2 est un nombre positif et pour tout réel x,

$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $1 - \sin(x) \geqslant 0$.

Ainsi, pout tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$.

46 **a)** La fonction f est la différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = -\sin(x) - 1$.

Or, pout tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$,

donc $-\sin(x) - 1 \leqslant 0$.

Ainsi, pout tout réel x, $f'(x) \leqslant 0$.

b) La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur I.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3 \times 2 \times \cos(x) \times (-\sin(x))$ soit $f'(x) = -6\cos(x)\sin(x)$.

-6 est un nombre négatif et $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$, donc sur $[0\,;\pi]$, $f'(x)$ est du signe contraire au troisième facteur $\cos(x)$.

Or, $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

47 Les fonctions f et g sont dérivables comme quotient de deux fonctions dérivables.

• Pour déterminer $f'(x)$, on pose, pour tout réel x, $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.

Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

Donc, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

Or, pour tout réel x, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

donc $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

• Pour déterminer $g'(x)$, on pose, pour tout réel x, $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$.

Alors, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.

Donc, pour tout réel x de $]0\,;\pi[$,

$$g'(x) = \frac{-\sin(x) \times \sin(x) - \cos(x) \times \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$g'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

Or, pour tout réel x, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$,

donc $g'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)}$.

• Conclusion : l'affirmation de Dana est fausse ; elle s'est trompée en déterminant $g'(x)$.

48 **a)** La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\pi]$.

Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, on pose $u(x) = -\cos(x)$ et $v(x) = 3 + \cos(x)$.

Alors, $u'(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

Donc, pour tout réel x de $[0\,;\pi]$,

$f'(x) = \sin(x) \times (3 + \cos(x)) + (-\cos(x)) \times (-\sin(x))$

$f'(x) = \sin(x) \times (3 + \cos(x)) + \cos(x) \times \sin(x)$

En factorisant, on obtient :

$f'(x) = \sin(x) \times (3 + \cos(x) + \cos(x))$

$f'(x) = \sin(x)(3 + 2\cos(x))$

b) Sur $[0\,;\pi]$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$,

donc $1 \leqslant 3 + 2\cos(x) \leqslant 5$.

c) Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$,

$f'(x) = \sin(x)\,(3 + 2\cos(x))$.

Or, $3 + 2\cos(x)$ est un nombre positif (d'après la question **b)**), donc $f'(x)$ est du signe de $\sin(x)$ sur $[0\,;\pi]$.

Or, $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$, donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$.

d) Voici le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$.

x	0		π
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-4	$\nearrow$	2

$f(0) = -1 \times (3 + 1) = -4$

$f(\pi) = -(-1) \times (3 + (-1)) = 2$

49 **a)** La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est dérivable sur $[-\pi\,;\pi]$.
Pour tout réel x de $[-\pi\,;\pi]$, on pose $v(x) = \cos(x) + 2$.
Alors, $v'(x) = -\sin(x)$.
Donc, pour tout réel x de $[-\pi\,;\pi]$,

$$g'(x) = -\frac{-\sin(x)}{(\cos(x)+2)^2} = \frac{\sin(x)}{(\cos(x)+2)^2}$$

b) Pour tout réel x, $(\cos(x)+2)^2 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $\sin(x)$ sur $[-\pi\,;\pi]$.
Or, $\sin(x) \leqslant 0$ sur $[-\pi\,;0]$ et $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$, donc $g'(x) \leqslant 0$ sur $[-\pi\,;0]$ et $g'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$.
c) Voici le tableau de variations de g sur $[-\pi\,;\pi]$.

x	$-\pi$		0		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1

$$g(-\pi) = \frac{1}{-1+2} = 1$$
$$g(\pi) = \frac{1}{-1+2} = 1$$
$$g(0) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

50 Une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé est $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$.
Ici, on recherche une équation de la forme :

$$y = -\sin(a)\,(x-a) + \cos(a).$$

a) $y = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

soit $y = -(-1)\times\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 0.$

Ainsi, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est $y = x + \frac{\pi}{2}$.
b) $y = -\sin(0)\,(x-0) + \cos(0)$ soit $y = 0 \times x + 1$
Ainsi, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 1$.
c) $y = -\sin(\pi)\,(x-\pi) + \cos(\pi)$
soit $y = 0 \times (x-\pi) + (-1)$
Ainsi, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse π est $y =$ - 1.

51 Une équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé est $y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$.
Ici, $a = \frac{\pi}{2}$ donc $y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

• $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{0}{2-0} = 0$

• On détermine $f'(x)$ pour tout réel x.
On pose $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = 2 - \cos(x)$.
Alors, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = \sin(x)$.
Donc, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)\times(2-\cos(x)) - \cos(x)\times\sin(x)}{(2-\cos(x))^2}.$$
$$f'(x) = \frac{-2\sin(x) + \sin(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(x)}{(2-\cos(x))^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2\sin(x)}{(2-\cos(x))^2}$$

Ainsi, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(2-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} = \dfrac{-2\times1}{(2-0)^2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

• Conclusion : l'équation cherchée est

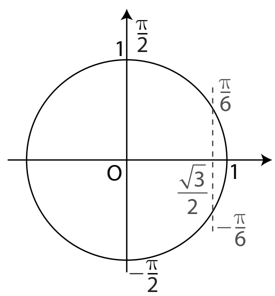
$$y = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + 0$$

soit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$.

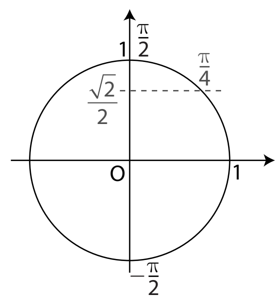
52 **a)** $\cos(\pi) = -1$ **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ **d)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
e) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

53 **a)** $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\sin(\pi) = 0$
e) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

54 **a)** Les solutions de l'équation sont $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$.

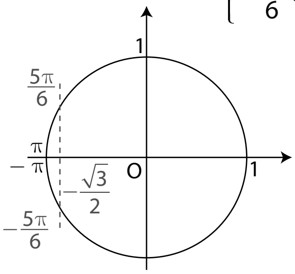


b) La solution de l'équation est $\frac{\pi}{4}$.



55 **a)** Les solutions de l'équation sont $-\pi$ et π.
L'ensemble des solutions est $S = \{-\pi\,;\pi\}$.
b) Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc l'équation n'a pas de solution.
L'ensemble des solutions est $S = \phi$.
c) Les solutions de l'équation sont $-\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

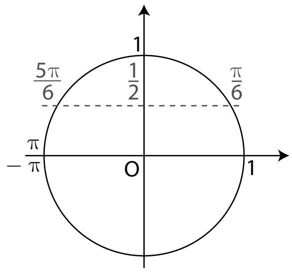


56 **a)** La solution de l'équation est $-\dfrac{\pi}{2}$.

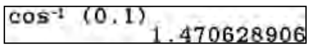
L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

b) Les solutions de l'équation sont $-\pi$, 0 et π.
L'ensemble des solutions est $S = \{-\pi ; 0 ; \pi\}$.

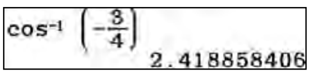
c) Les solutions de l'équation sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.



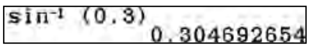
57 **a)** $x \approx 1{,}5$



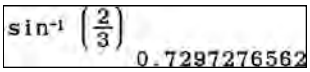
b) $x \approx 2{,}4$



58 **a)** $x \approx 0{,}3$

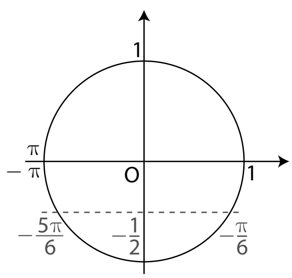


b) $x \approx 0{,}7$

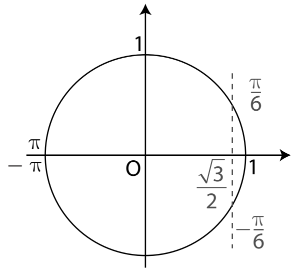


Remarque : la touche $\sin^{-1}$ (ou asin) renvoie le nombre x de $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = a$. Dans cet exercice, la valeur affichée est un nombre de $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
Chaque équation a néanmoins une autre solution dans $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$. Si α est la solution de l'équation $\sin(x) = a$ dans $\left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right]$, la solution dans $\left[\dfrac{\pi}{2} ; \pi\right]$ est $\pi - \alpha$.
a) Dans $[0 ; \pi]$, l'équation $\sin(x) = 0{,}3$ a deux solutions dont les arrondis au dixième sont 0,3 et 2,8.
b) Dans $[0 ; \pi]$, l'équation $\sin(x) = \dfrac{2}{3}$ a deux solutions dont les arrondis au dixième sont 0,7 et 2,4.

59 **a)** Pour tout réel x de $[-\pi ; \pi]$, $1 + 2\sin(x) = 0$ équivaut à $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$.
Les solutions dans $[-\pi ; \pi]$ sont $-\dfrac{5\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{5\pi}{6} ; -\dfrac{\pi}{6}\right\}$.



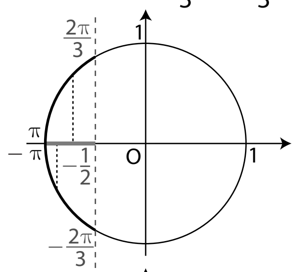
b) Pour tout réel x de $[-\pi ; \pi]$, $2\cos(x) - \sqrt{3} = 0$ équivaut à $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Les solutions dans $[-\pi ; \pi]$ sont $-\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{\pi}{6}\right\}$.



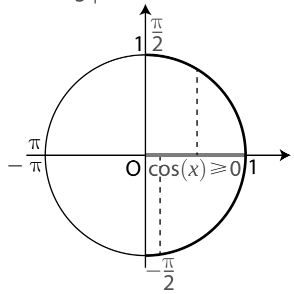
60 Pour tout réel x de $[-\pi ; \pi]$, $\sin(x)\cos(x) = 0$ équivaut à $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = 0$.
Les solutions dans $[-\pi ; \pi]$ de l'équation $\sin(x) = 0$ sont $-\pi$, 0 et π.
Les solutions dans $[-\pi ; \pi]$ de l'équation $\cos(x) = 0$ sont $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
Donc, dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, l'ensemble des solutions de l'équation $\sin(x)\cos(x) = 0$ est :

$$S = \left\{-\pi ; -\frac{\pi}{2} ; 0 ; \frac{\pi}{2} ; \pi\right\}.$$

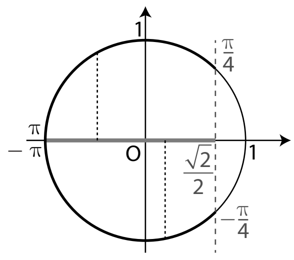
61 **a)** Les solutions de l'équation sont $-\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.
b) L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[-\pi ; -\dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3} ; \pi\right]$.
On peut s'aider d'un cercle trigonométrique.



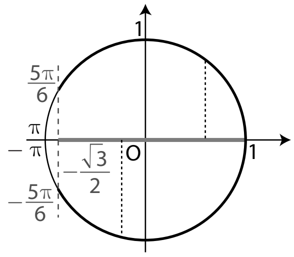
62 **a)** L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$.



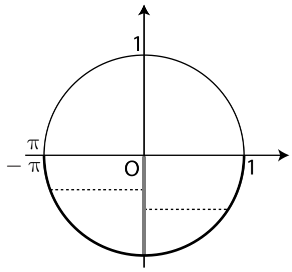
b) L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[-\pi ; -\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4} ; \pi\right]$.



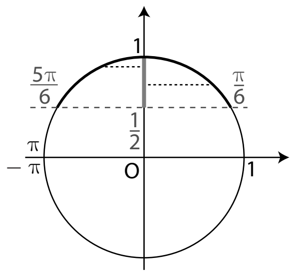
c) L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left]-\dfrac{5\pi}{6} ; \dfrac{5\pi}{6}\right[$.



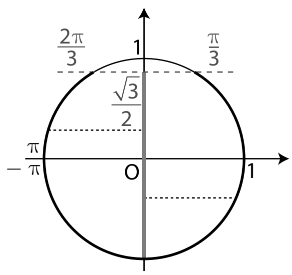
63 **a)** L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [-\pi\,;0]$.



b) L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right[$.



c) L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left[-\pi\,;\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$.



Pour se tester

64 **1.** D **2.** C **3.** B **4.** C

65 **1.** A B C **2.** B C **3.** C D **4.** B C

66 **1.** Vrai. En effet, f est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-\pi\,;\pi]$.

Pour tout réel x de $[-\pi\,;\pi]$,

$$f'(x) = \sin'(x) - \frac{1}{2} = \cos(x) - \frac{1}{2}.$$

2. Faux. En effet, $f(0) = 0$ et $f(\pi) = -\frac{\pi}{2}$. Or, $-\frac{\pi}{2} < 0$ donc la fonction f ne peut pas être croissante sur $[0\,;\pi]$.

Remarque : d'autres justifications sont possibles, comme la détermination du signe de $f'(x)$.

3. Vrai. En effet, dans un repère orthonormé, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est :

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ainsi, $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 - \frac{\pi}{4}$

soit $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

4. Vrai. En effet, on étudie le signe de $f'(x)$ pour déterminer le sens de variation de la fonction f.

Dans $]0\,;\pi]$, $\cos(x) - \frac{1}{2} \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $0 < x \leqslant \frac{\pi}{3}$ et $\cos(x) - \frac{1}{2} \leqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi$.

Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $\left]0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

On peut dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

$f(0) = 0$; $f(\pi) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$;

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \quad \left(f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 0{,}3\right).$$

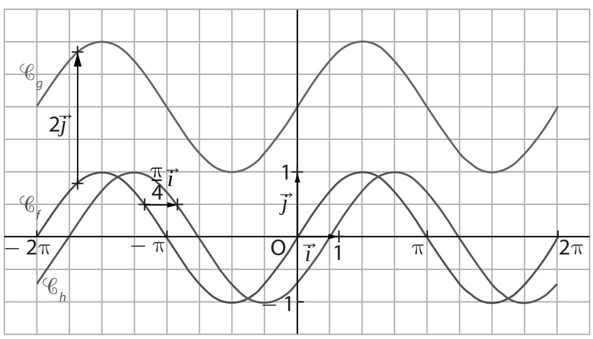
Ainsi, $f(x) > 0$ pour tout réel x de $\left]0\,;\frac{\pi}{3}\right]$, donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\left]0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

Sur $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$, la fonction f est continue et strictement décroissante et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f(\pi) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\pi]$.

S'entraîner

67 **1. (1)** M est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et M′ est le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x, donc $\mathrm{M}(x\,;\sin(x))$ et $\mathrm{M'}(x\,;a+\sin(x))$.
(2) Alors $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}(0\,;a)$.
(3) Donc le point M′ est l'image du point M par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
(4) La courbe $\mathscr{C}_g$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$ (avec $a \in \mathbb{R}$).
2. On reprend le guide de la question **1.**.
M est le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x et M′ est le point de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse $x-b$, donc $\mathrm{M}(x\,;\sin(x))$ et
$\mathrm{M'}(x-b\,;\sin(x-b+b))$ soit $\mathrm{M'}(x-b\,;\sin(x))$
Alors $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}(-b\,;0)$.
Donc le point M′ est l'image du point M par la translation de vecteur $-b\vec{i}$.
Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_h$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-b\vec{i}$ (avec $b \in \mathbb{R}$).
3. • On complète le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ par symétrie centrale par rapport aux points de coordonnées $(-\pi\,;0)$ et $(\pi\,;0)$ (cf exercice 24 page 357).
• Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_g$, on utilise la question **1.** avec $a=2$. Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_g$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $2\vec{j}$.
• Pour tracer la courbe $\mathscr{C}_g$, on utilise la question **2.** avec $b=-\dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_h$ est l'image de la courbe $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\dfrac{\pi}{4}\vec{i}$.



68 **(1)** Dans ce repère orthonormé, une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est :
$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$
Pour tout réel x, $f'(x) = -\sin(x)$.
Or, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.
Ainsi, $y=-1\times\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ soit $y=-x+\dfrac{\pi}{2}$.
Une équation de la tangente T est donc $y=-x+\dfrac{\pi}{2}$.
(2) $g(x)=f(x)-\left(-x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ soit $g(x)=\cos(x)+x-\dfrac{\pi}{2}$.
Pour tout réel x, $g'(x)=-\sin(x)+1$.
Or, pour tout réel x, $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$ donc $-\sin(x)+1\geqslant 0$.
Ainsi, pour tout réel x, $g'(x)\geqslant 0$; la fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
On peut dresser le tableau de variations et de signes de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	↗	0	↗
signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

En effet, $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ donc, si $x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $g(x)\leqslant 0$ et si $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$, $g(x)\geqslant 0$.
(3) $g(x)=f(x)-\left(-x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc, d'après la question **(2)**,
• si $x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $g(x)\leqslant 0$ c'est-à-dire $f(x)\leqslant -x+\dfrac{\pi}{2}$;
• si $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$, $g(x)\geqslant 0$ c'est-à-dire $f(x)\geqslant -x+\dfrac{\pi}{2}$.
D'après la question **(1)**, une équation de la tangente T est $y=-x+\dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f traverse la tangente T au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.

69 **Parcours 1**
La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction h est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{13}\right]$.
Pour tout réel t de $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{13}\right]$,
$\mathrm{V}(t)=h'(t)=0{,}05\times(-13\sin(13t))=-0{,}65\sin(13t)$.
Pour tout réel t de $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{13}\right]$, $0\leqslant 13t\leqslant 2\pi$
et $-1\leqslant\sin(13t)\leqslant 1$.
Ainsi, $-0{,}65\leqslant \mathrm{V}(t)\leqslant 0{,}65$.
• $\mathrm{V}(t)=0{,}65$ si, et seulement si, $\sin(13t)=-1$.
Ainsi, $13t=\dfrac{3\pi}{2}$, soit $t=\dfrac{3\pi}{26}$.
• $\mathrm{V}(t)=-0{,}65$ si, et seulement si, $\sin(13t)=1$.
Ainsi, $13t=\dfrac{\pi}{2}$, soit $t=\dfrac{\pi}{26}$.
• Ainsi, dans l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{2\pi}{13}\right]$, la vitesse minimum du piston est $-0{,}65$ m.s^{-1}, à l'instant $\dfrac{\pi}{26}$ s et la vitesse maximum du piston est 0,65 m.s^{-1}, à l'instant $\dfrac{3\pi}{26}$ s.
Remarque : on peut aussi étudier le sens de variation de la fonction V après avoir déterminé la fonction dérivée V′ de la fonction V.

Parcours 2

a) Dans $[0\,;2\pi]$, l'inéquation $\sin(X) \geqslant 0$ a pour solutions les réels X tels que $0 \leqslant X \leqslant \pi$.
L'ensemble des solutions est $S = [0\,;\pi]$.

b) Dans $[0\,;5]$, l'inéquation $f(t) \geqslant 0$ équivaut à $\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \geqslant 0$.
Or, $0 \leqslant t \leqslant 5$ équivaut à $0 \leqslant \frac{2\pi}{5}t \leqslant 2\pi$.
D'après la question **a)**, on peut affirmer que l'inéquation $\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \geqslant 0$ a pour solutions les réels t tels que $0 \leqslant \frac{2\pi}{5}t \leqslant \pi$ c'est-à-dire tels que $0 \leqslant t \leqslant \frac{5}{2}$.
L'ensemble des solutions est $S = \left[0\,;\frac{5}{2}\right]$.

c) La personne inspire pendant la première moitié des 5 s.

70 **1. a)** Le triangle ABC est isocèle en A et (AH) est la hauteur issue de A donc l'axe de symétrie du triangle ABC. Ainsi, BC = 2BH.
Le rayon du cercle $\mathscr{C}$ est 1.
Dans le triangle rectangle BOH, $\sin(x) = \frac{BH}{OB} = BH$ et $\cos(x) = \frac{OH}{OB} = OH$.
Ainsi, $BC = 2\sin(x)$ et $AH = AO + OH = 1 + \cos(x)$.

b) $S(x) = \frac{1}{2} \times BC \times AH = \frac{1}{2} \times 2\sin(x) \times (1 + \cos(x))$
soit $S(x) = \sin(x)\,(1 + \cos(x))$.

2. a) La fonction S est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
Pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = 1 + \cos(x)$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.
Donc, pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,
$S'(x) = \cos(x) \times (1 + \cos(x)) + \sin(x) \times (-\sin(x))$
$S'(x) = \cos(x) \times (1 + \cos(x)) - \sin^2(x)$
Or, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
soit $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.
Ainsi, $S'(x) = \cos(x)\,(1 + \cos(x)) - (1 - \cos^2(x))$
$S'(x) = \cos(x)\,(1 + \cos(x)) - (1 + \cos(x))\,(1 - \cos(x))$
$S'(x) = (1 + \cos(x)) \times (\cos(x) - (1 - \cos(x))$
Ainsi, $S'(x) = (1 + \cos(x))\,(2\cos(x) - 1)$.

b) Dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, l'inéquation $2\cos(x) - 1 \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$ soit $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ et l'inéquation $2\cos(x) - 1 \leqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ soit $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, $2\cos(x) - 1$ est positif sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ et négatif sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

c) $S'(x) = (1 + \cos(x))\,(2\cos(x) - 1)$.
Pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $1 + \cos(x) > 0$; ainsi, $S'(x)$ est du signe de $2\cos(x) - 1$.
À l'aide de la question **2. b)**, on peut dresser le tableau de variations de la fonction S sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

$S(0) = 0 \times (1 + 1) = 0$
$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \times (1 + 0) = 1$
$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

d) L'aire du triangle ABC est maximale pour $x = \frac{\pi}{3}$.
Elle est alors égale à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ unités d'aire.
Les angles au centre $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$ mesurent chacun $\frac{2\pi}{3}$rad, donc le triangle ABC est équilatéral.

71 **1.** Les coordonnées du point A sont (0 ; 1), donc $\theta(0) = 1$.
Le coefficient directeur de la tangente T est 2 donc $\theta'(0) = 2$.

2. a) Pour tout réel $t \geqslant 0$, $\theta'(t) = \sqrt{2} \times a\cos(at + b)$.

b) • $\theta(0) = \sqrt{2}\sin(b) = 1$ donc $\sin(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $\sin(b) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a une seule solution $\frac{\pi}{4}$. Donc $b = \frac{\pi}{4}$.
• $\theta'(0) = \sqrt{2} \times a\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a$
donc $a = 2$.
• Donc, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\theta(t) = \sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$.

c) Pour tout réel $t \geqslant 0$,
$\theta(t + \pi) = \sqrt{2}\sin\left(2(t + \pi) + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$.
Or, la fonction sinus est périodique de période 2π, donc $\theta(t + \pi) = \sqrt{2}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ soit $\theta(t + \pi) = \theta(t)$.
La fonction θ est donc périodique de période π.

72 **1.** Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
donc $1{,}5 \times (-1) + 50 \leqslant d(t) \leqslant 1{,}5 \times 1 + 50$
soit $48{,}5 \leqslant d(t) \leqslant 51{,}5$
51,5 m − 48,5 m = 3 m
L'amplitude du mouvement du flotteur est de 3 m.

2. a) La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction d est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;4]$.

Pour tout réel t de $[0\,;4]$,

$$d'(t)=1{,}5\times\left(-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)=-\frac{3\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

b) Pour tout réel t de $[0\,;4]$, $d'(t)=-\dfrac{3\pi}{4}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$ donc $d'(t)$ est du signe contraire à $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$.

Or, sur $[0\,;2]$, $0\leqslant\dfrac{\pi}{2}t\leqslant\pi$ soit $0\leqslant\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\leqslant 1$ et sur $[2\,;4]$, $\pi\leqslant\dfrac{\pi}{2}t\leqslant 2\pi$ soit $-1\leqslant\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\leqslant 0$.

Ainsi, $d'(t)$ est négatif sur $[0\,;2]$ et positif sur $[2\,;4]$.

c) Voici le tableau de variations de d sur $[0\,;4]$.

t	0		2		4
$d'(t)$		$-$	0	$+$	
$d(t)$	51,5	↘	48,5	↗	51,5

$d(0)=1{,}5\times 1+50=51{,}5$

$d(2)=1{,}5\times(-1)+50=48{,}5$

$d(4)=1{,}5\times 1+50=51{,}5$

d) Le flotteur monte sur l'intervalle de temps $[2\,;4]$.

3. a) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction d' est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;4]$.

Pour tout réel t de $[0\,;4]$,

$$d''(t)=-\frac{3\pi}{4}\times\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)=-\frac{3\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

b) Pour tout réel t de $[0\,;4]$, $0\leqslant\dfrac{\pi}{2}t\leqslant 2\pi$.

On résout donc l'équation $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)=0$ dans $[0\,;2\pi]$.

Cette équation équivaut à $\dfrac{\pi}{2}t=\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2}t=\dfrac{3\pi}{2}$ soit $t=1$ ou $t=3$. L'ensemble des solutions est $S=\{1\,;3\}$.

c) $d''(t)=-\dfrac{3\pi^2}{8}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$ donc $d''(t)$ est du signe contraire à $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$ sur $[0\,;4]$.

Or, sur $[0\,;1]$, $0\leqslant\dfrac{\pi}{2}t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ soit $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\geqslant 0$; sur $[1\,;3]$, $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}t\leqslant\dfrac{3\pi}{2}$ soit $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\leqslant 0$; sur $[3\,;4]$, $\dfrac{3\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}t\leqslant 2\pi$ soit $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)\geqslant 0$.

Ainsi, $d''(t)$ est négatif sur $[0\,;1]$ et $[3\,;4]$ et positif sur $[1\,;3]$.

Voici le tableau de variations de la vitesse du flotteur sur $[0\,;4]$.

t	0		1		3		4
$d''(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$v(t)$ ou $d'(t)$	0	↘	$-\dfrac{3\pi}{4}$	↗	$\dfrac{3\pi}{4}$	↘	0

$v(0)=-\dfrac{3\pi}{4}\times 0=0$; $\qquad v(1)=-\dfrac{3\pi}{4}\times 1=-\dfrac{3\pi}{4}$;

$v(2)=-\dfrac{3\pi}{4}\times(-1)=\dfrac{3\pi}{4}$; $\qquad v(4)=-\dfrac{3\pi}{4}\times 0=0$.

La vitesse du flotteur est maximum à l'instant $t=3$ s.

73 **1.** Pour tout réel t, $d\left(t+\dfrac{1}{2}\right)=0{,}1\sin\left(4\pi\times\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\right)$ c'est-à-dire $d\left(t+\dfrac{1}{2}\right)=0{,}1\sin(4\pi t+2\pi)$.

Or, la fonction sinus est périodique de période 2π, donc $d\left(t+\dfrac{1}{2}\right)=0{,}1\sin(4\pi t)$.

Ainsi, pour tout réel t, $d\left(t+\dfrac{1}{2}\right)=d(t)$. La fonction d est donc périodique de période $\dfrac{1}{2}$.

2. a) Durant la systole, le débit croit puis revient à 0 L.s^{-1} donc on cherche la plus petite valeur non nulle de t telle que $d(t)=0$ c'est-à-dire telle que $0{,}1\sin(4\pi t)=0$.

Ainsi, $\sin(4\pi t)=0$ soit $4\pi t=\pi$ c'est-à-dire $t=\dfrac{1}{4}$.

La systole dure donc $\dfrac{1}{4}$ s soit 0,25 s.

La fonction d étant périodique de période $\dfrac{1}{2}$, la diastole dure donc aussi 0,25 s chez ce patient.

b) Le débit est maximum lorsque $\sin(4\pi t)$ est maximum, c'est-à-dire lorsque $\sin(4\pi t)=1$.

$\sin(4\pi t)=1$ équivaut à $4\pi t=\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, $t=\dfrac{1}{8}$.

Le débit est donc maximum au bout de 0,125 s.

3. a) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction d est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$.

$t\in\left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$ équivaut à $4\pi t\in[0\,;\pi]$.

Pour tout réel t de $\left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$,

$$d'(t)=0{,}1\times(4\pi\cos(4\pi t))=0{,}4\pi\cos(4\pi t).$$

$d'(t)$ est donc du signe de $\cos(4\pi t)$ sur $\left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$.

Or, $\cos(4\pi t)\geqslant 0$ pour $0\leqslant 4\pi t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ c'est-à-dire pour $0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{8}$ et $\cos(4\pi t)\leqslant 0$ pour $\dfrac{\pi}{2}\leqslant 4\pi t\leqslant\pi$ c'est-à-dire pour $\dfrac{1}{8}\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{4}$.

Voici le tableau de variations de d sur $\left[0\,;\dfrac{1}{4}\right]$.

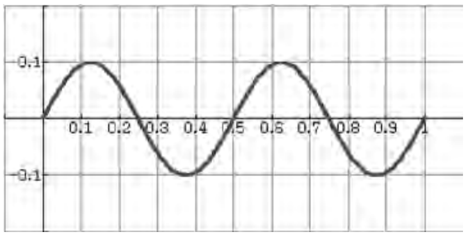
t	0		$\dfrac{1}{8}$		$\dfrac{1}{4}$
$d'(t)$		$+$	0	$-$	
$d(t)$	0	↗	0,1	↘	0

$d(0)=0{,}1\times 0=0$

$d\left(\dfrac{1}{8}\right)=0{,}1\times 1=0{,}1$

$d\left(\dfrac{1}{4}\right)=0{,}1\times 0=0$

b) Voici la courbe de la fonction d sur $[0 ; 1]$ à l'écran de calculatrice.



On y retrouve des résultats précédents (période, durée de la systole, instant au débit maximum, variations).

74 **1. a)** Pour tout réel x,
$g(x+\pi) = \sin(x+\pi)\cos(x+\pi)$
$g(x+\pi) = -\sin(x) \times (-\cos(x)) = \sin(x)\cos(x)$.
Ainsi, pour tout réel x, $g(x+\pi) = g(x)$ donc la fonction g est périodique de période π.
b) Pour tout réel x, $g(-x) = \sin(-x)\cos(-x)$.
Or, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.
Donc, pour tout réel x, $g(-x) = -\sin(x) \times \cos(x)$ soit $g(-x) = -g(x)$. La fonction g est donc impaire.
2. a) La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
Pour tout réel x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.
Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.
$g'(x) = \cos(x) \times \cos(x) + (\sin(x) \times (-\sin(x))$
$g'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
Or, pour tout réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.
$g'(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.
On factorise : $g'(x) = (\sqrt{2}\cos(x)+1)(\sqrt{2}\cos(x)-1)$.
Sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $\sqrt{2}\cos(x)+1 \geqslant 1$.
$g'(x)$ est donc du signe de $\sqrt{2}\cos(x)-1$ sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
Or, dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos(x)-1 \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; soit $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ et dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos(x)-1 \leqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; soit $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.
La fonction g est donc croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]$.
b) Pour dresser le tableau de variations de la fonction g sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$, on utilise la réponse à la question **a)** et le fait que la fonction g est impaire et périodique de période π (question **1.**).

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$
$g(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

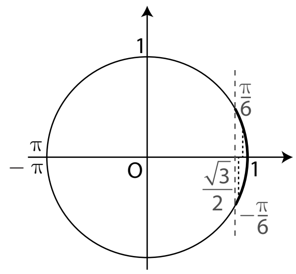
$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \times 0 = 0 \text{ et } g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \text{ et } g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

75 **Parcours 1**

• Dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, l'inéquation $\sqrt{3} - 2\cos(x) < 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.
On peut visualiser les solutions de cette inéquation à l'aide du cercle trigonométrique :



$$-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}.$$

Dans l'inéquation $[-\pi ; \pi]$,
$\sqrt{3} - 2\cos(x) \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les solutions sont les réels x tels que

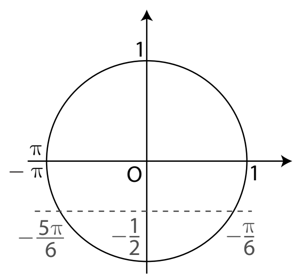
$$-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi.$$

• Voici le tableau de signes de $\sqrt{3} - 2\cos(x)$ sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		π
$\sqrt{3} - 2\cos(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Parcours 2

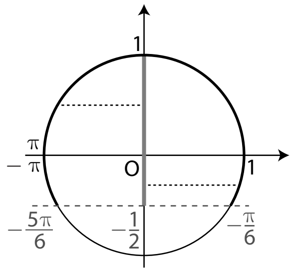
a) Dans l'intervalle $[-\pi ; \pi]$, l'équation $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ a deux solutions : $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.



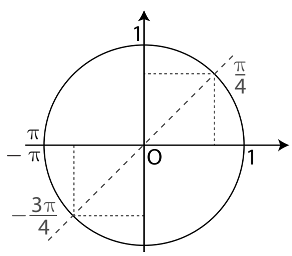
L'ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}\right\}$.

b) L'inéquation (**E**) $1 + 2\sin(x) \geqslant 0$ équivaut à $\sin(x) \geqslant \frac{1}{2}$.

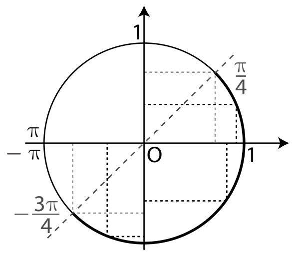
Dans l’intervalle $[-\pi\,;\pi]$, l’ensemble des solutions de l’inéquation (**E**) est :
$S = \left[-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}\,;\pi\right].$



76 **a)** Dans $[-\pi\,;\pi]$, $2\cos(x) - 1 \leqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$, soit $-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi$.
L’ensemble des solutions de l’inéquation est :
$$S = \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right].$$
b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, $\sqrt{2}\sin(x) + 1 > 0$
équivaut à $\sin(x) > -\frac{1}{\sqrt{2}}$ c’est-à-dire $\sin(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$
soit $-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{3\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4} < x \leqslant \pi$.
L’ensemble des solutions de l’inéquation est :
$$S = \left[-\pi\,;-\frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{4}\,;\pi\right].$$
77 Pour tout réel x,
$\cos^2(x) - 1 = (\cos(x) + 1)(\cos(x) - 1)$
Dans l’intervalle $[-\pi\,;\pi]$,
l’équation $(2\sin(x) + \sqrt{3})(\cos(x) + 1)(\cos(x) - 1) = 0$
équivaut à $2\sin(x) + \sqrt{3} = 0$ ou $\cos(x) + 1 = 0$
ou $\cos(x) - 1 = 0$
soit $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos(x) = -1$ ou $\cos(x) = 1$
Ainsi, $x = -\frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ ou bien $x = -\pi$
ou $x = \pi$ ou bien $x = 0$.
L’ensemble des solutions de l’équation est :
$$S = \left\{-\pi; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; 0; \pi\right\}.$$
78 **a)** On cherche des points du cercle trigonométrique qui sont aussi situés sur la première bissectrice.
Donc, dans $[-\pi\,;\pi]$, l’équation $\sin(x) = \cos(x)$ a deux solutions $-\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$.

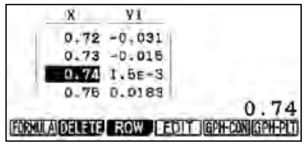


L’ensemble des solutions est $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$.
b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, l’inéquation $\cos(x) > \sin(x)$ équivaut à
$$-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}.$$

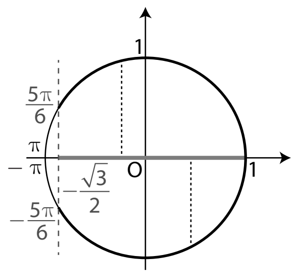


L’ensemble des solutions est $S = \left]-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

79 **a)** La fonction f est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = 1 - (-\sin(x)) = 1 + \sin(x)$.
Or, pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $1 + \sin(x) \geqslant 0$.
Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
b) $f(0) = 0 - \cos(0) = -1$
et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, donc l’équation $f(x) = 0$, c’est-à-dire l’équation $x - \cos(x) = 0$, admet une seule solution α dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
Avec la calculatrice, on obtient l’arrondi au centième de α : $\alpha \approx 0{,}74$.



80 **a)** On détermine le signe de $2\cos(x) + \sqrt{3}$ à l’aide du cercle trigonométrique.
Dans l’intervalle $[-\pi\,;\pi]$,
• $2\cos(x) + \sqrt{3} \geqslant 0$
équivaut à $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$
soit $-\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}$.
• $2\cos(x) + \sqrt{3} \leqslant 0$
équivaut à $\cos(x) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$
soit $-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{5\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi$.



b) Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
donc $1 + \sin(x) \geqslant 0$.
Dans $[-\pi\,;\pi]$, $1 + \sin(x) = 0$ équivaut à $\sin(x) = -1$
soit $x = -\frac{\pi}{2}$.
Voici le tableau de signes sur $[-\pi\,;\pi]$ du produit $(2\cos(x) + \sqrt{3})(1 + \sin(x))$.

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$2\cos(x) + \sqrt{3}$		−	0	+		+	0	−	
$1 + \sin(x)$		+		+	0	+		+	
Produit		−	0	+	0	+	0	−	

c) Dans $[-\pi\,;\pi]$, les solutions de l’inéquation (**I**) sont les réels x tels que :
$$-\pi \leqslant x \leqslant -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2}.$$
L’ensemble des solutions est :
$$S = \left[-\pi\,;-\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\}.$$

81 **a) Faux.** En effet, pour tout réel x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on définit la fonction g telle que $g(x) = f(x) - x$, soit $g(x) = \sin(x) - x$.
La dérivée g' est telle que $g'(x) = \cos(x) - 1$.
Pour $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $\cos(x) - 1 \leqslant 0$.
La fonction g est donc décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Voici le tableau de variations de la fonction g sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

x	0 $\qquad\qquad$ $\dfrac{\pi}{2}$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 ↘

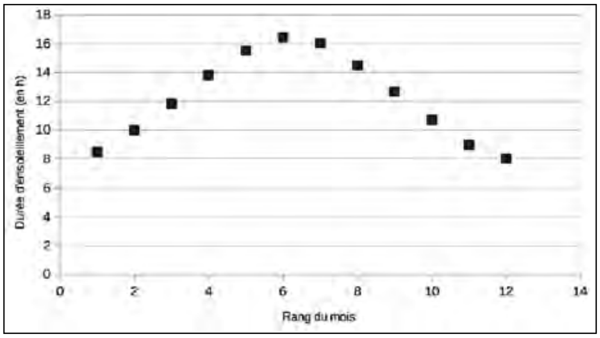
Or, $g(0) = \sin(0) - 0 = 0$ donc, pour $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire $f(x) \leqslant x$.
Remarque : on peut aussi utiliser le fait que la courbe représentative de la fonction sinus est située au-dessous de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, dans un repère orthonormé.
b) Faux. En effet, $\sin(0) = 0$ et $a \times 0 = 0$ pour tout réel a.
Ainsi, l'équation $f(x) = ax$ admet 0 pour solution, pour tout réel positif a.
c) Faux. En effet, pour tout réel $x > 0$, $\sin(x) < x$.
La seule solution de l'équation $f(x) = x$ est 0.

82 **a)** Si x_0 est solution de (**E**), alors $\sin(x_0) = \dfrac{x_0}{2}$, c'est-à-dire $2\sin(x_0) = x_0$.
Or, pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $-2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2$.
Ainsi, $-2 \leqslant 2\sin(x_0) \leqslant 2$ c'est-à-dire $-2 \leqslant x_0 \leqslant 2$ soit $x_0 \in [-2\,;2]$.
b) Si x_0 est solution de (**E**), alors $\sin(x_0) = \dfrac{x_0}{2}$.
La fonction sinus est impaire donc
$\sin(-x_0) = -\sin(x_0)$.
Or, $-\sin(x_0) = -\dfrac{x_0}{2} = \dfrac{-x_0}{2}$; ainsi, $\sin(-x_0) = \dfrac{-x_0}{2}$.
Donc $-x_0$ est solution de (**E**).

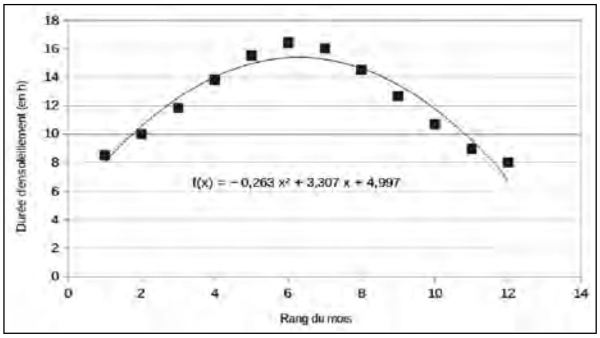
83 **1. a)** Voici la feuille de calcul complétée (logiciel LibreOffice).

	A	B	C	D
1	**Mois**	**Rang du mois**	**Durée d'ensoleillement**	**Durée (en h)**
2	janvier	1	08:30	8,5
3	février	2	09:59	9,983
4	mars	3	11:51	11,850
5	avril	4	13:49	13,817
6	mai	5	15:32	15,533
7	juin	6	16:27	16,450
8	juillet	7	16:01	16,017
9	août	8	14:30	14,500
10	septembre	9	12:40	12,667
11	octobre	10	10:42	10,700
12	novembre	11	08:58	8,967
13	décembre	12	08:01	8,017

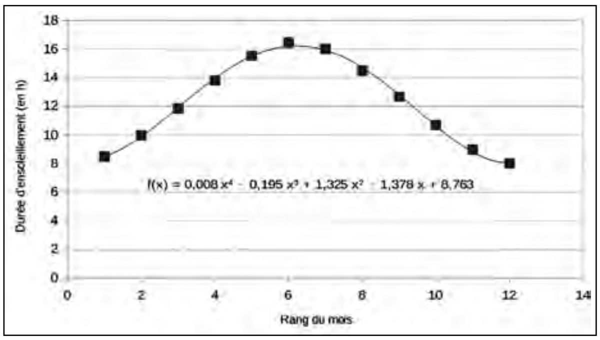
b) Voici le nuage de points obtenu.



c) Voici la courbe de tendance et son équation sous forme polynomiale de degré 2 (avec des coefficients à 3 décimales).



2. a) Voici la courbe de tendance et son équation sous forme polynomiale de degré 4 (avec des coefficients à 3 décimales).



b) Cet ajustement paraît meilleur que le modèle 1. En effet, la courbe de tendance suit le nuage de points plus précisément.
3. a) Le mois de février a le rang 2,
donc $g(2) = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}(2-p)\right) + 11{,}983$.
Or, d'après la question **1. a)**, $g(2) = 9{,}983$.
Ainsi, $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}(2-p)\right) + 11{,}983 = 9{,}983$
soit $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}(2-p)\right) = -2$
c'est-à-dire $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}(2-p)\right) = -\dfrac{1}{2}$.
$p \in [0\,;3]$ donc $2 - p \in [-1\,;2]$
et $\dfrac{\pi}{6}(2-p) \in \left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Dans $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}(2-p)\right) = -\frac{1}{2}$ équivaut à $\frac{\pi}{6}(2-p) = -\frac{\pi}{6}$ c'est-à-dire $2 - p = -1$ soit $p = 3$.

Ainsi, $g(x) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}(x-3)\right) + 11{,}983$

ou $g(x) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2}\right) + 11{,}983$.

b) Pour tout réel x de $[1 ; 12]$,

$g(x+12) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}(x+12) - \frac{\pi}{2}\right) + 11{,}983$

$g(x+12) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + 11{,}983$

Or, la fonction sinus est périodique de période 2π, donc pour tout réel x de $[1 ; 12]$,

$g(x+12) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2}\right) + 11{,}983$

soit $g(x + 12) = g(x)$.

La fonction g est donc périodique de période 12.

4. a) Voici la feuille de calcul complétée avec les colonnes E, F, G.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Mois	Rang du mois	Durée d'ensoleillement	Durée (en h)	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
2	janvier	1	08:30	8,5	8,041	8,523	8,519
3	février	2	09:59	9,983	10,559	9,875	9,983
4	mars	3	11:51	11,850	12,551	11,937	11,983
5	avril	4	13:49	13,817	14,017	14,019	13,983
6	mai	5	15:32	15,533	14,957	15,623	15,447
7	juin	6	16:27	16,450	15,371	16,443	15,983
8	juillet	7	16:01	16,017	15,259	16,365	15,447
9	août	8	14:30	14,500	14,621	15,487	13,983
10	septembre	9	12:40	12,067	13,457	14,019	11,983
11	octobre	10	10:42	10,700	11,767	12,483	9,983
12	novembre	11	08:58	8,967	9,551	11,513	8,519
13	décembre	12	08:01	8,017	6,809	11,955	7,983

b) Le modèle 3 parait le plus approprié.

En juin de l'an prochain, la durée moyenne d'ensoleillement avec le modèle 3 est $g(18)$.

Or, la fonction g est périodique de période 12, donc $g(18) = g(6)$.

En cellule G7, on lit $g(6) = 15{,}983$ h soit 15 h 58 min.

On peut donc estimer à 15 h 58 min la durée moyenne d'ensoleillement dans cette ville, en juin de l'an prochain.

84 **1.** Pour tout réel x, $f(x) = \cos^2(x) + 2\cos(x) + 1 + 1$ c'est-à-dire $f(x) = (\cos(x) + 1)^2 + 1$.

Or, pour tout réel x, $(\cos(x) + 1)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 1$.

2. a) Pour tout réel x,

$f(x + 2\pi) = \cos^2(x + 2\pi) + 2\cos(x + 2\pi) + 2$

Or, la fonction cosinus est périodique de période 2π donc $f(x + 2\pi) = \cos^2(x) + 2\cos(x) + 2$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x + 2\pi) = f(x)$; la fonction f est donc périodique de période 2π.

b) • Pour tout réel x, $f(-x) = \cos^2(-x) + 2\cos(-x) + 2$.

Or, la fonction cosinus est paire donc, pour tout réel x, $f(-x) = \cos^2(x) + 2\cos(x) + 2$ soit $f(-x) = f(x)$.

Ainsi, la fonction f est paire et l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

• Soit M et M′ deux points de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisses $\pi - x$ et $\pi + x$ respectivement.

L'ordonnée de M est $f(\pi - x)$ et l'ordonnée de M′ est $f(\pi + x)$.

Or, pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) = -\cos(x)$.

Ainsi, $f(\pi - x) = f(\pi + x) = (-\cos(x) + 1)^2 + 1$.

Les points M et M′ ont donc la même ordonnée et la droite d'équation $x = \pi$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$.

3. a) • Pour tout réel x, $f'(x) = ((\cos(x) + 1)^2)'$

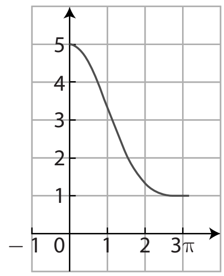
$f'(x) = 2 \times (-\sin(x)) \times (\cos(x) + 1)$

$f'(x) = -2\sin(x)(\cos(x) + 1)$.

Or, pour $x \in [0 ; \pi]$, $\sin(x) \geqslant 0$ et pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ soit $\cos(x) + 1 \geqslant 0$.

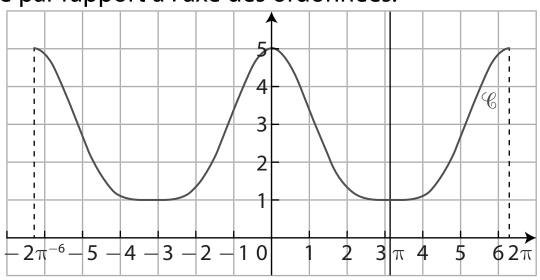
Ainsi, $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0 ; \pi]$. La fonction f est donc décroissante sur $[0 ; \pi]$.

• Voici la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0 ; \pi]$:



b) On complète la courbe $\mathscr{C}$ sur $[\pi ; 2\pi]$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \pi$.

Puis on complète la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-2\pi ; 0]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



85 **a)** On conjecture que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

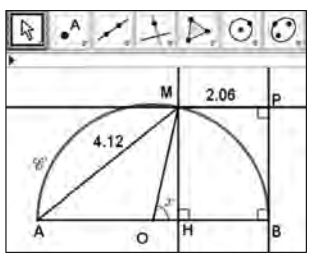
b) Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$,

donc $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $-\frac{1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

La conjecture émise à la question **a)** est donc justifiée.

86 On peut conjecturer l'existence d'un point M à l'aide d'un logiciel de géométrie.



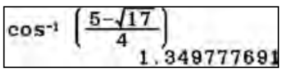
On note x la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{\text{BOM}}$ ($x \in]0 ; \pi]$).

On nomme H le projeté orthogonal de M sur (AB).
• MP = HB = OB − OH = OB − OM × cos(x)
Ainsi, MP = R(1 − cos(x)).
• Dans le triangle rectangle AMH, AM² = AH² + MH².
AH = AO + OH = AO + OM × cos(x) = R(1 + cos(x)).
Ainsi, $AM^2 = R^2(1+\cos(x))^2 + R^2\sin^2(x)$
$AM^2 = R^2(1+\cos^2(x)+2\cos(x)+\sin^2(x))$
Or, pour tout réel x, $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$,
donc $AM^2 = R^2(2+2\cos(x)) = 2R^2(1+\cos(x))$
• AM = 2MP équivaut à $AM^2 = 4MP^2$,
soit $2R^2(1+\cos(x)) = 4R^2(1-\cos(x))^2$
c'est-à-dire $1+\cos(x) = 2(1-\cos(x))^2$
$1+\cos(x) = 2(1+\cos^2(x)-2\cos(x))$
soit $2\cos^2(x)-5\cos(x)+1=0$.
On pose X = cos(x), avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$.
$2\cos^2(x)-5\cos(x)+1=0$ équivaut à $2X^2-5X+1=0$
$(-1 \leqslant X \leqslant 1)$.
$\Delta = 5^2 - 4\times 2\times 1 = 17$

$$X' = \frac{5-\sqrt{17}}{2\times 2} = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$$

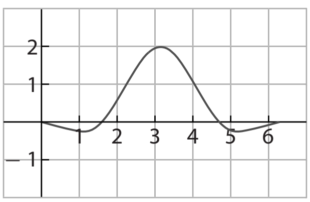
$$X'' = \frac{5+\sqrt{17}}{2\times 2} = \frac{5+\sqrt{17}}{4}$$

Or, $\frac{5+\sqrt{17}}{4} > 1$. On ne conserve donc que la solution $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$ (dont une valeur approchée est 0,22).
On résout alors l'équation $\cos(x) = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$ dans $]0\,;\pi]$.
A l'aide de la calculatrice, on obtient $x \approx 1{,}35$.



Ainsi, $\widehat{BOM} \approx 1{,}35$rad (soit $\widehat{BOM} \approx 77{,}3°$).
Ainsi, il existe bien un point M de $\mathscr{C}$ tel que AM = 2MP.
Ce point M cherché est tel que $\cos(\widehat{BOM}) = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

87 **a)** Voici la courbe représentative de la fonction h à l'écran de la calculatrice.



Il semble que la fonction h soit décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ et $\left[\pi\,;\frac{5\pi}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$ et $\left[\frac{5\pi}{3}\,;2\pi\right]$.
b) La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction h est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;2\pi]$.
Pour tout réel x, $h'(x) = (\cos^2(x))' - (\cos(x))'$
$h'(x) = 2\times(-\sin(x))\times\cos(x) - (-\sin(x))$
$h'(x) = -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(x)\,(1-2\cos(x))$
On dresse le tableau de signes de $h'(x)$ sur $[0\,;2\pi]$.
• $\sin(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\pi]$ et $\sin(x) \leqslant 0$ sur $[\pi\,;2\pi]$.
• $1-2\cos(x) \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$, soit $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$; et $1-2\cos(x) \leqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$ sur $[0\,;2\pi]$,
soit $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2\pi$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\sin(x)$	0	+		+	0	−		−	0
$1-2\cos(x)$		−	0	+		+	0	−	
$h'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0

Voici le tableau de variations de la fonction h sur $[0\,;2\pi]$.
On vérifie bien la conjecture émise à la question **a)**.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$h'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0
$h(x)$	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

$h(0) = 1^2 - 1 = 0$
$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
$h(\pi) = (-1)^2 - (-1) = 2$
$h\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$
$h(2\pi) = 1 - 1 = 0$

88 La fonction g est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;+\infty[$.
Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = 2x - 2(-\sin(x)) = 2x + 2\sin(x).$$

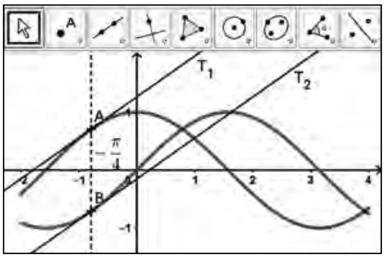
On ne peut pas déterminer directement le signe de $g'(x)$, aussi on détermine la dérivée seconde $g''(x)$.
Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$g''(x) = 2 + 2\cos(x) = 2(1+\cos(x)).$$

Or, pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
soit $1+\cos(x) \geqslant 0$. Ainsi, $g''(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
La fonction g' est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Or, $g'(0) = 0$, donc pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) \geqslant 0$.
La fonction g est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

89 Le coefficient directeur de la tangente T_1 est le nombre dérivé $(\cos(x_1))'$ soit $-\sin(x_1)$ et celui de la tangente T_2 est le nombre dérivé $(\sin(x_2))'$ soit $\cos(x_2)$.
T_1 et T_2 sont des droites parallèles si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont égaux, c'est-à-dire si, et seulement si, $-\sin(x_1) = \cos(x_2)$.
Or, pour $x_1 = x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $-\sin(x_1) = \cos(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dans ce cas, les tangentes T_1 et T_2 sont parallèles et l'écart entre x_1 et x_2 est 0 et non $\dfrac{\pi}{2}$ (voir la figure ci-après) Donc Félix se trompe.

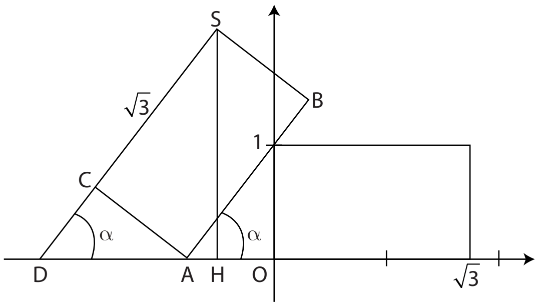


90 Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$ par : $f(x) = \sin(x) - 3x - 2$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$.
Pour tout réel x, $f'(x) = \cos(x) - 3$.
Sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$, $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ soit $\cos(x) - 3 \leqslant -2$.
Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$.
De plus $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 + \dfrac{3\pi}{2} - 2 = \dfrac{3\pi}{2} - 3$

donc $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) > 0 \left(f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \approx 4{,}7\right)$ et $f(0) = -2$.
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$ et $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) \times f(0) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire l'équation $\sin(x) = 3x + 2$ admet une unique solution dans cet intervalle.

91 • Les quatre nombres proposés sont bien des solutions de l'équation (**E**). En effet :
$\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(2\cos^2\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times (2 \times 1 - 1) = 0$
$\sin(0)\ (2\cos^2(0) - 1) = 0$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\left(2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times (2 \times 1 - 1) = 0$
$\sin(\pi)\ (2\cos^2(\pi) - 1) = 0$
• $-\pi$ est également une solution de l'équation (**E**).
En effet : $\sin(-\pi)\ (2\cos^2(-\pi) - 1) = 0$
• Conclusion : Lalie se trompe.

92 Voici la figure annotée.



On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{OAB}$, $\alpha \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
• On se propose de calculer la distance SH, où H est le projeté orthogonal de S sur l'axe des abscisses.
Dans le triangle rectangle SDH,
$\sin(\alpha) = \dfrac{SH}{DS} = \dfrac{SH}{DC + \sqrt{3}}$;
ainsi, $SH = (DC + \sqrt{3})\sin(\alpha)$.
Dans le triangle rectangle ACD, $\sin(\alpha) = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{1}{AD}$;
ainsi, $AD = \dfrac{1}{\sin(\alpha)}$.
D'après le théorème de Pythagore, $AD^2 = CA^2 + CD^2$
donc $\left(\dfrac{1}{\sin(\alpha)}\right)^2 = 1^2 + CD^2$ c'est-à-dire

$$CD^2 = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} - 1 = \frac{1 - \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$$

Sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\boldsymbol{\alpha}) > 0$ et $\sin(\boldsymbol{\alpha}) > 0$
donc $CD = \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$. Ainsi,

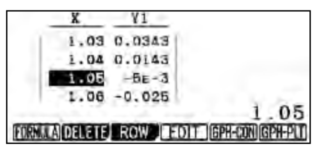
$$SH = \sin(\alpha) \times \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \sqrt{3}\right) = \cos(\alpha) + \sqrt{3}\sin(\alpha).$$

• Soit f la fonction définie sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x).$$

Pour tout réel x de $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = -\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$
et $f''(x) = -\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$.
Or, sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$ et $\sin(x) > 0$ donc $f''(x) < 0$.
La fonction f' est donc strictement décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
De plus, $f'(0) = -\sin(0) + \sqrt{3}\cos(0) = \sqrt{3}$,
$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.
La fonction f' est continue et strictement décroissante sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f'(0) \times f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) < 0$, donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Avec la calculatrice, on obtient l'arrondi au centième de x_0 :
$x_0 \approx 1{,}05$.

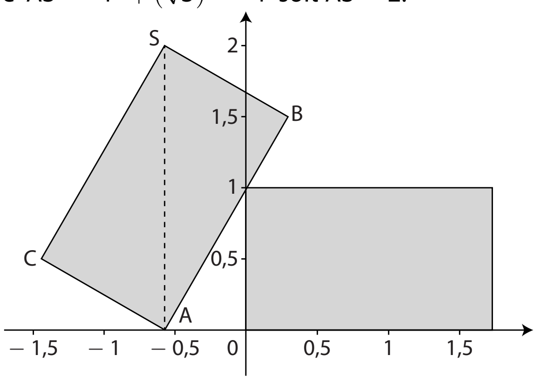


De plus, $f'(x) > 0$ sur $]0\,;x_0[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]x_0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction f admet un maximum en x_0.

x	0	x_0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

Une valeur approchée de ce maximum est :
$f(1{,}05) = \cos(1{,}05) + \sqrt{3}\sin(1{,}05)$ soit $f(1{,}05) \approx 2$.
On en déduit que la hauteur maximum que l'on peut atteindre est environ 2.

• Remarque : on peut imaginer que la hauteur maximum est atteinte lorsque le projeté orthogonal de S sur l'axe des abscisses est confondu avec le sommet A.
Dans ce cas, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ACS, $AS^2 = CA^2 + CS^2$ c'est-à-dire $AS^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$ soit $AS = 2$.



Ceci rejoint le fait que
$$\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$
Ainsi, $SH = 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

SH est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3} \approx 1{,}05\right)$ donc $SH = 2$.

Objectif BAC

93 Partie A

1. a) La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;4]$.
Pour tout réel x de $[0\,;4]$, $f'(x) = b \times \frac{\pi}{4} \times \cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

b) Les tangentes en B et C à la courbe représentative de la fonction f sont parallèles à l'axe des abscisses, donc $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$.
$f'(0) = 0$ équivaut à $b \times \frac{\pi}{4} \times \cos(c) = 0$ soit $\cos(c) = 0$.
Or, dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ $\cos(c) = 0$ équivaut à $c = \frac{\pi}{2}$.

Remarque : on peut vérifier que $f'(4) = 0$.
En effet, $f'(4) = b \times \frac{\pi}{4} \times \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.
On peut donc écrire : $f(x) = a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$.

2. On sait que la courbe passe par le point $B(0\,;1)$ donc $f(0) = 1$ soit $a + b\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ c'est-à-dire $a + b = 1$.
On sait aussi que la courbe passe par le point $C(4\,;3)$ donc $f(4) = 3$ soit $a + b\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3$ c'est-à-dire $a + b\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3$ soit $a - b = 3$.
On résout le système d'équations $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases} 2a = 4 \\ b = 1 - a \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$.

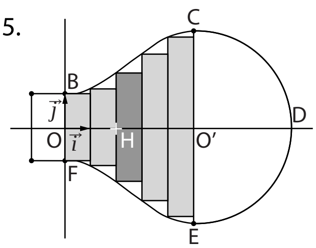
On peut donc écrire : $f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$.

Partie B

1. a) Le cylindre de section le rectangle ABFG a pour base le disque de centre O, de rayon $r = OB = 1$, et pour hauteur $h = AB = 1$.
$\pi \times r^2 \times h = \pi \times 1^2 \times 1 = \pi$
Son volume est donc π unités de volume.

b) La demi-sphère de section le demi-disque de diamètre [CE] a pour rayon $R = \frac{CE}{2} = 3$.
$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times R^3 = \frac{2}{3} \times \pi \times 3^3 = 18\pi$
Son volume est donc 18π unités de volume.

2. a) Cas particulier : $n = 5$.



La hauteur du 3^{e} cylindre (en gris foncé) est $h = \frac{OO'}{5} = \frac{4}{5}$.
Soit H le point de coordonnées $\left(2 \times \frac{4}{5};0\right)$, soit $H\left(\frac{8}{5};0\right)$.
Le rayon du 3^{e} cylindre est $r = f\left(\frac{8}{5}\right) = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{8}{5}\right)$, soit $r = 2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

$$\pi \times r^2 \times h = \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 \times \frac{4}{5}.$$

Le volume du 3^{e} cylindre est $\frac{4\pi}{5}\left(2 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2$.

L'arrondi au centième est 7,19.
Son volume est donc environ 7,19 unités de volume.

b) Cas général
La hauteur h de chaque cylindre est $h = \frac{OO'}{n} = \frac{4}{n}$.
k varie entre 0 et $n - 1$.

Le rayon de la base de chaque cylindre est $r = f\left(\frac{4}{n} \times k\right)$,

soit $r = 2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} \times \frac{4}{n} \times k\right) = 2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Le volume de chacun des n cylindres est donc

$$\pi \times r^2 \times h = \pi \times \left(2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2 \times \frac{4}{n}$$

$$\pi \times r^2 \times h = \frac{4\pi}{n}\left(2 - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)^2.$$

Voici l'algorithme complété.

```
Pour k allant de 0 à n − 1
    V ← V + (4π/n)(2 − cos(kπ/n))²
Fin Pour
```

94 Voici quelques réponses possibles.

• La fonction sinus et la fonction cosinus sont deux fonctions trigonométriques.

• Elles sont toutes les deux continues sur $\mathbb{R}$.

• Elles sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$. On doit faire attention au signe $-$ de la dérivée de la fonction cosinus.

• Elles sont toutes les deux périodiques de période 2π.

Pour tout réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

• Elles n'ont pas le même sens de variation sur $[0 ; \pi]$. En effet, la fonction cosinus est décroissante sur $[0 ; \pi]$, tandis que la fonction sinus est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$.

• L'une est impaire (la fonction sinus), l'autre est paire (la fonction cosinus).

Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$.

• Dans un repère, la courbe représentative de la fonction sinus admet l'origine O du repère comme centre de symétrie, tandis que la courbe représentative de la fonction cosinus admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

• Leurs courbes représentatives dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ sont toutes les deux des sinusoïdes. La courbe de la fonction sinus se déduit de la courbe de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

• Les courbes représentatives sont toutes les deux situées entre les deux droites d'équations $y = -1$ et $y = 1$. En effet, pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

Elles sont tangentes à ces deux droites, aux points d'abscisses $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, etc. pour la fonction cosinus, aux points d'abscisses $-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$, etc. pour la fonction sinus.

95 **a) Vrai.** En effet, pour tout réel x de $[-\pi ; \pi]$,

$$f(-x) = \sin(-x) - \frac{3 \times (-x)}{4} = -\sin(x) + \frac{3x}{4} = -f(x)$$

b) Faux. En effet, pour tout réel x de $[-\pi ; \pi]$,

$$f'(x) = \sin'(x) - \frac{3}{4} = \cos(x) - \frac{3}{4}.$$

c) Faux. En effet, pour tout réel x de $[0 ; \pi]$,

$$f'(x) = \cos(x) - \frac{3}{4}.$$

Soit x_0 la valeur de x de $[0 ; \pi]$ telle que $\cos(x_0) = \frac{3}{4}$.

$\cos(x) - \frac{3}{4} \geqslant 0$ sur $[0 ; x_0]$ et $\cos(x) - \frac{3}{4} \leqslant 0$ sur $[x_0 ; \pi]$.

Ainsi $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0 ; x_0]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[x_0 ; \pi]$.

La fonction f est donc croissante sur $[0 ; x_0]$ et décroissante sur $[x_0 ; \pi]$.

d) Vrai. En effet, on peut dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-\pi ; \pi]$. On utilise les justifications établies aux questions précédentes dans le groupe, en particulier la parité de la fonction f.

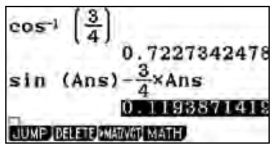
x	$-\pi$		$-x_0$		0		x_0		π
$f(x)$	$\frac{3\pi}{4}$	↘	$-f(x_0)$	↗	0	↗	$f(x_0)$	↘	$-\frac{3\pi}{4}$

$$f(0) = 0 - \frac{3 \times 0}{4} = 0$$

$$f(\pi) = 0 - \frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \text{ donc } f(-\pi) = \frac{3\pi}{4}$$

$$f(x_0) = \sin(x_0) - \frac{3 \times x_0}{4}$$

Avec la calculatrice, on obtient $x_0 \approx 0{,}72$rad et $f(x_0) \approx 0{,}12$.



Donc $f(-x_0) \approx -0{,}12$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[x_0 ; \pi]$ et $f(x_0) \times f(\pi) < 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[x_0 ; \pi]$.

La fonction f étant impaire, l'équation $f(x) = 0$ admet aussi la solution $-\alpha$ dans $[-\pi ; -x_0]$.

De plus elle admet la solution 0.

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet bien trois solutions dans $[-\pi ; \pi]$.

96 **a) Vrai.**

En effet, pour tout réel x, $f(-x) = \sin(-x)\cos(-x)$.

Or, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire, donc $f(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$.

La fonction f est donc impaire donc l'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

b) Vrai. En effet, soit M et M′ les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.

Pour tout réel x,

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)\sin(x) = f(x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \times (-\sin(x))$$

soit $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -f(x)$

Les coordonnées du milieu du segment [MM′] sont

$$\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{2} + x}{2} ; \frac{f(x) - f(x)}{2}\right) \text{ soit } \left(\frac{\pi}{2};0\right).$$

Donc, pour tout réel x, le point A est le milieu du segment [MM′]. Ce point A est bien un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

97 Pour tout réel x de $]0\,;\pi[$, on pose $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$.

Alors, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.

Donc, pour tout réel x de $]0\,;\pi[$,

$$f'(x) = \frac{-\sin(x) \times \sin(x) - \cos(x) \times \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos^2(x) - \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)}$$

soit $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$.

98 **a)** La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;\pi]$.

Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $f'(x) = 2\cos(x)$.

Or, $\cos(x) \geqslant 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(x) \leqslant 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

Voici le tableau de variations de la fonction f.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	1	↘	-1

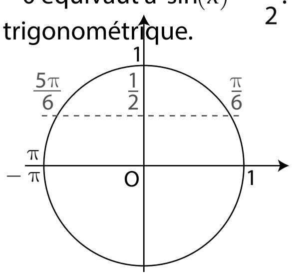
$f(0) = 2 \times 0 - 1 = -1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 1 - 1 = 1$

$f(\pi) = 2 \times 0 - 1 = -1$

b) Dans $[0\,;\pi]$, $2\sin(x) - 1 = 0$ équivaut à $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

On peut s'aider d'un cercle trigonométrique.



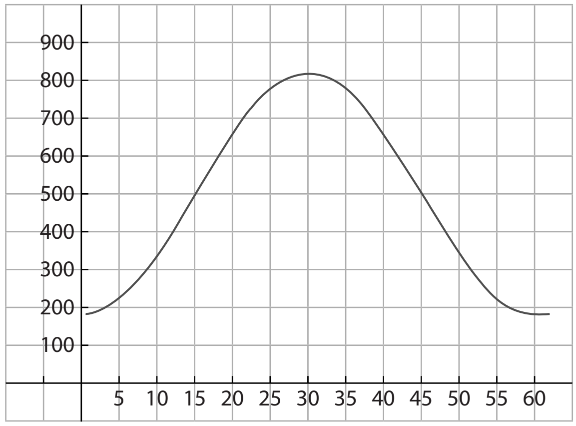
Les solutions de l'équation sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est $S = \left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$.

99 **a)** $C(1) = 500 - \frac{1000}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$ soit $C(1) \approx 183$.

Le 1^er juillet, environ 183 m^3 d'eau ont été consommés.

b) Voici la courbe représentative de la fonction C sur $[1\,;62]$.



On conjecture en effet la présence d'un maximum.

Pour tout réel t de $[1\,;62]$,

$$C'(t) = -\frac{1000}{\pi} \times \frac{\pi}{30} \times \left(-\sin\left(\frac{1}{30}\pi t\right)\right) = \frac{100}{3}\sin\left(\frac{1}{30}\pi t\right).$$

$t \in [1\,;62]$ équivaut à $\frac{1}{30}\pi t \in \left[\frac{\pi}{30}\,;\frac{31\pi}{15}\right]$.

Dans $[1\,;62]$, $C'(t) = 0$ équivaut à $\left(\sin\frac{1}{30}\pi t\right) = 0$ c'est-à-dire $\frac{1}{30}\pi t = \pi$ ou $\frac{1}{30}\pi t = 2\pi$, soit $t = 30$ ou $t = 60$.

$C'(t)$ est du signe de $\sin\left(\frac{1}{30}\pi t\right)$.

Or, dans $[1\,;62]$,

• $\sin\left(\frac{1}{30}\pi t\right) > 0$ équivaut à $\frac{\pi}{30} < \frac{1}{30}\pi t < \pi$ ou $2\pi < \frac{1}{30}\pi t < \frac{31\pi}{15}$, c'est-à-dire $1 < t < 30$ ou $60 < t < 62$;

• $\sin\left(\frac{1}{30}\pi t\right) < 0$ équivaut à $\pi < \frac{1}{30}\pi t < 2\pi$ c'est-à-dire $30 < t < 60$.

Ainsi, $C'(t) > 0$ pour $1 < t < 30$ ou $60 < t < 62$ et $C'(t) < 0$ pour $30 < t < 60$.

On peut dresser le tableau de variations de la fonction C sur $[1\,;62]$.

t	0		30		60		62
$C'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$C(t)$		↗		↘		↗	

Sur $[1\,;62]$, la fonction C admet un maximum pour $t = 30$. Ce maximum est

$$C(30) = 500 - \frac{1000}{\pi}\cos(\pi) = 500 + \frac{1000}{\pi}.$$

c) On définit sur $[1\,;62]$ la fonction f telle que :

$f(t) = C(t) - 313$

soit $f(t) = 187 - \frac{1000}{\pi}\cos\left(\frac{1}{30}\pi t\right)$.

On peut dresser le tableau de variations de la fonction f, à l'aide de celui de la fonction C.

t	1	30	60	62
$f(t)$	$f(1)$ ↗	$f(30)$ ↘	$f(60)$ ↗	$f(62)$

$f(1) = 187 - \frac{1000}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{30}\right)$; $f(1) \approx -130$

$f(30) = 187 + \frac{1000}{\pi}$; $f(30) \approx 505$

$f(60) = 187 - \frac{1000}{\pi}$; $f(60) \approx -131$

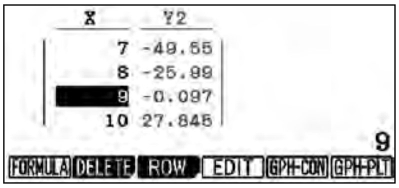
$f(62) = 187 - \frac{1000}{\pi}\cos\left(\frac{31\pi}{15}\right)$; $f(62) \approx -124$.

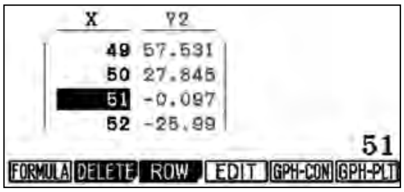
La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1\,;30]$ et $f(1) \times f(30) < 0$, donc l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution α dans $[1\,;30]$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[30\,;60]$ et $f(30) \times f(60) < 0$, donc l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution β dans $[30\,;60]$.

Ainsi, l'équation $f(t) = 0$ c'est-à-dire l'équation $C(t) = 313$ admet deux solutions distinctes α et β dans $[1\,;62]$.

$\alpha \approx 9\,;\beta \approx 51$.





Pour aller plus loin

100 **Partie A**

• L'abscisse du point T est 1.

• Dans le triangle rectangle OIT, $\sin(x) = \frac{IT}{OT}$ et $\cos(x) = \frac{OI}{OT}$.

Ainsi, $IT = OT\sin(x)$ et $OT = \frac{OI}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2}$, donc $IT = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

L'ordonnée du point T est $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Les coordonnées du point T sont donc $\left(1\,;\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

Partie B

1. Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$,

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$.

Or, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire,

donc $\tan(-x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

La fonction tangente est donc impaire et l'origine O du repère est un centre de symétrie de la courbe Γ.

2. a) Pour tout réel $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

On pose $u(x) = \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.

Alors, $u'(x) = \cos(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$.

Donc, pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\times\cos(x) - \sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

b) Pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $1 + \tan^2(x) > 0$ donc $\tan'(x) > 0$.

Ainsi, la fonction tangente est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

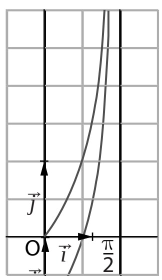
c) $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \sin(x) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos(x) = 0^+$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$.

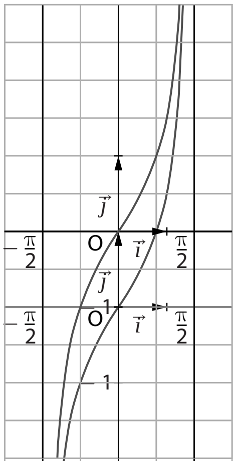
Voici le tableau de variations de la fonction tangente sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0 ↗	‖

3. a) Voici la courbe représentative de la fonction tangente sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.



b) Pour obtenir la courbe représentative de la fonction tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on complète par symétrie par rapport à l'origine du repère.

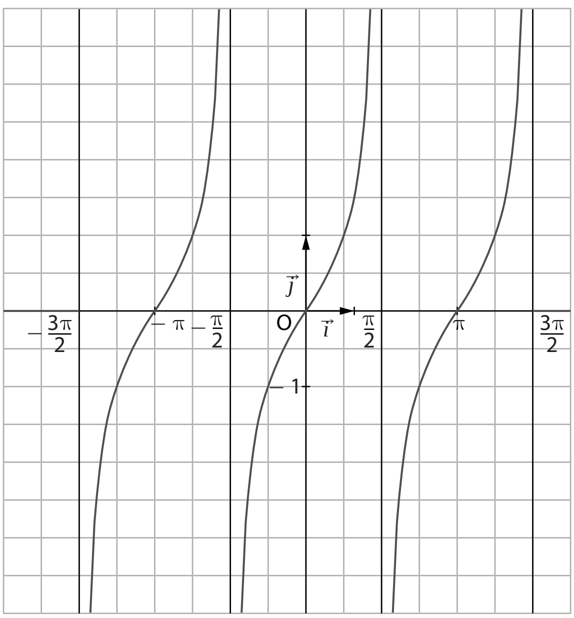


c) Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$,

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

La fonction tangente est donc périodique de période π.

d) Pour compléter le tracé de la courbe Γ sur $\left]\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right[$, on utilise la translation de vecteur $\pi\vec{i}$, puis on utilise la symétrie de centre O pour compléter le tracé sur $\left]-\frac{3\pi}{2}\,;-\frac{\pi}{2}\right[$.



101 **a)** Le point T ne peut être confondu avec E donc ET $\neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 0$.

Dans le triangle rectangle BET, $\tan(\widehat{ETB}) = \frac{EB}{ET}$

c'est-à-dire $\tan(\widehat{ETB}) = \frac{25+5{,}6}{x} = \frac{30{,}6}{x}$.

Dans le triangle rectangle AET, $\tan(\widehat{ETA}) = \frac{EA}{ET}$

c'est-à-dire $\tan(\widehat{ETA}) = \frac{25}{x}$.

$\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$ donc $\tan(\alpha) = \tan(\widehat{ETB} - \widehat{ETA})$.

D'après la formule indiquée,

$$\tan(\alpha) = \frac{\tan(\widehat{ETB}) - \tan(\widehat{ETA})}{1 + \tan(\widehat{ETB})\tan(\widehat{ETA})}.$$

Ainsi,

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{30{,}6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30{,}6}{x} \times \frac{25}{x}} = \frac{\frac{5{,}6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}} = \frac{5{,}6x}{x^2+765}.$$

b) On a montré dans l'exercice 100 (question **2. b)**) que la fonction tangente est strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure α l'est.

On en déduit que α est maximum si, et seulement si, $\tan(\alpha)$ est maximum.

c) S'il existe, le maximum de $\tan(\alpha)$ est le maximum, sur $]0\,;50]$, de la fonction g définie par $g(x) = \frac{5{,}6x}{x^2+765}$.

On pose $u(x) = 5{,}6x$ et $v(x) = x^2 + 765$.

Alors, $u'(x) = 5{,}6$ et $v'(x) = 2x$.

Donc, pour tout réel x de $]0\,;50]$,

$$g'(x) = \frac{5{,}6 \times (x^2+765) - 5{,}6x \times 2x}{(x^2+765)^2}$$

$$g'(x) = \frac{5{,}6(x^2+765-2x^2)}{(x^2+765)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-5{,}6(x^2-765)}{(x^2+765)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-5{,}6(x-\sqrt{765})(x+\sqrt{765})}{(x^2+765)^2}.$$

Puisque $x \in]0\,;50]$, $x + \sqrt{765} > 0$, donc $g'(x)$ est du signe contraire à $x - \sqrt{765}$.

$0 < 765 < 2\,500$ donc $\sqrt{765} \in]0\,;50]$.

Voici le tableau de variations de la fonction g.

x	0		$\sqrt{765}$		50
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{5{,}6\sqrt{765}}{1530}$	$\searrow$	$\frac{56}{653}$

$g(0) = 0$

$$g(\sqrt{765}) = \frac{5{,}6\sqrt{765}}{765+765} = \frac{5{,}6\sqrt{765}}{1530}.$$

$$g(50) = \frac{5{,}6 \times 50}{2500+765} = \frac{56}{653}.$$

Il existe bien une unique valeur x_0 de x sur $]0\,;50]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum : $x_0 = \sqrt{765}$.

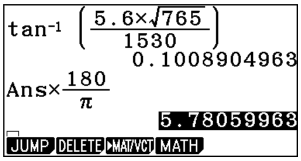
L'angle $\widehat{ATB}$ est donc maximum pour ET $= \sqrt{765}$ m.

Voici un encadrement d'amplitude 10^{-1} de x_0 :

$$27{,}6 < x_0 < 27{,}7$$

On a alors $\tan(\alpha) = \frac{5{,}6\sqrt{765}}{1530}$ avec $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Avec la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 0{,}10$rad, soit $\alpha \approx 5{,}78°$.

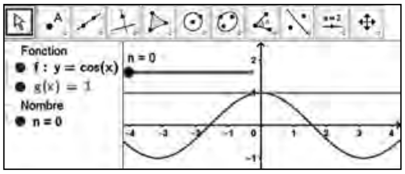


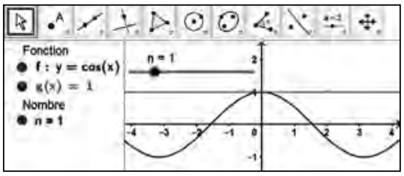
102 **Partie A**

a) Réalisation de la figure.

b) • Pour $n = 0$ et $n = 1$, les courbes de g_0 et g_1 sont une droite.

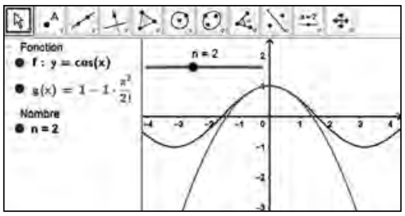
$g_0(x) = g_1(x) = 1$.

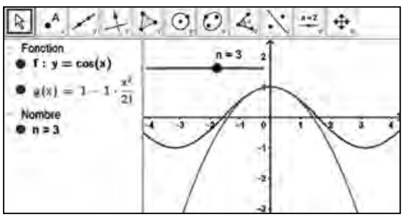




• Pour $n = 2$ et $n = 3$, les courbes de g_2 et g_3 sont des paraboles.

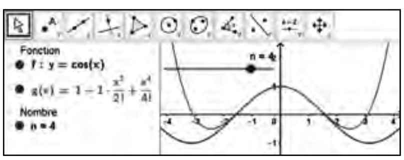
$$g_2(x) = g_3(x)$$
$$= 1 - 1 \times \frac{x^2}{2!}.$$

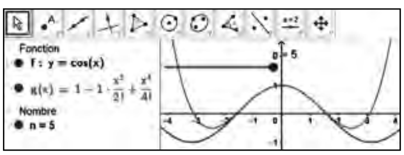




• Pour $n = 4$ et $n = 5$, on lit les expressions

$$g_4(x) = g_5(x) = 1 - 1 \times \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$





c) • Les courbes représentatives des fonctions f et g_n se rapprochent l'une de l'autre au voisinage de 0 de plus en plus au fur et à mesure que n augmente.

• Pour deux valeurs successives de n, par exemple $n = 0$ et $n = 1$ ou $n = 2$ et $n = 3$ ou $n = 4$ et $n = 5$, les expressions $g_n(x)$ sont les mêmes.

Mais pour $n = 1$ et $n = 2$ ou $n = 3$ et $n = 4$, les expressions $g_n(x)$ ne sont pas les mêmes.

Partie B

a) • Pour $n = 0$, $f(0) = \cos(0) = 1$.

On retrouve $g_0(x) = 1$.

• Pour $n = 1$, $f'(0) = -\sin(0) = 0$.

$g_1(x) = g_0(x) + 0 = 1$; ainsi, on retrouve $g_1(x) = 1$.

• Pour $n = 2$, $f''(0) = -\cos(0) = -1$.

$$g_2(x) = g_1(x) + \frac{x^2}{2} \times (-1) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

On retrouve bien $g_2(x) = 1 - 1 \times \dfrac{x^2}{2!}$ (en effet $2! = 2$).

• Pour $n = 3$, $f'''(0) = \sin(0) = 0$.

$$g_3(x) = g_2(x) + 0 = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

On retrouve bien $g_3(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

b) $g_1(x)$ est le polynôme de Taylor de la fonction cosinus en 0 à l'ordre 1. Une approximation de la fonction cosinus est donnée par la fonction affine constante associée à l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction cosinus au point d'abscisse 0.

c) $\cos(0{,}1) \approx g_3(0{,}1)$

Or, $g_3(0{,}1) = 1 - \dfrac{0{,}1^2}{2} = 1 - \dfrac{0{,}01}{2} = 1 - 0{,}005 = 0{,}995$

Ainsi, $\cos(0{,}1) \approx 0{,}995$.

103 **1. a)** La fonction f_1 est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'_1(x) = 1 - \cos(x)$.

Or, pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

donc $1 - \cos(x) \geqslant 0$.

Donc, pour tout réel x, $f'_1(x) \geqslant 0$; ainsi, la fonction f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f_1(0) = 0 - \sin(0) = 0$ et la fonction f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;+\infty[$; ainsi, sur $[0\,;+\infty[$, $f_1(x) \geqslant 0$.

On en déduit que $x - \sin(x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $\sin(x) \leqslant x$ sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) La fonction f_2 est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x,

$$f_2'(x) = -\frac{2x}{2} - (-\sin(x)) = -x + \sin(x).$$

D'après la question **1. b)**, $\sin(x) \leqslant x$ sur $[0\,;+\infty[$ donc $f'_2(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$; ainsi, la fonction f_2 est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) $f_2(0) = 1 - \dfrac{0^2}{2} - \cos(0) = 1 - 1 = 0$ et la fonction f_2 est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc, sur $[0\,;+\infty[$, $f_2(x) \leqslant 0$. De plus,

$$f_2(-x) = 1 - \frac{(-x)^2}{2} - \cos(-x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x)$$

donc $f_2(-x) = f_2(x)$ et la fonction f_2 est paire.
Ainsi, $f_2(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que, pour tout réel x, $1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos(x) \leqslant 0$ c'est-à-dire $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$.

3. a) • La fonction f_3 est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x,

$$f_3'(x) = 1 - \frac{3x^2}{6} - \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x).$$

Donc, pour tout réel x, $f'_3(x) = f_2(x)$.
D'après la question **2. b)**, $f_3(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'_3(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$; ainsi, la fonction f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$.
• La fonction f_4 est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f_4'(x) = -\dfrac{2x}{2} + \dfrac{4x^3}{24} - (-\sin(x))$

$$f_4'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin(x).$$

Ainsi, pour tout réel x, $f'_4(x) = -f_3(x)$.

$f_3(0) = 0 - \dfrac{0^3}{6} - \sin(0) = 0$ et la fonction f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_3(x)$	↘	0	↘

Ainsi, $f_3(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;0]$ et $f_3(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
Donc $f'_4(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;0]$ et $f'_4(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
La fonction f_4 est donc décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) • $f_3(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;+\infty[$, donc $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, d'après la question 1. **b)**, $\sin(x) \leqslant x$ sur $[0\,;+\infty[$.
Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

• $f_4(0) = 1 - \dfrac{0^2}{2} + \dfrac{0^4}{24} - \cos(0) = 1 - 1 = 0$ et la fonction f_4 est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_4(x)$	↘	0	↗

Ainsi, $f_4(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ soit $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \cos(x) \geqslant 0$

c'est-à-dire $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \geqslant \cos(x)$ pour tout réel x.

De plus, d'après la question **2. b)**, pour tout réel x, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$.

Donc, pour tout réel x, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$.

c) D'après la question **3. b)**,

• $0{,}01 - \dfrac{0{,}01^3}{6} \leqslant \sin(0{,}01) \leqslant 0{,}01$

soit $0{,}009\,999\,833 \leqslant \sin(0{,}01) \leqslant 0{,}01$.

• $1 - \dfrac{0{,}01^2}{2} \leqslant \cos(0{,}01) \leqslant 1 - \dfrac{0{,}01^2}{2} + \dfrac{0{,}01^2}{24}$

soit $0{,}999\,95 \leqslant \cos(0{,}01) \leqslant 0{,}999\,950\,000\,4$.

104 • On factorise $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1$.
On peut chercher les racines du polynôme $2X^2 - X - 1$ (avec $-1 \leqslant X \leqslant 1$).
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$

Ainsi, $X_1 = \dfrac{1-3}{4} = \dfrac{-1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1+3}{4} = 1$.

$$2X^2 - X - 1 = 2(X - X_1)(X - X_2) = 2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X - 1)$$

$2X^2 - X - 1 = (2X + 1)(X - 1)$
Ainsi, pour tout réel x,
$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = (2\sin(x) + 1)\,(\sin(x) - 1)$
• Dans $[-\pi\,;\pi]$, $2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$ équivaut à

$$2\sin(x) + 1 = 0 \text{ ou } \sin(x) - 1 = 0$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) = 1$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \left\{-\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right\}.$$

105 Dans le triangle rectangle FAT, $\sin(\alpha) = \dfrac{FT}{AF}$ c'est-à-dire $\sin(\alpha) = \dfrac{FT}{3}$. Ainsi, $FT = 3\sin(\alpha)$.

D'après la figure, $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$.

Donc $FT = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = 3\cos(\beta)$

Or, l'angle β dépend du temps, à partir de 6 h.

Ainsi, $\beta(t) = \dfrac{\pi}{12}t$.

La distance FT dépend de t.
On note $g(t)$ la position de F par rapport à T :

$$g(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right).$$

La vitesse du vérin est la dérivée de g.

$$V(t) = g'(t) = 3 \times \frac{\pi}{12} \times \left(-\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)\right)$$

$$V(t) = -\frac{\pi}{4} \times \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right).$$

13 Primitives. Équations différentielles

Questions-Tests

1 **a)** (2). En effet, pour tout réel x, $g'(x) = 0 - 2e^x$.
Donc, pour tout réel x, $g'(x) = -2e^x$.
b) (3).

2 **a)** (3). En effet, pour tout réel $x > 0$,
$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Donc, pour tout réel $x > 0$,
$f'(x) = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.
b) (2). En effet, pour tout réel x,
$g'(x) = 3 \times e^x + (3x-1)e^x$.
Donc, pour tout réel x,
$g'(x) = (3 + 3x - 1)e^x = (3x+2)e^x$.
c) (1). En effet, pour tout réel $x > -0{,}5$,
$h'(x) = \dfrac{3 \times (2x+1) - (3x-4) \times 2}{(2x+1)^2}$.
Donc, pour tout réel $x > -0{,}5$, $h'(x) = \dfrac{11}{(2x+1)^2}$.

3 **a)** (1). En effet, pour tout réel x,
$f'(x) = 3(7x-1)^2 \times 7$.
Donc, pour tout réel x, $f'(x) = 21(7x-1)^2$.
b) (3).

4 **a)** (1). En effet, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$.
Donc, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.
b) (3). En effet, pour tout réel x, $g'(x) = 5 \times 2e^{2x}$.
Donc, pour tout réel x, $g'(x) = 10e^{2x}$.
c) (3).

Découvrir

1 Déterminer une primitive d'une fonction

1 **a)** $v(0) = k\dfrac{0^2}{2} + C = C$.
Or $v(0) = 50$ donc $C = 50$.
b) $v(20) = k\dfrac{20^2}{2} + 50$.
Or $v(20) = 0$ donc $200k + 50 = 0$.
Ainsi $k = -0{,}25$.
c) On en déduit que, pour tout $t \geqslant 0$,
$v(t) = -0{,}25\dfrac{t^2}{2} + 50$.
Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $v(t) = -0{,}125t^2 + 50$.

2 **a)** La fonction $f : t \mapsto -0{,}125\dfrac{t^3}{3} + 50t$ est une primitive de la fonction v sur $[0\,;+\infty[$.
b) La fonction d est une primitive de la fonction v sur $[0\,;+\infty[$ donc il existe une constante réelle K telle que $d(t) = f(t) + K$.
Or $d(0) = 0$ donc $f(0) + K = 0$ d'où $K = 0$.
On en déduit que, pour tout réel t,
$d(t) = -0{,}125\dfrac{t^3}{3} + 50t$.
c) Le train s'arrête après 20 secondes.
Or $d(20) = -0{,}125\dfrac{20^3}{3} + 50 \times 20$.
Ainsi $d(20) \approx 666{,}67$. La distance d'arrêt du train est d'environ 666,67 m.

2 Résolution d'une équation différentielle

a) g est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = e^{at}$.

Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $g'(t) = 0{,}005f(t)$ est équivalent à, pour tout $t \geqslant 0$, $ae^{at} = 0{,}005e^{at}$.

Ce qui équivaut à $a = 0{,}005$.

La fonction $t \mapsto e^{0{,}005t}$ est solution de l'équation différentielle (**E**).

b) Pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$f'(t) = \frac{P'(t) \times e^{0{,}005t} - P(t) \times 0{,}005e^{0{,}005t}}{(e^{0{,}005t})^2}.$$

Or P est solution de l'équation différentielle (**E**) donc

$$f'(t) = \frac{0{,}005P(t) \times e^{0{,}005t} - P(t) \times 0{,}005e^{0{,}005t}}{(e^{0{,}005t})^2}$$

Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f'(t) = 0$.

On en déduit que la fonction f est constante sur $[0\,;+\infty[$.

c) Autrement dit, il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel t de $[0\,;+\infty[$, $f(t) = k$.

Ce qui signifie qu'il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\dfrac{P(t)}{e^{0{,}005t}} = k$ soit $P(t) = ke^{0{,}005t}$.

d) $P(0) = 30{,}5$ donc $ke^{0{,}005\times 0} = 30{,}5$.

Ainsi, $k = 30{,}5$. On en déduit que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $P(t) = 30{,}5e^{0{,}005t}$.

e) En l'année 2050, $t = 100$ et $P(100) = 30{,}5e^{0{,}005\times 100}$.

Une estimation de la population à cette date est environ 50,286 millions d'habitants.

Savoir-faire

3 **a)** La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ est, pour tout réel x, $F'(x) = -1 \times \left(-1\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\right) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

Donc, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $G'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1$.

Ainsi, $G'(x) = \ln(x)$.

Donc G est une solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \ln(x)$.

4 **a)** L'ensemble des primitives de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ est constitué des fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$: $x \mapsto \ln(x) + C$ où C est une constante réelle.

b) G_1 est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ donc il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $G_1(x) = \ln(x) + C$.

$G_1(1) = 0$ signifie donc que $\ln(1) + C = 0$ soit $C = 0$.

Donc la primitive G_1 de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1 est définie par $G_1(x) = \ln(x)$.

7 **a)** Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$F(x) = 5 \times \dfrac{1}{5}x^5 - 3 \times \dfrac{1}{2}x^2 + 7x = x^5 - \dfrac{3}{2}x^2 + 7x.$

b) Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$G(x) = 2(-\cos(x)) + 3\sin(x) = -2\cos(x) + 3\sin(x).$

c) Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$H(x) = 5e^x + 5x.$

8 **a)** Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$H(x) = 5e^x + 5x.$

b) Une primitive de k sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$K(x) = \dfrac{2}{4}x^4 - x = \dfrac{1}{2}x^4 - x.$

9 **a)** On pose $u(x) = 3x - 1$, alors $u'(x) = 3$.

Ainsi, $f(x) = \dfrac{4}{3} \times 3(3x-1)^5 = \dfrac{4}{3}u'(x)u^5(x)$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$F(x) = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{1}{5+1}u^{5+1}(x) = \dfrac{2}{9}(3x-1)^6.$

b) On pose $u(x) = x^2 + 4$, alors $u'(x) = 2x$.

Ainsi, $g(x) = \dfrac{7}{2} \times \dfrac{2x}{x^2+4} = \dfrac{7}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par

$G(x) = \dfrac{7}{2} \times \ln(u(x)) = \dfrac{7}{2} \times \ln(x^2+4).$

10 On pose $u(x) = 1 - 2x$, alors $u'(x) = -2$.

Ainsi, $h(x) = -\dfrac{1}{2} \times (-2)(1-2x)^3 = -\dfrac{1}{2}u'(x)u^3(x)$.

Donc une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est :

$H(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3+1}u^{3+1}(x) = -\dfrac{1}{8}(1-2x)^4.$

13 **a)** Les solutions de l'équation différentielle (**E**) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{3x}$ où k est un nombre réel.

b) f est solution de (**E**) donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{3x}$. Or, $f(-1) = 2$, ainsi $ke^{-3} = 2$ d'où $k = 2e^3$.

On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^3e^{3x} = 2e^{3+3x}$.

14 **a)** Pour tout réel x, $f(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) = 0$. f est solution de (**E**) si, et seulement si, $f' = f + 1$, c'est-à-dire $0 = c + 1$ soit $c = -1$.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (**E**) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^x - 1$ avec k un nombre réel.
c) g est solution de (**E**) donc il existe un nombre réel k tel que pour tout réel x, $g(x) = ke^x - 1$. Or $g(1) = 2$, ainsi $ke^1 - 1 = 2$ d'où $k = 3e^{-1}$.
On en déduit que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^{-1}e^x - 1 = 3e^{x-1} - 1$.

Acquérir des automatismes

16 Lily a tort. La fonction $x \mapsto 2x$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$.

17 (2). En effet, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = x^2$ sont les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2$.

18 F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2} \times 2x + 2 \times 1 = 3x^2 - 3x + 2$. Ainsi $F' = f$ et F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

19 F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = 7 \times \cos(x) + 2 \times 1 = 7\cos(x) + 2$. Ainsi $F' = f$ et F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

20 F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = 2e^x + (x^2 + 2)e^x = (x^2 + 2x + 2)e^x$.
Ainsi $F' = f$ et F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

21 **1.** F_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F_1'(x) = 3x^2 - 6x - 24$.
Or $3(x + 2)(x - 4) = 3(x^2 - 2x - 8) = 3x^2 - 6x - 24$.
Ainsi F_1 est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_2.
2. F_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F_2'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.
Or $3(x - 1)^2 - 1 = 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 3x^2 - 6x + 2$.
Ainsi F_2 est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_3.
3. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Ainsi F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_1.

22 **a)** F est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$. F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - (x - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2}$.
Ainsi $F'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$.
b) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g est donc F.

23 f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 10x$. Donc $f'(x) = \frac{10x^2 + 1}{x}$.
Ainsi f est une solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \frac{10x^2 + 1}{x}$.

24 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times e^{2x-3} + x \times 2e^{2x-3}$.
Donc $f'(x) = (2x + 1)e^{2x-3}$.
Ainsi f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = (2x + 1)e^{2x-3}$.

25 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{1}{3} \times (-3\sin(3x - 1))$.
Donc $f'(x) = \sin(3x - 1)$.
Ainsi f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \sin(3x - 1)$.

26 **a)** F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$.
Donc $F'(x) = x(2\ln(x) + 1)$.
Ainsi $F' = f$ et F est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f.
b) L'ensemble des primitives sur $]0;+\infty[$ de la fonction f est constitué des fonctions $x \mapsto x^2\ln(x) + C$ définies sur $]0\,;+\infty[$ où C est une constante réelle.
c) G est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > 0$, $G(x) = x^2\ln(x) + C$.
Or $G(e) = 1$, ainsi $e^2\ln(e) + C = 1$ soit $C = 1 - e^2$.
Donc la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f qui vérifie $G(e) = 1$ est définie par $G(x) = x^2\ln(x) + 1 - e^2$.

27 **a)** F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = 3 \times 4x^3 - \frac{2}{5} \times 2x + 1 = 12x^3 - \frac{4}{5}x + 1$.
Ainsi $F' = f$ et F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
b) L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est constitué des fonctions $x \mapsto 3x^4 - \frac{2}{5}x^2 + x + C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.
G est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui vérifie $G(1) = 0$. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $G(x) = 3x^4 - \frac{2}{5}x^2 + x + C$.

Or $G(1) = 0$, ainsi $3\times 1^4 - \frac{2}{5}\times 1^2 + 1 + C = 0$ soit $C = -\frac{18}{5}$.

Donc la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui vérifie $G(1) = 0$ est définie par $G(x) = 3x^4 - \frac{2}{5}x^2 + x - \frac{18}{5}$.

28 **a)** F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Ainsi $F' = f$ et F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

b) L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est constitué des fonctions $x \mapsto \sqrt{x^2+1} + C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.

G est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui vérifie $G(-1) = 0$. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $G(x) = \sqrt{x^2+1} + C$.

Or $G(-1) = 0$, ainsi $\sqrt{(-1)^2+1} + C = 0$ soit $C = -\sqrt{2}$.

Donc la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui vérifie $G(-1) = 0$ est définie par $G(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}$.

29 **a)** F est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = \frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

Ainsi $F' = f$ et F est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f.

L'ensemble des primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions F_k définies sur $]0\,;+\infty[$ par $F_k(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + k$ où k est une constante réelle.

b) Cette courbe est obtenue par translation de vecteur $k\vec{j}$.

30 **a)** G, H et I sont les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $G(x) = \ln(5x)$, , $H(x) = 1 + \ln(x)$ et $I(x) = 3 - \ln\left(\frac{e}{x}\right)$. G, H et I sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $G'(x) = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x}$,

$H'(x) = \frac{1}{x}$ et $I'(x) = -\frac{-\frac{e}{x^2}}{\frac{e}{x}} = \frac{1}{x}$.

Ainsi pour tout réel $x > 0$, $G'(x) = H'(x) = I'(x) = \frac{1}{x}$ et G, H et I sont des primitives sur $]0\,;+\infty[$ d'une même fonction f : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

b) L'ensemble des primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto 1 + \ln(x) + C$ définies sur $]0\,;+\infty[$ où C est une constante réelle.

F est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f qui vérifie $F(e) = 0$. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > 0$, $F(x) = 1 + \ln(x) + C$.

Or $F(e) = 0$, ainsi $1 + \ln(e) + C = 0$ soit $C = -2$.

Donc la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f qui vérifie $F(e) = 0$ est définie par $F(x) = 1 + \ln(x) - 2 = \ln(x) - 1$.

31 **a)** $F(x) - G(x) = \frac{8 - e^x}{e^x + 2} - \left(\frac{-5e^x}{e^x+2} + 3\right)$.

Ainsi $F(x) - G(x) = \frac{8 - e^x + 5e^x - 3(e^x+2)}{e^x + 2}$.

D'où $F(x) - G(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 2} = 1$.

b) Les fonctions F et G diffèrent donc d'une constante. Les fonctions F et G sont donc les primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction.

32 $F(x) - G(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} - \frac{x^2 + 7x}{x - 2}$.

Ainsi $F(x) - G(x) = \frac{-4x - 1}{x - 2}$.

Les fonctions F et G ne diffèrent donc pas d'une constante. Les fonctions F et G ne sont donc pas les primitives d'une même fonction.

33 **a)** Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto x^2\ln(x)$ est donc la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}\left(-\frac{1}{3} + \ln(x)\right)$.

Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f est donc la fonction F définie par $F(x) = 5\left(\frac{x^3}{3}\left(-\frac{1}{3} + \ln(x)\right)\right) + \frac{3}{2}x^2$

soit $F(x) = \frac{5}{3}x^3\left(-\frac{1}{3} + \ln(x)\right) + \frac{3}{2}x^2$

b) L'ensemble des primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto \frac{5}{3}x^3\left(-\frac{1}{3} + \ln(x)\right) + \frac{3}{2}x^2 + C$ définies sur $]0\,;+\infty[$ où C est une constante réelle.

G est la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f qui vérifie $G(1) = 2$. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > 0$,

$$G(x) = \frac{5}{3}x^3\left(-\frac{1}{3} + \ln(x)\right) + \frac{3}{2}x^2 + C.$$

Or $G(1) = 2$, ainsi $\frac{17}{18} + C = 2$ soit $C = \frac{19}{18}$.

Donc la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f qui vérifie $G(1) = 2$ est définie par

$G(x)=\frac{5}{3}x^3\left(-\frac{1}{3}+\ln(x)\right)+\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{18}$.

34 F est une primitive sur $[-2\,;5]$ de f. Ainsi $F'=f$. Or f est positive sur l'intervalle $[-2\,;3]$ et négative sur l'intervalle $[3\,;5]$. Donc F est croissante sur l'intervalle $[-2\,;3]$ et décroissante sur l'intervalle $[3\,;5]$.

35 F est une primitive sur $[-3\,;4]$ de f. Ainsi $F'=f$. Or f est positive sur l'intervalle $[-1\,;3]$. Donc F est croissante sur l'intervalle $[-1\,;3]$. La courbe pouvant représenter une primitive de f est la courbe $\mathscr{C}_3$.

36 **a)** Vrai. En effet, ainsi la fonction f serait négative lorsque la fonction F serait décroissante et positive lorsque la fonction F serait croissante.

b) Vrai. En effet, ainsi la fonction f serait négative lorsque la fonction F serait décroissante et positive lorsque la fonction F serait croissante.

37 **a)** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto 2$ est $x\mapsto 2x$.

b) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto x$ est $x\mapsto \frac{1}{2}x^2$.

c) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto x^2$ est $x\mapsto \frac{1}{3}x^3$.

d) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto e^x$ est $x\mapsto e^x$.

38 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x(x^2+1)$.

On pose $u(x)=x^2+1$, alors $u'(x)=2x$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x)=u'(x)u(x)$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=\frac{1}{2}u^2(x)=\frac{1}{2}(x^2+1)^2$.

39 **a)** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x$.

b) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x$.

40 **a)** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=\sin(x)-\cos(x)$.

b) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=5\sin(x)$.

41 **a)** Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=5e^x+4x$.

b) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=-2\left(\frac{3}{2}x^2-e^x\right)=-3x^2+2e^x$.

42 **a)** Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $F(x)=3\ln(x)$.

b) Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $F(x)=-\frac{2}{x}+4x$.

43 **a)** Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $F(x)=5\times 2\sqrt{x}+9e^x=10\sqrt{x}+9e^x$.

b) Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $F(x)=3\times\frac{1}{4}x^4-2\times\frac{1}{3}x^3+5\times\frac{1}{2}x^2-4\ln(x)$

soit $F(x)=\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-4\ln(x)$.

44 **a)** Pour tout réel $x>0$, $f(x)=\frac{1}{x}\times\ln(x)$.

On pose $u(x)=\ln(x)$, alors $u'(x)=\frac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout réel $x>0$, $f(x)=u'(x)u(x)$.

Donc une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $F(x)=\frac{1}{2}u^2(x)=\frac{1}{2}(\ln(x))^2$.

b) On pose $u(x)=x^2-x+4$, alors $u'(x)=2x-1$.

Ainsi, pour tout réel $x>0$, $h(x)=u'(x)u^5(x)$.

Donc une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de h est définie par $H(x)=\frac{1}{5+1}u^{5+1}(x)=\frac{1}{6}(x^2-x+4)^6$.

45 **a)** On pose $u(x)=x^2-2x+4$, alors $u'(x)=2x-2$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)u^3(x)$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+1}u^{3+1}(x)=\frac{1}{8}(x^2-2x+4)^4$.

b) On pose $u(x)=e^{3x}+1$, alors $u'(x)=3e^{3x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x)=\frac{1}{3}u'(x)u^4(x)$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $G(x)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4+1}u^{4+1}(x)=\frac{1}{15}(e^{3x}+1)^5$.

46 **a)** On pose $u(x)=1+e^x$, alors $u'(x)=e^x$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=\ln(u(x))=\ln(1+e^x)$.

b) Pour tout réel $x>1$, $h(x)=\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$.

On pose $u(x)=\ln(x)$, alors $u'(x)=\frac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout réel $x > 1$, $h(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc une primitive sur $]1;+\infty[$ de h est définie par $\mathrm{H}(x) = \ln(u(x)) = \ln(\ln(x))$.

47 **a)** On pose $u(x) = x^2 + 2x + 3$. Le discriminant étant négatif, la fonction u est du signe de $1 > 0$ donc pour tout réel x, $u(x) > 0$. On a $u'(x) = 2x + 2$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(u(x)) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3)$.

b) On pose $u(x) = \mathrm{e}^{5x} + 1$, alors $u'(x) = 5\mathrm{e}^{5x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{5}\ln(u(x)) = \dfrac{1}{5}\ln(\mathrm{e}^{5x} + 1)$.

48 **a)** On pose $u(x) = -8x$, alors $u'(x) = -8$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{-8} \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{-8}\mathrm{e}^{u(x)} = -\dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-8x}$.

b) On pose $u(x) = 5x$, alors $u'(x) = 5$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{3}{5} \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{u(x)} = \dfrac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}$.

b) On pose $u(x) = x^2 + 2x$, alors $u'(x) = 2x + 2$.
Ainsi, pour tout réel x, $h(x) = 2 \times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de h est définie par $\mathrm{H}(x) = 2\mathrm{e}^{u(x)} = 2\mathrm{e}^{x^2+2x}$.

49 **a)** On pose $u(x) = x^2 + x + 1$, alors $u'(x) = 2x + 1$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2 + x + 1}$.

b) On pose $u(x) = \sin(x)$, alors $u'(x) = \cos(x)$.

Ainsi, pour tout réel x de $]0;\pi[$, $g(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Donc une primitive sur $]0;\pi[$ de g est définie par $\mathrm{G}(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{\sin(x)}$.

50 **a)** On pose $u(x) = x^2 + 1$, alors $u'(x) = 2x$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$.

b) On pose $u(x) = \mathrm{e}^{3x} + 4$, alors $u'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = 3 \times \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $\mathrm{G}(x) = 3 \times 2\sqrt{u(x)} = 6\sqrt{\mathrm{e}^{3x} + 4}$

51 **a)** On pose $u(x) = 7x + \dfrac{\pi}{3}$, alors $u'(x) = 7$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = u'(x)\cos(u(x))$.
Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\mathrm{F}(x) = \sin(u(x)) = \sin\left(7x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) On pose $u(x) = 9x$, alors $u'(x) = 9$.
Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = u'(x)\sin(u(x))$.
Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $\mathrm{G}(x) = -\cos(u(x)) = -\cos(9x)$.

52 **a)** On pose $u(x) = \dfrac{\pi}{4} - x$, alors $u'(x) = -1$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -u'(x)\cos(u(x))$.
Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\mathrm{F}(x) = -\sin(u(x)) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$.

b) On pose $u(x) = 3x$, alors $u'(x) = 3$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = -\dfrac{2}{3}u'(x)\sin(u(x))$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $\mathrm{G}(x) = -\dfrac{2}{3} \times (-\cos(u(x))) = \dfrac{2}{3}\cos(3x)$.

53 Une primitive sur $]1;+\infty[$ de f est définie par $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1)$.

L'ensemble des primitives sur $]1;+\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) + \mathrm{C}$ définies sur $]1;+\infty[$ où C est une constante réelle.

F est une primitive sur $]1;+\infty[$ de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > 1$, $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) + \mathrm{C}$.

Or $\mathrm{F}(2) = 0$, ainsi $6 + \mathrm{C} = 0$ soit $\mathrm{C} = -6$.
Donc la primitive sur $]1;+\infty[$ de f qui s'annule en 2 est définie par $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) - 6$.

54 Une primitive sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ de g est définie par $G(x) = -\ln(\cos(x))$.

L'ensemble des primitives sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction g est donc constitué des fonctions $x \mapsto -\ln(\cos(x)) + C$ définies sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ où C est une constante réelle.

55 **a)** $2 + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2(x+1)}{x+1} + \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2x+5}{x+1}$.

Ainsi pour tout x de $]-1;+\infty[$, $h(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

b) Donc une primitive sur $]-1;+\infty[$ de h est définie par $H(x) = 2x + 3\ln(x+1)$.

L'ensemble des primitives sur $]-1;+\infty[$ de la fonction h est donc constitué des fonctions $x \mapsto 2x + 3\ln(x+1) + C$ définies sur $]-1;+\infty[$ où C est une constante réelle.

F est la primitive sur $]-1;+\infty[$ de h qui s'annule en 1. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > -1$, $F(x) = 2x + 3\ln(x+1) + C$.

Or $F(1) = 0$, ainsi $2 + 3\ln(2) + C = 0$ soit $C = -2 - 3\ln(2)$.

Donc la primitive sur $]-1;+\infty[$ de h qui s'annule en 1 est définie par $F(x) = 2x + 3\ln(x+1) - 2 - 3\ln(2)$.

56 **a)** $2 + \dfrac{e^x}{e^x+4} = \dfrac{2(e^x+4)}{e^x+4} + \dfrac{e^x}{e^x+4}$.

Donc $2 + \dfrac{e^x}{e^x+4} = \dfrac{3e^x+8}{e^x+4}$.

Ainsi pour tout x, $k(x) = 2 + \dfrac{e^x}{e^x+4}$.

b) Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de k est définie par $K(x) = 2x + \ln(e^x+4)$.

L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction k est donc constitué des fonctions $x \mapsto 2x + \ln(e^x+4) + C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.

K est une primitive sur $\mathbb{R}$ de k. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $K(x) = 2x + \ln(e^x+4) + C$.

Or $K(0) = 0$, ainsi $\ln(5) + C = 0$ soit $C = -\ln(5)$.

Donc la primitive sur $\mathbb{R}$ de k qui vérifie $K(0) = 0$ est définie par $K(x) = 2x + \ln(e^x+4) - \ln(5)$.

57 Alix a tort. La fonction $x \mapsto e^{3x}$ est solution de l'équation $y' = 3y$.

58 (3). En effet, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{7x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel, en particulier pour $k = 3$.

59 Pour tout réel x, $f(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) = 0$. f est solution de l'équation différentielle $y' = 2y + 4$ si, et seulement si, $f' = 2f + 4$, c'est-à-dire $0 = 2c + 4$ soit $c = -2$.

Ainsi, pour tout x réel, $f(x) = -2$.

60 **a)** Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 5y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{5x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{3}{4}y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{3}{4}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

c) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -8{,}2y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-8{,}2x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

61 **a)** L'équation différentielle $2y' = 5y$ est équivalente à $y' = \dfrac{5}{2}y$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' = 5y$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{5}{2}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\theta' = -\dfrac{1}{2}\theta$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{1}{2}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

c) L'équation différentielle $4u' = 3u$ est équivalente à $u' = \dfrac{3}{4}u$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4u' = 3u$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{3}{4}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

62 **a)** L'équation différentielle $5g - 7g' = 0$ est équivalente à $g' = \dfrac{5}{7}g$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $5g - 7g' = 0$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{5}{7}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^x$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

c) L'équation différentielle $-y' + 2y = 0$ est équivalente à $y' = 2y$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-y' + 2y = 0$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

63 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{7x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{7x}$. Or $f(0) = 1$, ainsi $ke^0 = 1$ soit $k = 1$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y$ qui vérifie $f(0) = 1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{7x}$.

64 L'équation différentielle $y' + \frac{1}{4}y = 0$ est équivalente à $y' = -\frac{1}{4}y$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{4}y = 0$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{1}{4}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel. f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{4}y = 0$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{-\frac{1}{4}x}$. Or $f(3) = -1$ ainsi $ke^{-\frac{3}{4}} = -1$ soit $k = -e^{\frac{3}{4}}$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{4}y = 0$ qui vérifie $f(3) = -1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -e^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{1}{4}x} = -e^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x}$.

65 L'équation différentielle $3y' = -7y$ est équivalente à $y' = -\frac{7}{3}y$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $3y' = -7y$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{7}{3}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $3y' = -7y$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{-\frac{7}{3}x}$. Or $f(2) = -5$, ainsi $ke^{-\frac{14}{3}} = -5$ soit $k = -5e^{\frac{14}{3}}$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $3y' = -7y$ qui vérifie $f(2) = -5$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5e^{\frac{14}{3}}e^{-\frac{7}{3}x} = -5e^{\frac{14}{3}-\frac{7}{3}x}$.

66 f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ donc, pour tout réel x, $f'(x) = 3f(x)$. Donc $f'(1) = 3f(1)$. Or $f'(1) = 2$, ainsi $2 = 3f(1)$ soit $f(1) = \frac{2}{3}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{3x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{3x}$.

Or $f(1) = \frac{2}{3}$, ainsi $ke^3 = \frac{2}{3}$ soit $k = \frac{2}{3}e^{-3}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ qui vérifie $f'(1) = 2$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{3}e^{-3}e^{3x} = \frac{2}{3}e^{-3+3x}$.

67 L'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ est équivalente à $y' = -\frac{5}{2}y$.
f est alors solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{5}{2}y$ donc, pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{5}{2}f(x)$.
Donc $f'(2) = -\frac{5}{2}f(2)$. Or $f'(2) = 0$, ainsi $f(2) = 0$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{5}{2}y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{5}{2}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{5}{2}y$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{-\frac{5}{2}x}$. Or $f(2) = 0$, ainsi $ke^{-5} = 0$ soit $k = 0$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ qui vérifie $f'(2) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$.

68 La fonction f admet une expression de la forme $x \mapsto ke^{-4x}$. Donc f est une solution de l'équation différentielle $y' = -4y$.

69 Comme $2 > 0$, les courbes représentant des solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont les courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_4$.
L'équation différentielle $y' + 0{,}5y = 0$ est équivalente à $y' = -0{,}5y$. Comme $-0{,}5 < 0$, les courbes représentant des solutions de l'équation différentielle $y' = -0{,}5y$ sont les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$.

70 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = c_1e^{3x} - \frac{7}{3}$.
Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 3c_1e^{3x}$. De plus, pour tout réel x, $3f(x) + 7 = 3\left(c_1e^{3x} - \frac{7}{3}\right) + 7 = 3c_1e^{3x}$.
On en déduit que pour tout réel x, $f'(x) = 3f(x) + 7$.
Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y + 7$.

71 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7e^{3x} - \frac{2}{3}$. Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 21e^{3x}$.
De plus, pour tout réel x,

$$3f(x) + 2 = 3\left(7e^{3x} - \frac{2}{3}\right) + 2 = 21e^{3x}.$$

On en déduit que pour tout réel x, $f'(x) = 3f(x) + 2$.

Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y + 2$.

72 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-7x} - 2$.
Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = -14e^{-7x}$.

Donc, pour tout réel x,

$f'(x) + 7f(x) + 14 = -14e^{-7x} + 7(2e^{-7x} - 2) + 14 = 0$.

Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 7y + 14 = 0$.

73 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-3x} + 3$.
Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = -15e^{-3x}$. Donc, pour tout réel x, $3f(x) + f'(x) = 3(5e^{-3x} + 3) - 15e^{-3x} = 9$.

Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $3y + y' = 9$.

74 a) Pour tout réel x, $g(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, donc $g'(x) = 0$. g est solution de **(E)** si, et seulement si, $g' = 2g + 1$, c'est-à-dire $0 = 2c + 1$ soit $c = -\dfrac{1}{2}$.

b) f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f' = 2f + 1$.

Or $g' = 2g + 1$. Ainsi, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f' - g' = 2(f - g)$ c'est-à-dire $(f - g)' = 2(f - g)$. Autrement dit, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = 2y$.

c) f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = ke^{2x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x) = ke^{2x} - \dfrac{1}{2}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y + 1$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{2x} - \dfrac{1}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

75 a) Pour tout réel x, $g(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, donc $g'(x) = 0$. g est solution de **(E)** si, et seulement si, $g' = -3g + 4$, c'est-à-dire $0 = -3c + 4$ soit $c = \dfrac{4}{3}$.

b) f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f' = -3f + 4$.

Or $g' = -3g + 4$. Ainsi, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f' - g' = -3(f - g)$ c'est-à-dire $(f - g)' = -3(f - g)$. Autrement dit, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = -3y$.

c) f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = ke^{-3x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x) = ke^{-3x} + \dfrac{4}{3}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -3y + 4$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-3x} + \dfrac{4}{3}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

d) f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -3y + 4$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{-3x} + \dfrac{4}{3}$.

Or $f(-1) = 0$, ainsi $ke^{3} + \dfrac{4}{3} = 0$ soit $k = -\dfrac{4}{3}e^{-3}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -3y + 4$ qui vérifie $f(-1) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = -\dfrac{4}{3}e^{-3}e^{-3x} + \dfrac{4}{3} = -\dfrac{4}{3}e^{-3-3x} + \dfrac{4}{3}$.

76 a) Pour tout réel x, $g(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, donc $g'(x) = 0$. g est solution de **(E)** si, et seulement si, $g' = \dfrac{1}{4}g + 6$, c'est-à-dire $0 = \dfrac{1}{4}c + 6$ soit $c = -24$.

b) f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f' = \dfrac{1}{4}f + 6$.

Or $g' = \dfrac{1}{4}g + 6$. Ainsi, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f' - g' = \dfrac{1}{4}(f - g)$ c'est-à-dire $(f - g)' = \dfrac{1}{4}(f - g)$. Autrement dit, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{4}y$.

c) f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = ke^{\frac{1}{4}x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x) = ke^{\frac{1}{4}x} - 24$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{4}y + 6$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{1}{4}x} - 24$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

d) f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{4}y + 6$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{\frac{1}{4}x} - 24$.

Or $f(4) = 0$, ainsi $ke^{1} - 24 = 0$ soit $k = 24e^{-1}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{4}y + 6$ qui s'annule en 4 est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 24e^{-1}e^{\frac{1}{4}x} - 24 = 24e^{-1+\frac{1}{4}x} - 24$.

77 a) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y - 3$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x} - \dfrac{-3}{2}$ soit $x \mapsto ke^{2x} + \dfrac{3}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 3y = -4$ soit $y' = -3y - 4$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-3x} - \dfrac{-4}{-3}$ soit $x \mapsto ke^{-3x} - \dfrac{4}{3}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

c) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2 = y$ soit $y' = y + 2$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{x} - \dfrac{2}{1}$ soit $x \mapsto ke^{x} - 2$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

78 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{7x} - \dfrac{-5}{7}$ soit $x \mapsto ke^{7x} + \dfrac{5}{7}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{7x} + \dfrac{5}{7}$.

Or $f(-2) = -3$, ainsi $ke^{-14} + \dfrac{5}{7} = -3$ soit $k = -\dfrac{26}{7}e^{14}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ qui vérifie $f(-2) = -3$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{26}{7}e^{14}e^{7x} + \frac{5}{7} = -\frac{26}{7}e^{14+7x} + \frac{5}{7}.$$

79 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 0{,}2y - 100$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{0{,}2x} - \dfrac{-100}{0{,}2}$ soit $x \mapsto ke^{0{,}2x} + 500$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 0{,}2y - 100$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{0{,}2x} + 500$.

Or $f(0) = -2$, ainsi $ke^{0} + 500 = -2$ soit $k = -502$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 0{,}2y - 100$ qui vérifie $f(0) = -2$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -502e^{0{,}2x} + 500$.

80 f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 4y - 3$ donc, pour tout réel x, $f'(x) = 4f(x) - 3$. Donc $f'(0) = 4f(0) - 3$. Or $f'(0) = 3$, ainsi $3 = 4f(0) - 3$ soit $f(0) = \dfrac{3}{2}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 4y - 3$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{4x} - \dfrac{-3}{4}$ soit $x \mapsto ke^{4x} + \dfrac{3}{4}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 4y - 3$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{4x} + \dfrac{3}{4}$.

Or $f(0) = \dfrac{3}{2}$, ainsi $ke^{0} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2}$ soit $k = \dfrac{3}{4}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 4y - 3$ qui vérifie $f'(0) = 3$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}e^{4x} + \dfrac{3}{4}$.

81 f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ donc, pour tout réel x, $-2f'(x) + 11f(x) = 4$. Donc $-2f'(-1) + 11f(-1) = 4$. Or $f'(-1) = 1$, ainsi $-2 + 11f(-1) = 4$

soit $f(-1) = \dfrac{6}{11}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ soit $y' = \dfrac{11}{2}y - 2$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{11}{2}x} - \dfrac{-2}{\frac{11}{2}}$ soit $x \mapsto ke^{\frac{11}{2}x} + \dfrac{4}{11}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{\frac{11}{2}x} + \dfrac{4}{11}$.

Or $f(-1) = \dfrac{6}{11}$, ainsi $ke^{-\frac{11}{2}} + \dfrac{4}{11} = \dfrac{6}{11}$ soit $k = \dfrac{2}{11}e^{\frac{11}{2}}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ qui vérifie $f'(-1) = 1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{11}e^{\frac{11}{2}+\frac{11}{2}x} + \dfrac{4}{11}$.

82 f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' - 5y = 2$ donc, pour tout réel x, $4f'(x) - 5f(x) = 2$. Donc $4f'(0) - 5f(0) = 2$.

Or $f'(0) = 0$, ainsi $-5f(0) = 2$ soit $f(0) = -\dfrac{2}{5}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' - 5y = 2$ soit $y' = \dfrac{5}{4}y + \dfrac{1}{2}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{5}{4}x} - \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}}$ soit $x \mapsto ke^{\frac{5}{4}x} - \dfrac{2}{5}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' - 5y = 2$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{\frac{5}{4}x} - \dfrac{2}{5}$.

Or $f(0) = -\dfrac{2}{5}$, ainsi $ke^{0} - \dfrac{2}{5} = -\dfrac{2}{5}$ soit $k = 0$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' - 5y = 2$ qui vérifie $f'(0) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{2}{5}$.

83 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $5y' + y = 2$ soit $y' = -\frac{1}{5}y + \frac{2}{5}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{1}{5}x} - \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{1}{5}}$ soit $x \mapsto ke^{-\frac{1}{5}x} + 2$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $5y' + y = 2$ qui vérifie $f(0) = 4$. Donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{-\frac{1}{5}x} + 2$.

Or $f(0) = 4$, ainsi $ke^0 + 2 = 4$ soit $k = 2$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $5y' + y = 2$ qui vérifie $f(0) = 4$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-\frac{1}{5}x} + 2$.

84 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$. Donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Or $f(c) = 0$, ainsi $ke^{ac} - \frac{b}{a} = 0$ soit $k = \frac{b}{a}e^{-ac}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ qui vérifie $f(c) = 0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{b}{a}e^{-ac}e^{ax} - \frac{b}{a} = \frac{b}{a}e^{-ac+ax} - \frac{b}{a}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \frac{b}{a}(e^{a(x-c)} - 1)$.

b)

```
from math import *

def Image(a,b,c,x):
    return (b/a)*(exp(a*(x-c))-1)
```

85 **a)** Pour tout réel x, $g(x) = -x - 4$, donc $g'(x) = -1$. Ainsi, pour tout réel x, $4g'(x) - g(x) = 4 \times (-1) - (-x - 4) = x$.

Donc la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de **(E)**.

b) f est solution de **(E)** si, et seulement si, $4f' - f = x$.

Or $4g' - g = x$. Ainsi, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $4(f' - g') - (f - g) = 0$ c'est-à-dire $4(f - g)' - (f - g) = 0$. Autrement dit, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle $4y' - y = 0$ soit $y' = \frac{1}{4}y$.

c) f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = ke^{\frac{1}{4}x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x) = ke^{\frac{1}{4}x} - x - 4$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' - y = x$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{1}{4}x} - x - 4$. définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

86 **a)** Pour tout réel x, $g(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$, donc $g'(x) = \frac{3}{5}e^{3x}$. Ainsi, pour tout réel x, $g'(x) + 2g(x) = \frac{3}{5}e^{3x} + 2\frac{1}{5}e^{3x} = e^{3x}$.

Donc la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de **(E)**.

b) f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f' + 2f = e^{3x}$.

Or $g' + 2g = e^{3x}$. Ainsi, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $(f' - g') + 2(f - g) = 0$ c'est-à-dire $(f - g)' + 2(f - g) = 0$. Autrement dit, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ soit $y' = -2y$.

c) f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = ke^{-2x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = e^{3x}$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

87 **a)** Pour tout réel x, $g(x) = \cos(x) + \sin(x)$, donc $g'(x) = -\sin(x) + \cos(x)$. Ainsi, pour tout réel x, $g'(x) + g(x) = 2\cos(x)$.

Donc la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de **(E)**.

b) f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f' + f = 2\cos(x)$.

Or $g' + g = 2\cos(x)$. Ainsi, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $(f' - g') + (f - g) = 0$ c'est-à-dire $(f - g)' + (f - g) = 0$. Autrement dit, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$ soit $y' = -y$.

c) f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x) - g(x) = ke^{-x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x) = ke^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = 2\cos(x)$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

Pour se tester

88 **1.** C **2.** D **3.** D **4.** B

89 **1.** B, D **2.** B, C **3.** A, D **4.** A, B, D

90 **1.** Faux. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont les fonctions $x \mapsto k\mathrm{e}^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = k\mathrm{e}^{2x}$. Or $f(0) = 1$, ainsi $k\mathrm{e}^0 = 1$ soit $k = 1$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y$ qui vérifie $f(0) = 1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$. On en déduit que $f(1) = \mathrm{e}^2 \neq 0$.
On peut aussi écrire que les solutions d'une telle équation différentielle sont soit nulle sur $\mathbb{R}$ soit ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = 1$, on se trouve dans le second cas. Ainsi $f(1)$ ne peut être égal à 0.
2. Vrai. En effet, la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{1 \times x - (x+1) \times 1}{x^2}\mathrm{e}^x + \frac{x+1}{x}\mathrm{e}^x.$$

Ainsi $f'(x) - f(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$.
On en déduit que f est solution sur $]0\,;+\infty[$ de **(E)**.

S'entraîner

91 (1) f est une fonction dérivable et non nulle sur $\mathbb{R}$.
Pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
(2) Pour tout réel x, $f(x) = f(x) \times f(0)$.
(3) f n'est pas la fonction nulle donc il existe un réel c tel que $f(c) \neq 0$. En appliquant (2) pour $x = c$, il vient $f(0) = \dfrac{f(c)}{f(c)} = 1$.
(4) • $g(y) = f(x+y)$ donc $g'(y) = 1 \times f'(x+y)$
• $g(y) = f(x) \times f(y)$ donc $g'(y) = f(x) \times f'(y)$
(5) D'après (4), pour tous réels x et y, $f'(x+y) = f(x) \times f'(y)$ donc, en particulier, pour $y = 0$, $f' = f \times f'(0)$.
(6) D'après (5), f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ avec $a = f'(0)$.
(7) Ainsi, pour tout réel x, il existe un réel k tel que $f(x) = k\mathrm{e}^{ax}$.
Or $f(0) = 1$, ainsi $k\mathrm{e}^0 = 1$ soit $k = 1$.
Donc, pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

92 **a)** • Sur $]0\,;+\infty[$:
F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$.
Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{x^2} - 3$. Ainsi G est dérivable $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{G}'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$.
Ainsi, les fonctions F et G sont deux primitives d'une même fonction sur $]0\,;+\infty[$.
• Sur $]-\infty\,;0[$:
F est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et, pour tout réel $x < 0$, $\mathrm{F}'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$.
Pour tout réel $x < 0$, $\mathrm{G}(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2$. Ainsi G est dérivable $]-\infty\,;0[$ et, pour tout réel $x < 0$, $\mathrm{G}'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$.
Ainsi, les fonctions F et G sont deux primitives d'une même fonction sur $]-\infty\,;0[$.
b) • S'il existe une constante réelle C telle que, pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$. Alors, si $x > 0$, $\dfrac{1}{x^2} - 3 = \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{C}$ donc $\mathrm{C} = -3$.
Et, si $x < 0$, $\dfrac{1}{x^2} + 2 = \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{C}$ donc $\mathrm{C} = 2$.
On obtient donc une contradiction.
Ainsi, il n'existe pas de constante réelle C telle que, pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$.
• On en déduit que les fonctions F et G ne diffèrent pas d'une constante sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$. Elles ne sont donc pas primitives d'une même fonction f sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

93 F est une primitive sur I de f. g est la fonction définie sur I par $g(x) = \mathrm{F}(-x) - \mathrm{F}(x)$.
g est dérivable et pour tout réel x de I, $g'(x) = -1 \times \mathrm{F}'(-x) - \mathrm{F}'(x) = -\mathrm{F}'(-x) - \mathrm{F}'(x)$.
Or, pour tout réel x de I, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$. Ainsi, pour tout réel x de I, $g'(x) = -f(-x) - f(x)$.
Si la fonction f est impaire sur I, alors, pour tout réel x de I, $f(-x) = -f(x)$.
On en déduit donc que, pour tout réel x de I, $g'(x) = 0$ et g est une fonction constante.
Ainsi, il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel x de I, $g(x) = \mathrm{C}$.
Or $0 \in \mathrm{I}$ et $g(0) = \mathrm{F}(0) - \mathrm{F}(0) = 0$ d'où $\mathrm{C} = 0$.

Donc, pour tout réel x de I, $g(x) = 0$.
Autrement dit, pour tout réel x de I, $F(-x) = F(x)$.
La fonction F est donc paire sur I.

94 Un point M d'abscisse x appartient à la courbe représentative d'une fonction f si ses coordonnées sont $(x\,;f(x))$.
La pente de la tangente au point M est égale à $f'(x)$.
On cherche donc une fonction f telle que $f(1) = 1$ et pour tout x réel, $f'(x) = 2f(x)$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{2x}$.
Or $f(1) = 1$, ainsi $ke^2 = 1$ soit $k = e^{-2}$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y$ qui vérifie $f(1) = 1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2}e^{2x}$ soit $f(x) = e^{2x-2}$.
La courbe $\mathscr{C}$ admet donc comme équation $y = e^{2x-2}$.

95 **Parcours 1 :**
Pour tout réel $x > 1$, $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$.
Pour tout réel $x > 1$, on pose $u(x) = \ln(x)$, alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Ainsi, pour tout réel $x > 1$, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
Donc une primitive sur $]1\,;+\infty[$ de f est définie par $G(x) = \ln(u(x)) = \ln(\ln(x))$.
L'ensemble des primitives sur $]1\,;+\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto \ln(\ln(x)) + C$ définies sur $]1\,;+\infty[$ où C est une constante réelle.
F est une primitive sur $]1\,;+\infty[$ de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > 1$, $F(x) = \ln(\ln(x)) + C$.
Or $F(e) = 0$, ainsi $\ln(\ln(e)) + C = 0$ soit $C = 0$.
Donc la primitive sur $]1\,;+\infty[$ de f qui vérifie $F(e) = 0$ est définie par $F(x) = \ln(\ln(x))$.
Parcours 2 :
a) Pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.
On pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = -u'(x)e^{u(x)}$.
b) Donc une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $F(x) = -e^{u(x)} = -e^{\frac{1}{x}}$.
L'ensemble des primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto -e^{\frac{1}{x}} + C$ définies sur $]0\,;+\infty[$ où C est une constante réelle.
c) G est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > 0$, $G(x) = -e^{\frac{1}{x}} + C$.
Or $G(1) = 0$, ainsi $-e + C = 0$ soit $C = e$.
Donc la primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f qui vérifie $G(1) = 0$ est définie par $G(x) = -e^{\frac{1}{x}} + e$.

96 **a)** La fonction f est définie comme quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \neq 0$. Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Pour tout réel x, on pose $u(x) = e^x + e^{-x}$, alors $u'(x) = e^x - e^{-x}$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $G(x) = \ln(u(x)) = \ln(e^x + e^{-x})$.
L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto \ln(e^x + e^{-x}) + C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.
c) F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $F(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + C$.
Or $F(0) = -3$, ainsi $\ln(2) + C = -3$ soit $C = -3 - \ln(2)$.
Donc la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui vérifie $F(0) = -3$ est définie par $F(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - 3 - \ln(2)$.

97 **a)** Pour tout réel x,
$$1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} - \frac{e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^2} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}.$$
Donc pour tout réel x,
$$1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - e^x(e^x+1) - e^x}{(e^x+1)^2}.$$
Ainsi pour tout réel x,
$$1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - e^{2x} - e^x - e^x}{(e^x+1)^2}.$$
On en déduit donc que pour tout réel x,
$$1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1}{(e^x+1)^2}.$$
b) Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par
$G(x) = x - \ln(e^x + 1) + \dfrac{1}{e^x + 1}$.
L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto x - \ln(e^x + 1) + \dfrac{1}{e^x+1} + C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.

F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $\mathrm{F}(x)=x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+\mathrm{C}$.

Or $\mathrm{F}(0)=1$, ainsi $-\ln(2)+\dfrac{1}{2}+\mathrm{C}=1$

soit $\mathrm{C}=\ln(2)+\dfrac{1}{2}$.

Donc la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui vérifie $\mathrm{F}(0)=1$ est définie par $\mathrm{F}(x)=x-\ln(\mathrm{e}^x+1)+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+\ln(2)+\dfrac{1}{2}$.

98 **a)** Pour tout réel x de $]-1\,;0[$,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{1+x}+\frac{c}{(1+x)^2}$$
$$=\frac{a(1+x)^2}{x(1+x)^2}+\frac{bx(1+x)}{x(1+x)^2}+\frac{cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{a(1+x)^2+bx(1+x)+cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{a(1+2x+x^2)+b(x+x^2)+cx}{x(1+x)^2}$$
$$=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}.$$

b) Pour tout réel x de $]-1\,;0[$,

$g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{1+x}+\dfrac{c}{(1+x)^2}$ est équivalent à pour tout réel x de $]-1\,;0[$,

$$\frac{1}{x(1+x)^2}=\frac{(a+b)x^2+(2a+b+c)x+a}{x(1+x)^2}.$$

Ainsi, par identification, on a le système d'équations suivant : $\begin{cases} a+b &= 0\\ 2a+b+c &= 0.\\ a &= 1\end{cases}$

On en déduit que: $a=1$, $b=-1$ et $c=-1$.

D'où, pour tout réel x de $]-1\,;0[$,

$$g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}.$$

c) Sur $]-1\,;0[$, $x<0$ donc $-x>0$, ainsi une primitive sur $]-1\,;0[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ soit $x\mapsto\dfrac{-1}{-x}$ est la fonction $x\mapsto\ln(-x)$.

Donc une primitive sur $]-1\,;0[$ de g est définie par $\mathrm{G}(x)=\ln(-x)-\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}$.

L'ensemble des primitives sur $]-1\,;0[$ de la fonction g est donc constitué des fonctions $x\mapsto\ln(-x)-\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}+\mathrm{C}$ définies sur $]-1\,;0[$ où C est une constante réelle.

99 **a)** Pour tout réel $x>0$,

$$f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{4}{x^2}.$$

Ainsi, pour tout réel $x>0$, $f(x)=1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}$.

b) Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $\mathrm{F}(x)=x-5\ln(x)-\dfrac{4}{x}$.

L'ensemble des primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x\mapsto x-5\ln(x)-\dfrac{4}{x}+\mathrm{C}$ définies sur $]0\,;+\infty[$ où C est une constante réelle.

100 **a)** La fonction F est dérivable et pour tout réel x,
$\mathrm{F}'(x)=(2ax+b)\mathrm{e}^{2x}+(ax^2+bx+c)\times 2\mathrm{e}^{2x}$ soit
$\mathrm{F}'(x)=(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)\mathrm{e}^{2x}$.

b) Pour tout réel x, $\mathrm{F}'(x)=f(x)$ est équivalent à, pour tout réel x, $(2ax^2+(2a+2b)x+b+2c)\mathrm{e}^{2x}=4x^2\mathrm{e}^{2x}$.

Ainsi, par identification, on a le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2a &= 4\\ 2a+2b &= 0.\\ b+2c &= 0\end{cases}$

On en déduit que : $a=2$, $b=-2$ et $c=1$.

c) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\mathrm{F}(x)=(2x^2-2x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

101 **a)** La fonction f est dérivable et pour tout réel x,
$f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}\sin(x)+\mathrm{e}^{2x}\cos(x)$

soit $f'(x)=\mathrm{e}^{2x}(2\sin(x)+\cos(x))$.

La fonction f' est dérivable et pour tout réel x,
$f''(x)=2\mathrm{e}^{2x}(2\sin(x)+\cos(x))+\mathrm{e}^{2x}(2\cos(x)-\sin(x))$

soit $f''(x)=\mathrm{e}^{2x}(3\sin(x)+4\cos(x))$.

b) Pour tout réel x, $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ est équivalent à, pour tout réel x,
$\mathrm{e}^{2x}\sin(x)=\mathrm{e}^{2x}((2a+3b)\sin(x)+(a+4b)\cos(x))$.

Ce qui est équivalent à, pour tout réel x,
$\mathrm{e}^{2x}\sin(x)=\mathrm{e}^{2x}((2a+3b)\sin(x)+(a+4b)\cos(x))$.

Ainsi, par identification, on a le système d'équations suivant : $\begin{cases} 2a+3b &= 1(\ell_1)\\ a+4b &= 0(\ell_2)\end{cases}$

$(\ell_1-2\ell_2)$ donne $-5b=1$ d'où $b=-\dfrac{1}{5}$ et $a=\dfrac{4}{5}$.

On en déduit que, pour tout réel x,

$f(x)=\dfrac{4}{5}f'(x)-\dfrac{1}{5}f''(x)$.

c) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est donc définie par $\mathrm{F}(x)=\dfrac{4}{5}f(x)-\dfrac{1}{5}f'(x)$. C'est-à-dire, pour tout réel x,
$\mathrm{F}(x)=\dfrac{4}{5}\mathrm{e}^{2x}\sin(x)-\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(2\sin(x)+\cos(x))$.

Ainsi, $\mathrm{F}(x)=\mathrm{e}^{2x}\left(\dfrac{2}{5}\sin(x)-\dfrac{1}{5}\cos(x)\right)$.

L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto e^{2x}\left(\frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)\right) + C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.

102 **a)** On a $C_m = C'$. La fonction C_m est positive sur l'intervalle $[0\,;6]$ donc la fonction C est croissante sur l'intervalle $[0\,;6]$.
De plus, $C_m(0) = 10$ donc $C'(0) = 10$.
Enfin, $C_m(3) = 1$ donc $C'(3) = 1$.
Ces trois conditions sont vérifiées par la fonction représentée par la courbe Γ. Ainsi la courbe Γ peut représenter la fonction coût total C.
b) Le sommet de la parabole est $S(3\,;1)$. Ainsi, pour tout réel q de $[0\,;6]$, $C_m(q) = a(q-3)^2 + 1$.
Or $C_m(0) = 10$, d'où $9a + 1 = 10$ soit $a = 1$.
On en déduit que, pour tout réel q de $[0\,;6]$, $C_m(q) = (q-3)^2 + 1 = q^2 - 6q + 10$.
c) Ainsi une primitive sur $[0\,;6]$ de C_m est définie par
$F(q) = \frac{1}{3}q^3 - 6 \times \frac{1}{2}q^2 + 10q$
soit $F(q) = \frac{1}{3}q^3 - 3q^2 + 10q$.
L'ensemble des primitives sur $[0\,;6]$ de la fonction C_m est donc constitué des fonctions $q \mapsto \frac{1}{3}q^3 - 3q^2 + 10q + K$ définies sur $[0\,;6]$ où K est une constante réelle.
La fonction C est la primitive sur $[0\,;6]$ de la fonction C_m vérifiant $C(0) = 2$. Donc il existe une constante réelle K telle que pour tout réel q de $[0\,;6]$, $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 3q^2 + 10q + K$.
Or $C(0) = 2$, ainsi $K = 2$.
Donc la fonction C est définie sur $[0\,;6]$ par $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 3q^2 + 10q + 2$.

103 **Parcours 1 :**
f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' - 4y = 1$ donc, pour tout réel x, $2f'(x) - 4f(x) = 1$. Donc $2f'(2) - 4f(2) = 1$. Or $f'(2) = 1$, ainsi $-4f(2) = -1$ soit $f(2) = \frac{1}{4}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' - 4y = 1$ soit $y' = 2y + \frac{1}{2}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x} - \frac{\frac{1}{2}}{2}$ soit $x \mapsto ke^{2x} - \frac{1}{4}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' - 4y = 1$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{2x} - \frac{1}{4}$. Or $f(2) = \frac{1}{4}$, ainsi $ke^4 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ soit $k = \frac{1}{2}e^{-4}$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' - 4y = 1$ qui vérifie $f'(2) = 1$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-4}e^{2x} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}e^{-4+2x} - \frac{1}{4}$.
Parcours 2 :
a) L'équation différentielle **(E′)** est équivalente à $y' = -\frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$.
b) Pour tout réel x, $f(x) = c$ avec $c \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) = 0$. f est solution de **(E′)** si, et seulement si, $5f' + 3f = 2$, c'est-à-dire $5 \times 0 + 3c = 2$ soit $c = \frac{2}{3}$.
c) g est solution de **(E′)** si, et seulement si, $g' = -\frac{3}{5}g + \frac{2}{5}$. Or $f' = -\frac{3}{5}f + \frac{2}{5}$. Ainsi, g est solution de **(E′)** si, et seulement si, $g' - f' = -\frac{3}{5}(g-f)$ c'est-à-dire $(g-f)' = -\frac{3}{5}(g-f)$. Autrement dit, g est solution de **(E′)** si, et seulement si, $g - f$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{3}{5}y$.
d) g est solution de **(E′)** si, et seulement si, pour tout réel x, $g(x) - f(x) = ke^{-\frac{3}{5}x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $g(x) = ke^{-\frac{3}{5}x} + \frac{2}{3}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de **(E′)** sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{3}{5}x} + \frac{2}{3}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
e) g est solution sur $\mathbb{R}$ de **(E′)** donc il existe un nombre réel k tel que $g(x) = ke^{-\frac{3}{5}x} + \frac{2}{3}$.
Or $g'(0) = 1$ et $5g'(0) + 3g(0) = 2$ donc $g(0) = -1$.
Ainsi $ke^{-\frac{3}{5}\times 0} + \frac{2}{3} = -1$ soit $k = -\frac{5}{3}$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de **(E′)** qui vérifie $g'(0) = 1$ est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{5}{3}e^{-\frac{3}{5}x} + \frac{2}{3}$.

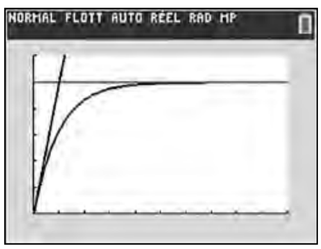
104 **a)** La fonction m est solution de l'équation différentielle $y' = Cy$ donc il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel t, $m(t) = ke^{Ct}$. Or $m(0) = m_0$, ainsi $ke^{C \times 0} = m_0$ soit $k = m_0$. On en déduit que, pour tout réel t, $m(t) = m_0e^{Ct}$.
b) On traduit l'énoncé par, pour tout réel t, $\frac{m(t+1)}{m(t)} = 0{,}9876$ soit $e^C = 0{,}9876$. On en déduit que $C = \ln(0{,}9876)$.

c) On cherche t tel que $m(t) = 0{,}14m_0$, c'est-à-dire $m_0 e^{\ln(0{,}9876)t} = 0{,}14m_0$.
On en déduit que $\ln(0{,}9876)t = \ln(0{,}14)$ soit $t = \dfrac{\ln(0{,}14)}{\ln(0{,}9876)} \approx 157{,}57$ siècles.

105 **1. a)** On pose $u = \dfrac{1}{f}$. La fonction f est dérivable et ne s'annule pas donc la fonction u est dérivable et $u' = -\dfrac{f'}{f^2}$.
u est solution sur $[0\,;40]$ de $y' = -0{,}44y + 0{,}022$ signifie que, sur $[0\,;40]$, $u' = -0{,}44u + 0{,}022$.
Autrement dit, sur $[0\,;40]$, $-\dfrac{f'}{f^2} = -0{,}44\dfrac{1}{f} + 0{,}022$.
Ceci est équivalent, sur $[0\,;40]$, à
$f' = 0{,}44f - 0{,}022f^2 = 0{,}022f(20 - f)$.
Autrement dit, f est solution sur $[0\,;40]$ de $y' = 0{,}022y(20 - y)$.
b) Les solutions sur $[0\,;40]$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}44y + 0{,}022$ sont les fonctions $t \mapsto ke^{-0{,}44t} - \dfrac{0{,}022}{-0{,}44}$ soit $t \mapsto ke^{-0{,}44t} + 0{,}05$ définies sur $[0\,;40]$ où k est un nombre réel.
c) Les solutions sur $[0\,;40]$ de l'équation différentielle $y' = 0{,}022y(20 - y)$ sont donc les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{ke^{-0{,}44t} + 0{,}05}$ définies sur $[0\,;40]$ où k est un nombre réel.
d) Il existe une constante réelle k telle que pour tout réel t, $f(t) = \dfrac{1}{ke^{-0{,}44t} + 0{,}05}$.
Or $f(0) = 0{,}01$, ainsi $\dfrac{1}{ke^{-0{,}44\times 0} + 0{,}05} = 0{,}01$.
Donc $k + 0{,}05 = 100$ soit $k = 99{,}95$.
On en déduit que, pour tout réel t, $f(t) = \dfrac{1}{99{,}95e^{-0{,}44t} + 0{,}05}$. En multipliant par 20 le numérateur et le dénominateur, on obtient, pour tout réel t, $f(t) = \dfrac{20}{1 + 1999e^{-0{,}44t}}$.
2. En 2014, la France comptait donc environ 22,668 millions de ménages équipés d'un ordinateur. Or $f(34) \approx 19{,}987$. L'estimation est donc incorrecte. On peut également dire que d'après l'estimation, le nombre de ménages ne dépassera pas 20 millions, ce qui est incorrect en réalité.

106 **1. a)** Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{RC}y = \dfrac{E}{R}$ soit $y' = -\dfrac{1}{RC}y + \dfrac{E}{R}$ sont les fonctions $t \mapsto ke^{-\frac{1}{RC}t} - \dfrac{\frac{E}{R}}{-\frac{1}{RC}}$ soit $t \mapsto ke^{-\frac{1}{RC}t} + EC$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

b) q est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{RC}y = \dfrac{E}{R}$ donc il existe une constante réelle k telle que pour tout réel t, $q(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t} + EC$.
Or $q(0) = 0$, ainsi $ke^{-\frac{1}{RC}\times 0} + EC = 0$. Donc $k + EC = 0$ soit $k = -EC$.
On en déduit que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $q(t) = -ECe^{-\frac{1}{RC}t} + EC$.
2. a) Le nombre $-\dfrac{1}{RC}$ est négatif donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{1}{RC}t} = 0$. On en déduit que la charge maximale Q du condensateur est égale à EC.
b) • Après une durée de charge égale à τ, la charge du condensateur est égale à $q(\tau)$. C'est-à-dire $-Qe^{-\frac{1}{RC}RC} + Q = Q(1 - e^{-1})$.
$\dfrac{Q(1 - e^{-1})}{Q} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63$, donc, après une durée de charge égale à τ, le condensateur est chargé à 63 %.
• Après une durée de charge égale à 5τ, la charge du condensateur est égale à $q(5\tau)$. C'est-à-dire $-Qe^{-\frac{1}{RC}5RC} + Q = Q(1 - e^{-5})$.
$\dfrac{Q(1 - e^{-5})}{Q} = 1 - e^{-5} \approx 0{,}99$, donc, après une durée de charge égale à 5τ, le condensateur est chargé à 99 %.
3. a) Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en O est : $y = q'(0)t + q(0)$.
Or $q(0) = 0$ et $q'(0) = -\dfrac{1}{RC}q(0) + \dfrac{E}{R} = \dfrac{E}{R}$.
Ainsi, une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en O est : $y = \dfrac{E}{R}t$.
On a, pour $t = \tau$, $y = \dfrac{E}{R}\tau = \dfrac{E}{R}RC = EC = Q$, donc le point de coordonnées $(\tau\,;Q)$ appartient à la tangente à $\mathscr{C}$ en O.
b) Sur l'écran ci-dessous où l'axe des abscisses est gradué avec un pas de 100, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$, sa tangente en O et la droite d'équation $y = Q$ c'est-à-dire $y = 5$. On retrouve le fait que cette tangente passe par le point $(\tau\,;Q)$ c'est-à-dire (100 ; 5).



107 **1.** Le chariot est à l'origine O à $t=0$, ainsi $x(0)=0$.

2. a) $v=x'$ donc $v'=x''$.

Ainsi, la fonction x vérifie l'équation $200x''+25x'=50$ si, et seulement si, la fonction v vérifie $200v'+25v=50$ soit $v'=-0{,}125v+0{,}25$.

b) Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y'=-0{,}125y+0{,}25$ sont les fonctions $t\mapsto k\mathrm{e}^{-0{,}125t}-\dfrac{0{,}25}{-0{,}125}$ soit $t\mapsto k\mathrm{e}^{-0{,}125t}+2$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

c) v est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y'=-0{,}125y+0{,}25$ donc il existe une constante réelle k telle que pour tout réel $t\geqslant 0$, $v(t)=k\mathrm{e}^{-0{,}125t}+2$. Or $v(0)=0$, ainsi $k\mathrm{e}^{-0{,}125\times 0}+2=0$. Donc $k+2=0$ soit $k=-2$.

On en déduit que, pour tout réel $t\geqslant 0$, $v(t)=-2\mathrm{e}^{-0{,}125t}+2$.

d) Le nombre $-0{,}125$ est négatif donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-0{,}125t}=0$. On en déduit que la limite de v en $+\infty$ est égale à 2. Ainsi, à long terme, la vitesse du chariot sera de 2 m.s^{-1}.

3. a) x est une primitive de la fonction v. Ainsi il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $t\geqslant 0$,

$x(t)=-\dfrac{2}{-0{,}125}\mathrm{e}^{-0{,}125t}+2t+\mathrm{C}$

soit $x(t)=16\mathrm{e}^{-0{,}125t}+2t+\mathrm{C}$.

Or $x(0)=0$, ainsi $16\mathrm{e}^{-0{,}125\times 0}+2\times 0+\mathrm{C}=0$ soit $16+\mathrm{C}=0$. Donc $\mathrm{C}=-16$.

On en déduit que, pour tout réel $t\geqslant 0$, $x(t)=16\mathrm{e}^{-0{,}125t}+2t-16$.

b) $x(30)\approx 46{,}2$. Au bout de 30 secondes, le chariot a donc parcouru environ 46,2 mètres.

108 **1. a)** La fonction v est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $4y'+24y=4\times 9{,}8$ soit $y'=-6y+9{,}8$.

b) Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y'=-6y+9{,}8$ sont les fonctions $t\mapsto k\mathrm{e}^{-6t}-\dfrac{9{,}8}{-6}$ soit $t\mapsto k\mathrm{e}^{-6t}+\dfrac{9{,}8}{6}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

2. **a)** v est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y'=-6y+9{,}8$ donc il existe une constante réelle k telle que pour tout réel $t\geqslant 0$, $v(t)=k\mathrm{e}^{-6t}+\dfrac{9{,}8}{6}$.

Or $v(0)=0$, ainsi $k\mathrm{e}^{-6\times 0}+\dfrac{9{,}8}{6}=0$.

Donc $k+\dfrac{9{,}8}{6}=0$ soit $k=-\dfrac{9{,}8}{6}$.

On en déduit que, pour tout réel $t\geqslant 0$, $v(t)=-\dfrac{9{,}8}{6}\mathrm{e}^{-6t}+\dfrac{9{,}8}{6}=\dfrac{9{,}8}{6}(1-\mathrm{e}^{-6t})$.

b) $v(20)=\dfrac{9{,}8}{6}(1-\mathrm{e}^{-6\times 20})\approx 1{,}6$. La vitesse du corps après 20s est environ égale à 1,6 m.s^{-1}.

109 **1. a)** g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $g'(x)+4g(x)=x\mathrm{e}^{-x}$.

Or, pour tout réel x, $g'(x)=a\mathrm{e}^{-x}+(ax+b)\times(-\mathrm{e}^{-x})$.

soit $g'(x)=(-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}$.

Donc g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $(-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}+4(ax+b)\mathrm{e}^{-x}=x\mathrm{e}^{-x}$

soit $3ax+a+3b=x$.

Ainsi, par identification, on a le système d'équations suivant: $\begin{cases}3a&=&1\\a+3b&=&0\end{cases}$.

On en déduit que : $a=\dfrac{1}{3}$ et $b=-\dfrac{1}{9}$.

Ainsi, une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle **(E)** est définie pour tout réel x, par $g(x)=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

b) f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f'+4f=x\mathrm{e}^{-x}$.

Or $g'+4g=x\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f'-g'+4(f-g)=0$ c'est-à-dire $(f-g)'+4(f-g)=0$. Autrement dit, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f-g$ est solution de l'équation différentielle **(E$_0$)** $y'+4y=0$.

c) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+4y=0$ soit $y'=-4y$ sont les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^{-4x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

d) f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x)-g(x)=k\mathrm{e}^{-4x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x)=k\mathrm{e}^{-4x}+\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+4y=x\mathrm{e}^{-x}$ sont donc les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^{-4x}+\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

e) f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+4y=x\mathrm{e}^{-x}$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x)=k\mathrm{e}^{-4x}+\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Or $f(1)=0$, ainsi $k\mathrm{e}^{-4}+\dfrac{2}{9}\mathrm{e}^{-1}=0$ soit $k=-\dfrac{2}{9}\mathrm{e}^{3}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'+4y=x\mathrm{e}^{-x}$ qui vérifie $f(1)=0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\dfrac{2}{9}\mathrm{e}^{3}\mathrm{e}^{-4x}+\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-x}$

soit $f(x)=-\dfrac{2}{9}\mathrm{e}^{3-4x}+\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

110 **1. a)** g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $g'(x)-g(x)=\cos(x)-3\sin(x)$.
Or, pour tout réel x, $g'(x)=-a\sin(x)+b\cos(x)$.
Donc g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x,
$-a\sin(x)+b\cos(x)-(a\cos(x)+b\sin(x))$
$=\cos(x)-3\sin(x)$ soit
$(b-a)\cos(x)+(-a-b)\sin(x)=\cos(x)-3\sin(x)$.
Ainsi, par identification, on a le système d'équations suivant : $\begin{cases} b-a &= 1\,(\ell_1) \\ -a-b &= -3\,(\ell_2) \end{cases}$
$(\ell_1+\ell_2)$ donne $-2a=-2$ soit $a=1$ et $b=2$.
Ainsi, une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle **(E)** est définie pour tout réel x, par $g(x)=\cos(x)+2\sin(x)$.
b) f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f'-f=\cos(x)-3\sin(x)$.
Or $g'-g=\cos(x)-3\sin(x)$. Ainsi, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f'-g'-(f-g)=0$ c'est-à-dire $(f-g)'-(f-g)=0$. Autrement dit, f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f-g$ est solution de l'équation différentielle **(E_0)** $y'-y=0$.
c) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'-y=0$ soit $y'=y$ sont les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^x$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
d) f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x)-g(x)=k\mathrm{e}^x$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x)=k\mathrm{e}^x+\cos(x)+2\sin(x)$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'-y=\cos(x)-3\sin(x)$ sont donc les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^x+\cos(x)+2\sin(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
e) f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'-y=\cos(x)-3\sin(x)$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x)=k\mathrm{e}^x+\cos(x)+2\sin(x)$. Or $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$, ainsi $k\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ soit $k=\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'-y=\cos(x)-3\sin(x)$ qui vérifie $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^x+\cos(x)+2\sin(x)$.
soit $f(x)=\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}+x}+\cos(x)+2\sin(x)$.

111 **a)** $F'=f$ donc si F est croissante sur l'intervalle $[-5\,;5]$ alors la fonction f est positive sur l'intervalle $[-5\,;5]$. Ainsi $f(0)\geqslant 0$.
La réciproque de cette propriété est :
Si $f(0)\geqslant 0$ alors F est croissante sur l'intervalle $[-5\,;5]$. Cette réciproque est fausse. En effet, f peut alors être négative sur l'intervalle $[1\,;5]$ par exemple et F serait décroissante sur $[1\,;5]$.
b) Si G est une primitive sur $[-5\,;5]$ de f alors il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x de $[-5\,;5]$, $G(x)=F(x)+C$. Or $G(1)=3$, ainsi $F(1)+C=3$, d'où $C=1$.
On en déduit que pour tout réel x de $[-5\,;5]$, $G(x)=F(x)+1$.
La réciproque de cette propriété est :
Si pour tout réel x de $[-5\,;5]$, $G(x)=F(x)+1$ alors G est une primitive sur $[-5\,;5]$ de f.
Cette réciproque est vraie. En effet, pour tout réel x de $[-5\,;5]$, $G'(x)=F'(x)=f(x)$ et G est une primitive sur $[-5\,;5]$ de f.

112 **a)** Si la fonction f vérifie $2f'+3f=1$ alors f est solution de l'équation différentielle $2y'+3y=1$ soit $y'=-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$.
Ainsi, il existe une constante réelle k telle que pour tout réel x, $f(x)=k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}-\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}$ soit $f(x)=k\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}$.
Ainsi, par exemple, les fonctions $x\mapsto\frac{1}{3}$ et $x\mapsto\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}x}+\frac{1}{3}$ vérifient $2f'+3f=1$.
b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=2y+1$ sont les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.
Par exemple les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\frac{1}{2}$ et $g(x)=\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'=2y+1$.
Ainsi, pour tout réel x, $f(x)+g(x)=\mathrm{e}^{2x}-1$. $f+g$ n'est donc pas de la forme des solutions de l'équation différentielle $y'=2y+1$.

113 **1. a)** $f(x_{i+1})=f(x_i+h)\approx h\times f'(x_i)+f(x_i)$.
Or f est solution de l'équation différentielle $y'=-0{,}2y+0{,}6$ donc, pour tout réel $x\geqslant 0$, $f'(x)=-0{,}2f(x)+0{,}6$.
Ainsi, $f'(x_i)=-0{,}2f(x_i)+0{,}6$. On en déduit que : $f(x_{i+1})\approx h\times(-0{,}2f(x_i)+0{,}6)+f(x_i)$.
Ou encore, $f(x_{i+1})\approx(1-0{,}2h)f(x_i)+0{,}6h$.
b) $f(x_1)\approx 0{,}98f(x_0)+0{,}06$.
Comme $f(x_0)=0$, $f(0{,}1)\approx 0{,}06$.
On place alors le point $A_1(0{,}1\,;0{,}06)$.
c) $f(x_2)\approx(1-0{,}2\times 0{,}1)f(x_1)+0{,}6\times 0{,}1$.

C'est-à-dire $f(x_2) \approx 0{,}98f(x_1) + 0{,}06$.

Comme $f(x_1) \approx 0{,}06$, $f(0{,}2) \approx 0{,}119$.

On place alors le point $A_2(0{,}2\,;0{,}119)$.

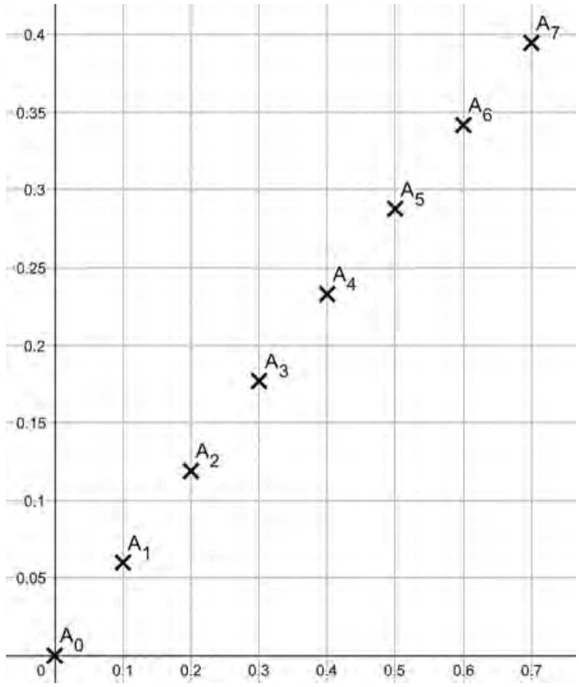
d) $f(x_3) \approx 0{,}98f(x_2) + 0{,}06$.

Comme $f(x_2) \approx 0{,}119$, $f(0{,}3) \approx 0{,}177$.

On place alors le point $A_3(0{,}3\,;0{,}177)$.

e)

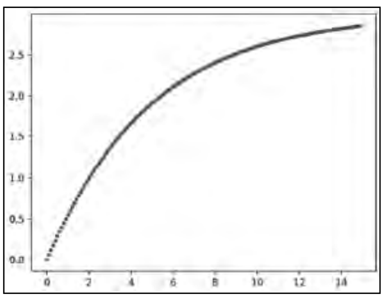
n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y_n	0	0,06	0,119	0,177	0,233	0,288	0,342	0,395



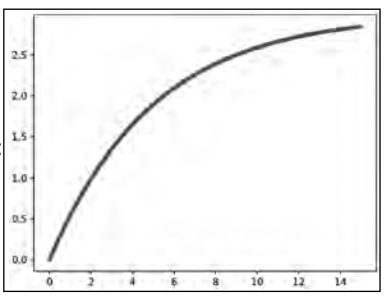
2. a) Dans le cadre rouge, on saisit : $x + h$.

Dans le cadre vert, on saisit : $(1 - 0.2^{*} h)^{*} y + 0.6^{*} h$.

b) Voici l'écran obtenu lors de l'exécution de Solution(150,0.1) :



Voici l'écran obtenu lors de l'exécution de Solution(1500,0.01) :



c) A long terme, la masse de sel se stabilise vers 2,9 kg.

3. a) Le résultat affiché est :

Eq($y(x)$, C1*exp(-0.2*x) + 3.0)

b) Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}2y + 0{,}6$ sont les fonctions $t \mapsto ke^{-0{,}2t} - \dfrac{0{,}6}{-0{,}2}$ soit $t \mapsto ke^{-0{,}2t} + 3$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

c) f est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}2y + 0{,}6$ donc il existe un nombre réel k tel que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = ke^{-0{,}2t} + 3$.

Or $f(0) = 0$, ainsi $ke^{0} + 3 = 0$ soit $k = -3$.

Donc la solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}2y + 0{,}6$ qui vérifie $f(0) = 0$ est la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = -3e^{-0{,}2t} + 3$.

d) $-0{,}2$ est un nombre négatif donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0{,}2t} = 0$.

Ainsi la limite de f en $+\infty$ est égale à 3.

114 Partie A

2. Dans le cas où $f : x \mapsto kx^2$, le vecteur sous-tangent semble ne pas être constant quelque soit la valeur de $k \neq 0$.

3. a) et **b)** De même.

c) Dans le cas où $f : x \mapsto e^{kx}$, le vecteur sous-tangent semble constant quelque soit la valeur de $k \neq 0$.

Partie B

1. a) Δ_m admet pour équation $y = f'(m)(x - m) + f(m)$

b) N(m ; 0).

Le point T est l'intersection entre la droite Δ_m et l'axe des abscisses.

Ainsi son abscisse vérifie : $f'(m)(x_T - m) + f(m) = 0$ c'est-à-dire $x_T = -\dfrac{f(m)}{f'(m)} + m$.

Donc $T\left(-\dfrac{f(m)}{f'(m)} + m\,;0\right)$.

c) On en déduit que $\overrightarrow{NT}\left(-\dfrac{f(m)}{f'(m)};0\right)$,

c'est-à-dire $\overrightarrow{NT} = -\dfrac{f(m)}{f'(m)}\vec{i}$.

2. a) Une fonction f dont la courbe représentative admet un vecteur sous-tangent constant égal à $a\vec{i}$ vérifie donc, pour tout réel m, $-\dfrac{f(m)}{f'(m)} = a$ soit $f'(m) = -\dfrac{1}{a}f(m)$. Autrement dit, f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{a}y$.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{a}y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{-\frac{1}{a}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

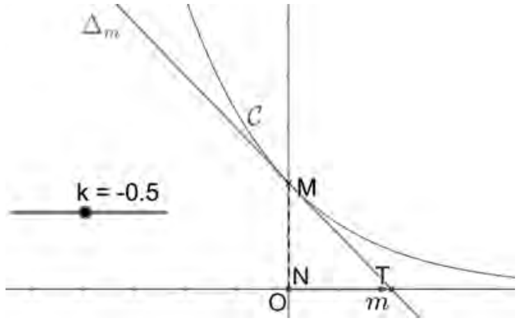
Ce sont les fonctions dont la courbe représentative admet un vecteur sous-tangent constant égal à $a\vec{i}$.

Partie C

a) Une fonction f dont la courbe représentative admet un vecteur sous-tangent constant égal à $2\vec{i}$ est de la forme $x \mapsto ke^{-0,5x}$ et définie sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

Sa courbe passe par le point A(0 ; 1) donc $f(0) = 1$. Ainsi, $ke^{-0,5\times 0} = 1$ soit $k = 1$.

La fonction f est donc définie de manière unique pour tout réel x, par $f(x) = e^{-0,5x}$.



115 f_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E_1})$ donc il existe une constante réelle k_1 telle que pour tout réel x, $f_1(x) = k_1e^{2x}$.

f_2 est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E_2})$ donc il existe une constante réelle k_2 telle que pour tout réel x, $f_2(x) = k_2e^{x}$.

D'après le graphique, $f'_1(0) + f'_2(0) = 1$, ainsi $k_1 + k_2 = 1$.

De plus, la droite d admet pour coefficient directeur 3, donc $f_1'(0) + f_2'(0) = 3$, ainsi $2k_1 + k_2 = 3$.

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 (\ell_1) \\ 2k_1 + k_2 = 3 (\ell_2) \end{cases}$$

$(\ell_2 - \ell_1)$ donne $k_1 = 2$ et donc $k_2 = -1$.

On en déduit que, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$.

116 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 1e^{2x} + 2xe^{2x} = (1+2x)e^{2x}$.

Ainsi pour tout réel x,

$f''(x) = 2e^{2x} + 2(1+2x)e^{2x} = (4+4x)e^{2x}$.

Pour tout réel x, $f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$ si, et seulement si, pour tout réel x,

$(4+4x)e^{2x} + a(1+2x)e^{2x} + bxe^{2x} = 0$.

Ce qui est équivalent à, pour tout réel x,

$4 + a + (4 + 2a + b)x = 0$.

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 4 + a = 0 (\ell_1) \\ 4 + 2a + b = 0 (\ell_2) \end{cases}$$

Ainsi, $a = -4$ et $b = 4$. On en déduit que, pour tout réel x, $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = 0$.

b) Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -\frac{1}{4}f''(x) + f'(x)$.

On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x) = -\frac{1}{4}f'(x) + f(x) = -\frac{1}{4}(1+2x)e^{2x} + xe^{2x}$

soit $F(x) = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right)e^{2x}$.

117 La fonction P est solution sur $[0;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = 0,3y$. Ainsi, il existe une constante réelle k telle que pour tout réel $t \geqslant 0$, $P(t) = ke^{0,3t}$.

Or $P(0) = 2$, ainsi $ke^{0,3\times 0} = 2$ soit $k = 2$.

On en déduit que pour tout réel $t \geqslant 0$, $P(t) = 2e^{0,3t}$.

Donc $P(30) = 2e^{0,3\times 30} \approx 16206$.

Le poids de la plante après 30 jours est donc d'environ 16 kg selon ce modèle.

118 Pour tout réel x, $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

Ainsi : $F'(x) = (2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(-e^{-x})$

soit $F'(x) = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$.

Pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$ si, et seulement si, pour tout réel x, $-ax^2 + (2a - b)x + b - c = x^2 + 2x + 2$.

On en déduit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 2 \\ b - c = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $a = -1$, $b = -4$ et $c = -6$. On en déduit que, pour tout réel x, $F(x) = (-x^2 - 4x - 6)e^{-x}$.

119 Pour tout réel x, $H(x) = 2G(x) - F(x) + xe^{-x^2}$.

Pour tout réel x,

$H'(x) = 2G'(x) - F'(x) + e^{-x^2} + x(-2xe^{-x^2})$.

Donc pour tout réel x,

$H'(x) = 2g(x) - f(x) + (-2x^2 + 1)e^{-x^2}$.

Ainsi, pour tout réel x,

$H'(x) = 2x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + (-2x^2 + 1)e^{-x^2} = 0$.

On en déduit que la fonction H est constante.

Or $H(0) = 2G(0) - F(0) = 0$.

Donc pour tout réel x, $H(x) = 0$. C'est-à-dire, pour tout réel x, $2G(x) - F(x) + xe^{-x^2} = 0$.

Ou encore, pour tout réel x, $G(x) = \frac{1}{2}(F(x) - xe^{-x^2})$.

120 **1. a)** Pour tout réel $t \geqslant 0$, $v(t) - 6 = \frac{1}{f(t)}$.

Donc pour tout réel $t \geqslant 0$, $v(t) = \frac{1}{f(t)} + 6$.

b) Ainsi pour tout réel $t \geqslant 0$,

$v^2(t) = \left(\frac{1}{f(t)} + 6\right)^2 = \frac{1}{f^2(t)} + \frac{12}{f(t)} + 36$.

c) Pour tout réel $t \geqslant 0$, $v'(t) = -\frac{f'(t)}{f^2(t)}$.

d) Ainsi pour tout réel $t \geqslant 0$,
$$-\frac{f'(t)}{f^2(t)} + \frac{g}{36}\left(\frac{1}{f^2(t)} + \frac{12}{f(t)} + 36\right) = g.$$
En multipliant chaque membre par $f^2(t)$, on obtient : pour tout réel $t \geqslant 0$,
$$-f'(t) + \frac{g}{36}(1 + 12f(t) + 36f^2(t)) = gf^2(t).$$
On en déduit que pour tout réel $t \geqslant 0$,
$$f'(t) = \frac{g}{3}f(t) + \frac{g}{36}.$$
Ainsi, g est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}$

2. a) Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}$ sont les fonctions $t \to ke^{\frac{g}{3}t} - \frac{\frac{g}{36}}{\frac{g}{3}}$ soit $t \to ke^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

b) $f(0) = \frac{1}{v(0)-6} = \frac{1}{60}$.

f est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}$ donc il existe une constante réelle k telle que pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = ke^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}$.

Or $f(0) = \frac{1}{60}$.

Ainsi, $ke^{\frac{g}{3}\times 0} - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}$ soit $k = 0{,}1$.

On en déduit que pour tout réel $t \geqslant 0$,
$$f(t) = 0{,}1e^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}.$$

c) On en déduit que pour tout réel $t \geqslant 0$,
$$v(t) = \frac{1}{0{,}1e^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}} + 6 = \frac{12}{1{,}2e^{\frac{g}{3}t} - 1} + 6.$$

3. $\lim\limits_{t\to+\infty} 1{,}2e^{\frac{g}{3}t} - 1 = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{12}{1{,}2e^{\frac{g}{3}t} - 1} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 6$.

La vitesse se stabilisera à 6 m.s^{-1}.

121 **a)** Pour tout réel x,
$f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) = (2g(x) + g'(x))e^{2x}$.

f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$.

Donc f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $(2g(x) + g'(x))e^{2x} - 2e^{2x}g(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$.

On en déduit que f est solution de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $g'(x)e^{2x} = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$ soit $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

b) Donc, il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel x, $g(x) = \ln(1+e^{-2x}) + C$.

On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}$ de **(E)** sont les fonctions $x \to (\ln(1+e^{-2x}) + C)e^{2x}$.

Objectif BAC

122 **1.** La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;a]$ puis décroissante sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$ donc la fonction f' est positive sur l'intervalle $]-\infty\,;a]$ puis négative sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$.

2. La seule courbe représentant une fonction positive puis négative est la courbe $\mathscr{C}_2$. Ainsi, la fonction f' est représentée par $\mathscr{C}_2$ et la fonction F est représentée par $\mathscr{C}_1$.

b) $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse a donc $1 < a < 2$.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ représentative de F au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $F'(a) = f(a) = b$.

D'après la figure ce coefficient directeur est supérieur à zéro. Donc $b > 0$.

3. a) g est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \alpha x + \beta$, alors $g'(x) = \alpha$. Pour tout réel x, $g(x) - 2g'(x) = x$ si, et seulement si, $\alpha x + \beta - 2\alpha = x$.

Ainsi $\alpha = 1$ et $\beta - 2\alpha = 0$ soit $\beta = 2$.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 2$ vérifie l'équation différentielle.

b) Pour tout réel x, $f(x) - 2f'(x) = x$
et $g(x) - 2g'(x) = x$.

Ainsi, $f(x) - g(x) - 2(f'(x) - g'(x)) = 0$ c'est-à-dire $(f-g) - 2(f-g)' = 0$. Autrement dit, $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y - 2y' = 0$ soit $y' = \frac{1}{2}y$.

c) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{\frac{1}{2}x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

Ainsi il existe une constante réelle k telle que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$ soit $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.

d) • La fonction f' est représentée par la courbe $\mathscr{C}_2$. Ainsi, $f'(0) = \frac{1}{2}$. Or pour tout réel x, $f(x) - 2f'(x) = x$.
Donc $f(0) - 2f'(0) = 0$ d'où $f(0) = 1$.
On en déduit que $ke^{\frac{1}{2}\times 0} + 0 + 2 = 1$ soit $k = -1$.
D'où pour tout réel x, $f(x) = -e^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.
• F est une primitive de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x,

$$F(x) = -\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$
$$= -2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + C.$$

Or $F(0) = -2$ donc $-2e^{\frac{1}{2}\times 0} + \frac{1}{2}0^2 + 2\times 0 + C = -2$ d'où $C = 0$.
Ainsi, pour tout réel x, $F(x) = -2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

• Pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 1$.
$f'(a) = 0$ si, et seulement si, $-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}a} + 1 = 0$.
Donc $f'(a) = 0$ si, et seulement si, $e^{\frac{1}{2}a} = 2$ soit $a = 2\ln(2)$.
• $b = f(2\ln(2)) = -e^{\frac{1}{2}2\ln(2)} + 2\ln(2) + 2 = 2\ln(2)$.

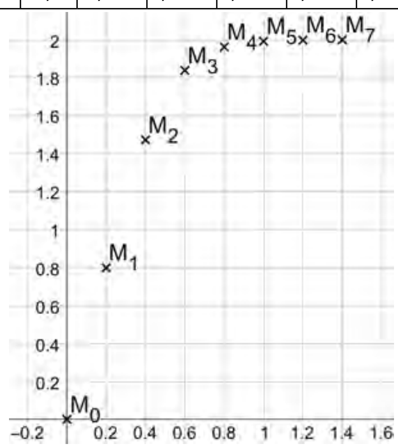
123 Partie A

1. a) $f(x_{n+1}) = f(x_n + 0{,}2)$
donc $f(x_{n+1}) \approx 0{,}2f'(x_n) + f(x_n)$.
Or f est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = 4 - y^2$ donc pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = 4 - f(x)^2$. Ainsi $f'(x_n) = 4 - f(x_n)^2$.
On en déduit que $f(x_{n+1}) \approx 0{,}2(4 - f(x_n)^2) + f(x_n)$ soit $f(x_{n+1}) \approx -0{,}2f(x_n)^2 + f(x_n) + 0{,}8$.

b)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	01	1,2	1,4
y_n	0	0,8	1,472	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9997

c)



d) Il semble que la suite (y_n) soit croissante et converge vers 2.

2. a) Pour tout réel x, $p(x) = -0{,}2x^2 + x + 0{,}8$.
On a $p'(x) = -0{,}4x + 1$ qui s'annule pour $x = \frac{5}{2}$.
Donc la fonction p est croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.
Ainsi, si $x \in [0\,;2]$ alors $p(x) \in [p(0)\,;p(2)]$ soit $p(x) \in [0{,}8\,;2]$.
Ainsi, si $x \in [0\,;2]$, alors $p(x) \in [0\,;2]$.
b) Pour tout entier naturel n, on note P(n) la propriété : $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.
• **1re étape : Initialisation**
$y_0 = 0$ donc $0 \leqslant y_0 \leqslant 2$.
La propriété P(0) est donc vraie.
• **2e étape : Hérédité**
On suppose que, pour un certain rang k, la propriété P(k) est vraie. C'est-à-dire que, pour un certain rang k, $0 \leqslant y_k \leqslant 2$. Or $y_{k+1} = p(y_k)$. Ainsi, d'après la question précédente $0 \leqslant y_{k+1} \leqslant 2$. La propriété P$(k+1)$ est donc vraie.
• **3e étape : Conclusion**
Pour tout entier naturel n, la propriété P(n) est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$.
c) Pour tout entier naturel n,
$y_{n+1} - y_n = -0{,}2y_n^2 + y_n + 0{,}8 - y_n$.
Donc pour tout entier naturel n,
$y_{n+1} - y_n = -0{,}2y_n^2 + 0{,}8$.
Or pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n \leqslant 2$ donc pour tout entier naturel n, $0 \leqslant y_n^2 \leqslant 4$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $-0{,}8 \leqslant -0{,}2y_n^2 \leqslant 0$ d'où pour tout entier naturel n, $-0{,}2y_n^2 + 0{,}8 \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $y_{n+1} - y_n \geqslant 0$.
La suite (y_n) est donc croissante.
d) La suite (y_n) est croissante et majorée par 2, elle donc convergente.

Partie B

1. La fonction g est dérivable et pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$g'(x) = 2\frac{4e^{4x}(e^{4x}+1) - (e^{4x}-1)\times 4e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}.$$
Donc pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) = \dfrac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$.
D'autre part, pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$4 - g(x)^2 = 4 - 4\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)^2$$
soit $4 - g(x)^2 = 4\dfrac{(e^{4x}+1)^2 - (e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2}$.
Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$4 - g(x)^2$$
$$= 4\frac{((e^{4x}+1) - (e^{4x}-1))((e^{4x}+1) + (e^{4x}-1))}{(e^{4x}+1)^2}$$
soit $4 - g(x)^2 = \dfrac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$.

On en déduit que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) = 4 - g(x)^2$ et g est solution de (**E**).

De plus, $g(0) = 2\dfrac{e^{4\times 0} - 1}{e^{4\times 0} + 1} = 0$.

2. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $g(x) = 2\left(\dfrac{e^{4x}(1-e^{-4x})}{e^{4x}(1+e^{-4x})}\right)$ soit $g(x) = 2\left(\dfrac{1-e^{-4x}}{1+e^{-4x}}\right)$.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 2$.

La droite Δ d'équation $y = 2$ est donc asymptote horizontale à $(\mathscr{C}_g)$ au voisinage de $+\infty$.

b) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $g'(x) = \dfrac{16e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2} > 0$.

On en déduit que la fonction g est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. L'équation de la tangente à $(\mathscr{C}_g)$ en l'origine est $y = g'(0)(x-0) + g(0)$.

Or $g'(0) = \dfrac{16}{4} = 4$ et $g(0) = 0$.

Donc l'équation de la tangente à $(\mathscr{C}_g)$ en l'origine est $y = 4x$.

Les coordonnées $(x\,;y)$ du point d'intersection de Δ et de cette tangente vérifie $y = 2$ et $y = 4x$ soit $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = 2$. On a donc $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

124 **a)** $h' = -\dfrac{u'}{u^2}$. h vérifie ($\mathbf{E_2}$) si, et seulement si, pour tout réel $t \geqslant 0$, $-\dfrac{u'(t)}{u(t)^2} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{u(t)} + \dfrac{1}{12}$ et $\dfrac{1}{u(0)} = 1$.

Ce qui équivaut à, pour tout réel $t \geqslant 0$, $u'(t) = \dfrac{1}{4}u(t) - \dfrac{u(t)^2}{12}$ et $u(0) = 1$ soit u vérifie ($\mathbf{E_1}$).

b) Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ sont les fonctions $t \mapsto ke^{-\frac{1}{4}t} - \dfrac{\frac{1}{12}}{-\frac{1}{4}}$ soit $t \mapsto ke^{-\frac{1}{4}t} + \dfrac{1}{3}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

h est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ donc il existe un nombre réel k tel que $h(t) = ke^{-\frac{1}{4}t} + \dfrac{1}{3}$.

Or $h(0) = 1$, ainsi $ke^{-\frac{1}{4}\times 0} + \dfrac{1}{3} = 1$ soit $k = \dfrac{2}{3}$.

Donc la fonction h est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \dfrac{1}{3}$.

On en déduit que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $u(t) = \dfrac{1}{\frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}}$.

c) $-\dfrac{1}{4}$ est un nombre négatif donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{1}{4}t} = 0$.

Ainsi la limite de la fonction u en $+\infty$ est égale à 3.

On en déduit qu'à long terme, la taille de la population étudiée sera de 300 rongeurs.

125 **a)** f est solution de (**E**) si, et seulement si, $f' = f^2$. Ce qui équivaut à, pour tout réel $x > 0$, $-\dfrac{f'(x)}{f(x)^2} = -1$.

Ainsi f est solution de (**E**) si, et seulement si, pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = -1$.

b) Les fonctions g vérifiant pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = -1$, sont les fonctions de la forme $x \mapsto -x + C$ définies sur $]0\,;+\infty[$ où C est une constante réelle.

Ainsi les solutions sur $]0\,;+\infty[$ de (**E**) sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{-x+C}$ définies sur $]0\,;+\infty[$ où C est une constante réelle.

f est solution sur $]0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (**E**) donc il existe une constante réelle C tel que $f(x) = \dfrac{1}{-x+C}$.

Or $f(1) = 1$, ainsi $\dfrac{1}{-1+C} = 1$ soit $C = 2$.

Donc la fonction f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{-x+2}$.

126 **a)** Faux. En effet les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2y - 3$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{2x} - \dfrac{-3}{2}$ soit $x \mapsto ke^{2x} + \dfrac{3}{2}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

b) Vrai. En effet f est solution de (**E**) donc, pour tout réel x, $f'(x) = 2f(x) + 3$. Ainsi $f'(0) = 2f(0) - 3$ soit $f(0) = 1{,}5$.

c) Vrai. En effet, pour tout réel x, $f'(x) = 2f(x) - 3$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{2}(f'(x) + 3)$. Ainsi, une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}(f(x) + 3x)$.

d) Faux. Pour tout réel x, $g(x) = \dfrac{3}{2}e^{x} + \dfrac{3}{2}e^{2x}$ donc la fonction g n'est pas de la forme générale d'une solution de (**E**).

Pour aller plus loin

127 **1.** On pose $g = \dfrac{1}{p}$.

La fonction p est dérivable et ne s'annule pas donc la fonction g est dérivable et $g' = -\dfrac{p'}{p^2}$.

g est solution sur $[0\,;+\infty[$ de $y' = \alpha y + \beta$ signifie que, sur $[0\,;+\infty[$, $g' = \alpha g + \beta$.

Autrement dit, sur $[0\,;+\infty[$, $-\dfrac{p'}{p^2} = \alpha\dfrac{1}{p} + \beta$.

Ceci est équivalent, sur $[0\,;+\infty[$, à $p' = \alpha p + \beta p^2$.

Ainsi, p est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \alpha y + \beta y^2$.

Or p est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = ay(m-y)$ soit $y' = amy - ay^2$. Ainsi, $\alpha = am$ et $\beta = -a$.

On en déduit que g est solution de $(\mathbf{E_1})$ si, et seulement si, g est solution de $y' = amy - a$.

2. Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = amy - a$ sont les fonctions $t \mapsto k\mathrm{e}^{-amt} - \dfrac{-a}{am}$ soit $t \mapsto k\mathrm{e}^{-amt} + \dfrac{1}{m}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = ay(m-y)$ sont donc les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{k\mathrm{e}^{-amt} + \dfrac{1}{m}}$ soit $t \mapsto \dfrac{m}{km\mathrm{e}^{-amt} + 1}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

En posant $\mathrm{C} = km$, on en déduit que l'expression de la fonction p est de la forme $p(t) = \dfrac{m}{1 + \mathrm{Ce}^{-amt}}$ où C est une constante réelle.

3. a) Pour tout réel $t \geqslant 0$, $p(t) = \dfrac{m}{1 + \mathrm{Ce}^{-amt}}$.

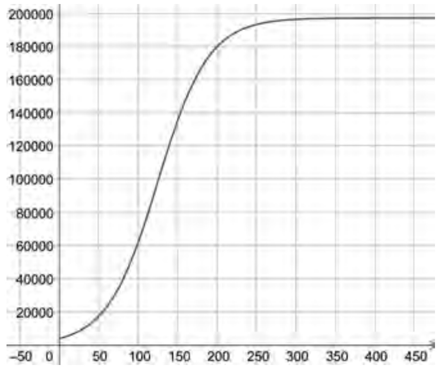
Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$p'(t) = -m\frac{-am\mathrm{Ce}^{-amt}}{(1+\mathrm{Ce}^{-amt})^2} = \frac{am^2\mathrm{Ce}^{-amt}}{(1+\mathrm{Ce}^{-amt})^2}.$$

Comme $a > 0$, pour tout réel $t \geqslant 0$, $p'(t) > 0$ et la fonction p est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b) $-am$ est un nombre négatif donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-amt} = 0$.

Ainsi la limite de la fonction p en $+\infty$ est égale à m.



c) On cherche t tel que $p(t) = 196273$, c'est-à-dire $\dfrac{m}{1+\mathrm{Ce}^{-amt}} = 196273$ soit $m = 196273(1 + \mathrm{Ce}^{-amt})$.

On en déduit que $-amt = \ln\left(\dfrac{\mathrm{m} - 196273}{196273 \times \mathrm{C}}\right)$ d'où $t = \dfrac{1}{-am}\ln\left(\dfrac{m - 196273}{196273 \times \mathrm{C}}\right)$.

D'après les données, $t \approx 294{,}4$. Selon ce modèle, la population maximale sera atteinte à un million près à partir de l'année 2085.

128 **a)** La base du réservoir est un disque de rayon 1 m, $\mathrm{A} = \pi \times 1^2 = \pi\ \mathrm{m}^2$.

b) Ainsi, $\pi h' = -0{,}025\sqrt{h}$ d'où, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\dfrac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -\dfrac{0{,}025}{\pi}$.

c) Une primitive de $\dfrac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}}$ est $2\sqrt{h}$.

Ainsi il existe une constante réelle K telle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $2\sqrt{h(t)} = -\dfrac{0{,}025}{\pi}t + \mathrm{K}$ soit $\sqrt{h(t)} = -\dfrac{0{,}025}{2\pi}t + \mathrm{C}$ avec $\mathrm{C} = \dfrac{\mathrm{K}}{2}$.

d) On en déduit qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $h(t) = \left(-\dfrac{0{,}025}{2\pi}t + \mathrm{C}\right)^2$.

e) $h(0) = 4$ donc $\left(-\dfrac{0{,}025}{2\pi} \times 0 + \mathrm{C}\right)^2 = 4$ soit $\mathrm{C}^2 = 4$.

Or C est une constante positive puisque d'après **c)**, $\mathrm{C} = \sqrt{h(t)} + \dfrac{0{,}025}{2\pi}t$ pour tout $t \geqslant 0$. Ainsi $\mathrm{C} = 2$.

On en déduit qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $h(t) = \left(-\dfrac{0{,}025}{2\pi}t + 2\right)^2$.

Le réservoir arrête de se vider lorsque la hauteur d'eau est nulle. On cherche donc $t \geqslant 0$ tel que $h(t) = 0$ soit $\left(-\dfrac{0{,}025}{2\pi}t + 2\right)^2 = 0$. On en déduit que $-\dfrac{0{,}025}{2\pi}t + 2 = 0$ soit $t = 160\pi \approx 503$ secondes.

129 **1.** Pour tout réel t, $f(t) = \mathrm{A}\cos(wt) + \mathrm{B}\sin(wt)$.
Ainsi pour tout réel t, $f'(t) = -\mathrm{A}w\sin(wt) + \mathrm{B}w\cos(wt)$ et $f''(t) = -\mathrm{A}w^2\cos(wt) - \mathrm{B}w^2\sin(wt)$.

On en déduit que $f'' + w^2 f = 0$.

2. a) La fonction θ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + w^2 y = 0$ avec $w^2 = \frac{g}{\ell}$, $\frac{g}{\ell}$ étant un réel positif. Ainsi, il existe des constantes réels A et B telles que, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$\theta(t) = \mathrm{A}\cos(wt) + \mathrm{B}\sin(wt)$ avec $w^2 = \frac{g}{\ell}$.

De plus, $\theta(0) = \frac{\pi}{36}$,

ainsi $\mathrm{A}\cos(w \times 0) + \mathrm{B}\sin(w \times 0) = \frac{\pi}{36}$ d'où $\mathrm{A} = \frac{\pi}{36}$.

Pour tout réel $t \geqslant 0$, $\theta'(t) = -\mathrm{A}w\sin(wt) + \mathrm{B}w\cos(wt)$.

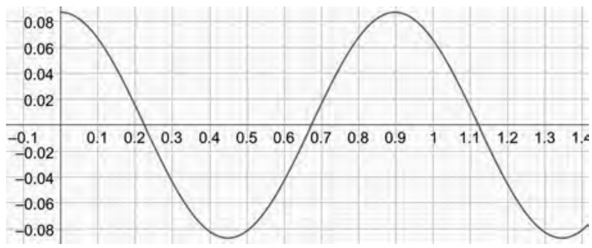
Or $\theta'(0) = 0$,

ainsi $-\mathrm{A}w\sin(w \times 0) + \mathrm{B}w\cos(w \times 0) = 0$

soit $\mathrm{B} = 0$ puisque $w \neq 0$.

On en déduit que, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$\theta(t) = \frac{\pi}{36}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{0{,}2}}\,t\right).$$



Ainsi le pendule oscille périodiquement et l'angle varie entre $-\frac{\pi}{36}$ et $\frac{\pi}{36}$.

130 **1.** On pose $g = \mathrm{C}_1 f_1 + \mathrm{C}_2 f_2$.

Ainsi $g' = \mathrm{C}_1 f'_1 + \mathrm{C}_2 f'_2$ et $g'' = \mathrm{C}_1 f''_1 + \mathrm{C}_2 f''_2$.

Donc $g'' + ag' + bg$

$= \mathrm{C}_1(f''_1 + af'_1 + bf_1) + \mathrm{C}_2(f''_2 + af'_2 + bf_2)$.

On en déduit que si f_1 et f_2 sont solutions de **(E)**, alors g également.

2. f est solution de **(E)** si, et seulement si, $f'' + af' + bf = 0$. Ce qui équivaut à, pour tout réel x, $r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$ soit $r^2 + ar + b = 0$.

3. a) Pour tout réel x, $g'(x) = f'(x)e^{-r_1 x} + f(x)(-r_1 e^{-r_1 x})$

soit $g'(x) = (f'(x) - r_1 f(x))e^{-r_1 x}$.

Donc pour tout réel x,

$g''(x) = (f''(x) - r_1 f'(x))e^{-r_1 x} + (f'(x) - r_1 f(x))(-r_1 e^{-r_1 x})$

soit $g''(x) = (f''(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x))e^{-r_1 x}$.

Ainsi, pour tout réel x,

$g''(x) + (2r_1 + a)g'(x) = (f''(x) - 2r_1 f'(x) + r_1^2 f(x))e^{-r_1 x}$
$+ (2r_1 + a)(f'(x) - r_1 f(x))e^{-r_1 x}$

soit $g''(x) + (2r_1 + a)g'(x)$

$= (f''(x) + af'(x) - (r_1^2 + ar_1)f(x))e^{-r_1 x}$.

Or r_1 est solution de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

Ainsi $r_1^2 + ar_1 + b = 0$ soit $r_1^2 + ar_1 = -b$.

Donc pour tout réel x,

$g''(x) + (2r_1 + a)g'(x) = (f''(x) + af'(x) + bf(x))e^{-r_1 x}$.

On en déduit que f est solution de **(E)** si, et seulement si g est solution de $y'' + (2r_1 + a)y' = 0$.

b) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + (2r_1 + a)y = 0$ soit $y' = -(2r_1 + a)y$ sont donc les fonctions $x \mapsto ke^{-(2r_1 + a)x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

c) F est une primitive d'une fonction f solution de $y' + (2r_1 + a)y = 0$ si, et seulement si, F est une primitive d'une fonction f vérifiant $f' + (2r_1 + a)f = 0$ soit $\mathrm{F}'' + (2r_1 + a)\mathrm{F}' = 0$.

Ainsi, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + (2r_1 + a)y' = 0$ sont donc les primitives des fonctions $x \mapsto ke^{-(2r_1 + a)x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

Donc, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + (2r_1 + a)y' = 0$ sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{k}{-(2r_1 + a)}e^{-(2r_1 + a)x} + \mathrm{C}$ définies sur $\mathbb{R}$ où C et k sont des nombres réels.

d) r_1 et r_2 sont les racines du trinôme $r^2 + ar + b$ donc leur somme est égale à $-a$.

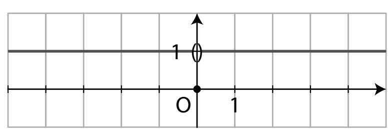
e) Donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de **(E)** si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x)e^{-r_1 x} = \frac{k}{-(2r_1 + a)}e^{-(2r_1 + a)x} + \mathrm{C}$ où C et k sont des nombres réels.

On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}$ de **(E)** sont les fonctions $x \mapsto \left(\frac{k}{-(2r_1 + a)}e^{-(2r_1 + a)x} + C\right)e^{r_1 x}$ soit $x \mapsto \frac{k}{-(2r_1 + a)}e^{(-r_1 - a)x} + \mathrm{C}e^{r_1 x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où C et k sont des nombres réels.

Or, d'après **d)**, $-r_1 - a = r_2$.

En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ de **(E)** sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{C}_1 e^{r_1 x} + \mathrm{C}_2 e^{r_2 x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des nombres réels en posant $\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}$ et $\mathrm{C}_2 = \frac{k}{-(2r_1 + a)}$.

131 **1.**



2. a) Sur $]-\infty\,;0[$, une expression de F est $\mathrm{F}(x) = x$.

b) Sur $]0\,;+\infty[$, une expression de F est $\mathrm{F}(x) = x$.

3. a) $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{\mathrm{F}(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} 1 = 1$ et $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{\mathrm{F}(h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} 1 = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\mathrm{F}(h)}{h} = 1$.

b) On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(h)-F(0)}{h-0} = 1$. Ainsi $F'(0) = 1$.

4. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors $F' = f$ d'où $f(0) = 1$ ce qui contredit le fait que $f(0) = 0$.

132 Partie A

1. a) Pour tout réel x, $g'(x) = h'(x)e^{-x} - h(x)e^{-x}$.

Donc pour tout réel x, $g'(x) = (h'(x) - h(x))e^{-x}$.

g est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E}_n)$ si, et seulement si, pour tout réel x, $g'(x) + g(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

On en déduit que, g est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E}_n)$ si, et seulement si, pour tout réel x, $(h'(x) - h(x))e^{-x} + h(x)e^{-x} = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$ soit $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

b) Donc, g est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E}_n)$ si, et seulement si, il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel x, $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n! \times (n+1)} + C$ soit $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C$.

c) On en déduit que les solutions sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E}_n)$ sont les fonctions $x \mapsto \left(\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C\right)e^{-x}$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est un nombre réel.

d) f est une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathbf{E}_n)$ donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $f(x) = \left(\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C\right)e^{-x}$. Or $f(0) = 0$ ainsi, $C = 0$.

Donc pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$.

Partie B

a) Pour tout réel x, $f'_1(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.

Donc pour tout réel x, $f'_1(x) + f_1(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x}$ soit $f'_1(x) + f_1(x) = f_0(x)$.

f_1 est donc solution de l'équation $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note P(n) la propriété : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

• 1^re^ étape : Initialisation

$f_1(0) = 0$ donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = f_0$ s'annulant en 0 est, d'après **a)**, la fonction f_1. Et, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{x^1}{1!}e^{-x}$. La propriété P(1) est donc vraie.

• 2^e^ étape : Hérédité

On suppose que, pour un certain rang k, la propriété P(k) est vraie. C'est-à-dire que, pour un certain rang k, $f_k(x) = \dfrac{x^k}{k!}e^{-x}$. Or la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = f_k$ s'annulant en 0 est, d'après la partie A, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}$ soit f_{k+1}. La propriété P($k+1$) est donc vraie.

• 3^e^ étape : Conclusion

Pour tout entier naturel n, la propriété P(n) est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

133 La somme des trois lignes donne $x' + y' + z' = 0$, ainsi il existe une constante réelle K telle que, pour tout réel t, $x(t) + y(t) + z(t) = K$.

Or $x(0) + y(0) + z(0) = 3$ donc $K = 3$. On en déduit que, pour tout réel t, $x(t) + y(t) + z(t) = 3$.

Ainsi, comme $x' = y + z - 2x = -3x + x + y + z$, on a $x' = -3x + 3$.

Il existe donc une constante réelle k telle que, pour tout réel t, $x(t) = ke^{-3t} - \dfrac{3}{-3}$ soit $x(t) = ke^{-3t} + 1$.

Or $x(0) = 0$, donc $k = -1$. On en déduit que, pour tout réel t, $x(t) = -e^{-3t} + 1$.

La différence des deux premières lignes donne $x' - y' = -3x + 3y = -3(x - y)$ soit $(x - y)' = -3x + 3y = -3(x - y)$.

Il existe donc une constante réelle k telle que, pour tout réel t, $x(t) - y(t) = ke^{-3t}$. Or $x(0) - y(0) = 1$, donc $k = 1$.

On en déduit que, pour tout réel t, $x(t) - y(t) = e^{-3t}$.

Donc, pour tout réel t, $y(t) = x(t) - e^{-3t} = -2e^{-3t} + 1$ et $z(t) = 3 - x(t) - y(t) = 3e^{-3t} + 1$.

134 Pour tout réel $t \geqslant 0$, V(t) est le volume d'azote, en L, dans le réservoir et $P(t) = \dfrac{V(t)}{20}$ la part d'azote dans le réservoir à l'instant t. A chaque intervalle de temps dt, le volume d'azote augmente de 0,1dt L et on enlève 0,1dt L de mélange supposé homogène contenant $P(t) \times 0{,}1dt$ L d'azote. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, $V(t + dt) = V(t) + 0{,}1dt - P(t) \times 0{,}1dt$ soit $\dfrac{V(t+dt)}{20} = \dfrac{V(t)}{20} + 0{,}005dt - P(t) \times 0{,}005dt$ c'est-à-dire $P(t + dt) - P(t) = (-0{,}005P(t) + 0{,}005)dt$.

On en déduit que pour tout réel $t \geqslant 0$, $\dfrac{P(t+dt) - P(t)}{dt} = -0{,}005P(t) + 0{,}005$ soit $P' = -0{,}005P + 0{,}005$.

Ainsi la fonction P est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}005y + 0{,}005$. .

Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}005y + 0{,}005$ sont les fonctions $t \mapsto ke^{-0{,}005t} - \dfrac{0{,}005}{-0{,}005}$ soit $x \mapsto ke^{-0{,}005t} + 1$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

P est solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle $y' = -0{,}005y + 0{,}005$ donc il existe une constante réelle k telle que pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathrm{P}(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1$.

Or $\mathrm{P}(0) = 0{,}8$, ainsi $k + 1 = 0{,}8$ soit $k = -0{,}2$.

On en déduit que pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathrm{P}(t) = -0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1$.

On cherche alors $t \geq 0$ tel que $\mathrm{P}(t) = 0{,}95$.

Or $-0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 1 = 0{,}95$ est équivalent à $\mathrm{e}^{-0{,}005t} = 0{,}25$ soit $t = \dfrac{\ln(0{,}25)}{-0{,}005} \approx 277{,}3$ secondes.

14 Calcul intégral

Questions-Tests

1 **a)** (1) **b)** 7,5 (réponse (2))

2 (2) **3** (2) **4** (2) **5** (3)

Découvrir

1 Encadrement d'une aire

1 **b)** L'intervalle $[0\ ;\ 1]$ est découpé en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$.

Sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, on construit un rectangle au-dessous de la courbe de « hauteur » $f\left(\frac{k}{n}\right)$ et un rectangle au-dessus de la « hauteur » $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

c) s_n représente la somme des aires des rectangles situés au-dessous de la courbe et S_n celle des rectangles situés au-dessus de la courbe.

2 **a)** Avec le logiciel, on obtient pour $n = 16$, $s_n = 1{,}67$ et $S_n = 1{,}77$, donc

$$1{,}67 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1{,}77$$

b) Par exemple $\mathscr{A} \approx 1{,}675$

2 Aire et primitive

1 **a)** $\mathscr{A}(t_0 + h) - \mathscr{A}(t_0)$ est l'aire (en unité d'aire) délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t_0$ et $x = t_0 + h$.

Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle situé au-dessous de la courbe sur $[t_0\ ;\ t_0 + h]$ et celle du rectangle situé au-dessus de la courbe $[t_0\ ;\ t_0 + h]$, c'est-à-dire :

$$ht_0^{\,2} \leqslant \mathscr{A}(t_0 + h) - \mathscr{A}(t_0) \leqslant h(t_0 + h)^2.$$

On obtient alors (h > 0) :

$$t_0^{\,2} \leqslant \frac{\mathscr{A}(t_0 + h) - \mathscr{A}(t_0)}{h} \leqslant (t_0 + h)^2$$

b) Pour t_0 et $t_0 + h$ dans $[0\ ;\ 5]$ avec $h < 0$, on obtient de même :

$-\,h\ (t_0 + h)^2 \leqslant (\mathscr{A}(t_0) - \mathscr{A}(t_0 + h) \leqslant -\,ht_0^{\,2}$

puis $(-\,h > 0)$:

$$(t_0 + h)^2 \leqslant \frac{\mathscr{A}(t_0 + h) - \mathscr{A}(t_0)}{h} \leqslant t_0^{\,2}$$

c) $\lim\limits_{h \to 0}(t_0 + h)^2 = t_0^{\,2}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{h \to 0}\frac{\mathscr{A}(t_0 + h) - \mathscr{A}(t_0)}{h} = t_0^{\,2}$.

On en déduit que la fonction $\mathscr{A}$ est dérivable en $t_0(t_0 \in [0\ ;\ 5])$ et $\mathscr{A}'(t_0) = t_0^{\,2}$, soit $\mathscr{A}'(t_0) = v(t_0)$.

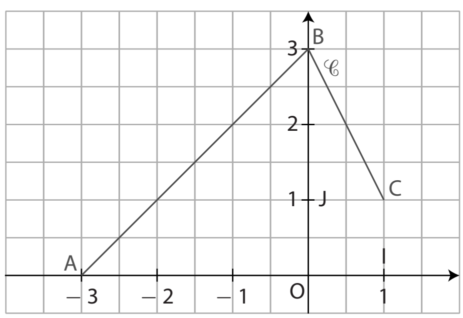
2 **a)** Pour tout réel $t \in [0\ ;\ 5]$, $\mathscr{A}'(t) = v(t)$.

La fonction $\mathscr{A}$ est la primitive de la fonction v sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ telle que $\mathscr{A}(0) = 0$.

b) Pour $t \in [0\ ;\ 5]$, $\mathscr{A}$(t) est la distance parcourue par la particule à l'instant t.

Savoir-faire

3 **a)**



b) g est continue et positive sur $[-3\,;1]$ donc $\displaystyle\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$, soit la somme de l'aire du triangle AOC et du trapèze rectangle OBCI. Donc

$$\int_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \frac{3\times 3}{2} + \frac{(3+1)\times 1}{2} = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}.$$

4 **a)** La fonction F est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{6x(x+4) - 3x^2\times 1}{(x+4)^2} = \frac{3x^2+24x}{(x+4)^2},$$

donc $\mathrm{F}'(x) = f(x)$. Ainsi F est une primitive de f sur I.

b) f est continue car f est une fonction rationnelle et f est positive sur I donc :

$$\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(2).$$

Or $\mathrm{F}(4) = \dfrac{3\times 4^2}{4+4} = 6$ et $\mathrm{F}(2) = \dfrac{3\times 2^2}{2+4} = 2$, donc $\displaystyle\int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 6 - 2 = 4.$

7 La fonction $\mathrm{F} : x \mapsto 2\mathrm{e}^x + \dfrac{1}{2}x^2$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2\mathrm{e}^x + x$ sur $\mathbb{R}$.

Alors : $\displaystyle\int_{-2}^{0} (2\mathrm{e}^x + x)\mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_{-2}^{0} = \mathrm{F}(0) - \mathrm{F}(-2).$

Or $\mathrm{F}(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2$ et $\mathrm{F}(-2) = 2\mathrm{e}^{-2} + 2$ donc

$$\int_{-2}^{0} (2\mathrm{e}^x + x)\mathrm{d}x = 2 - 2\mathrm{e}^{-2} - 2 = -2\mathrm{e}^{-2}.$$

8 **a)** La fonction $\mathrm{F} : t \mapsto t - \dfrac{1}{2}t^2 - \mathrm{e}^t$ est une primitive de la fonction $f : t \mapsto 1 - t - \mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - t - \mathrm{e}^t)\mathrm{d}t = [\mathrm{F}(t)]_{-1}^{1} = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(-1).$

Or $\mathrm{F}(1) = \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}$ et $\mathrm{F}(-1) = -\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-1}$ donc

$$\int_{-1}^{1} (1 - t - \mathrm{e}^t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \mathrm{e} + \frac{3}{2} + \mathrm{e}^{-1} = 2 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}.$$

b) La fonction $\mathrm{F} : u \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2u} - \dfrac{1}{2}u^2 - 2u$ est une primitive de la fonction $f : u \mapsto \mathrm{e}^{2u} - u - 2$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $\displaystyle\int_{-2}^{1} (\mathrm{e}^{2u} - u - 2)\mathrm{d}u = [\mathrm{F}(u)]_{-2}^{1} = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(-2).$

Or $\mathrm{F}(1) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{5}{2}$ et $\mathrm{F}(-2) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4} + 2$ donc

$$\int_{-2}^{1} (\mathrm{e}^{2u} - u - 2)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4} - 2$$

$$= -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4}.$$

c) La fonction $\mathrm{F} : x \mapsto 3\mathrm{e}^{-x} + x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto -3\mathrm{e}^{-x} + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $\displaystyle\int_{0}^{2} (-3\mathrm{e}^{-x} + 1)\mathrm{d}x = [\mathrm{F}(x)]_{0}^{2} = \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(0).$

Or $\mathrm{F}(2) = 3\mathrm{e}^{-2} + 2$ et $\mathrm{F}(0) = 3$ donc

$$\int_{0}^{2} (-3\mathrm{e}^{-x} + 1)\mathrm{d}x = 3\mathrm{e}^{-2} + 2 - 3 = 3\mathrm{e}^{-2} - 1.$$

9 **a)** Pour tout nombre réel x de $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{\pi}{2} \leqslant x + \pi \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$ donc $\cos(x+\pi) \leqslant 0$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant 0$.

b) La fonction f est continue et négative sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc l'aire de D, en unité d'aire, est :

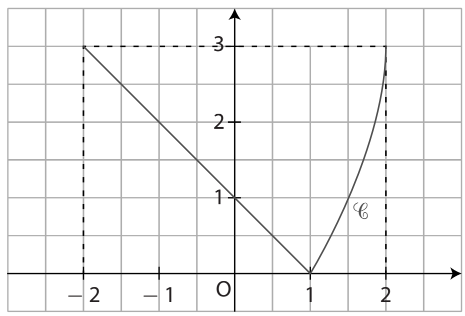
$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

La fonction $x \mapsto \sin(x+\pi)$ est une primitive de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = [\sin(x+\pi)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$$

Ainsi $\mathscr{A}(\mathrm{D}) = -(-2)$*u.a.* $= 2$*u.a.*

12 **a)**



b) L'aire du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$, en *u.a.*, est :

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x.$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} (-x+1)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-2}^{1} (-x+1)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{1} = \frac{1}{2} - (-4) = \frac{9}{2}$$

$$\int_{1}^{2} (x^2 - 1)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{1}^{2} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Donc $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)\mathrm{d}x = \frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{35}{6}$ et $\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \dfrac{35}{6}$*u.a.*

13 **a)** Pour tout réel x de $[0\,;\pi]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
$x^2 \geqslant 0$, donc $0 \leqslant x^2\sin(x) \leqslant x^2$.

b) Les propriétés de positivité et d'intégration des inégalités permettent d'écrire :

$$0 \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2\sin(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2\mathrm{d}x.$$

Or, $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{64}\right) = \frac{7\pi^3}{192}$,

donc $0 \leqslant \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2\sin(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{7\pi^3}{192}$

(Remarque :
La calculatrice donne $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2\sin(x)\mathrm{d}x \approx 1{,}053$)

16 **a)** Pour tout réel x de $\mathrm{I} = [1\ ;\mathrm{e}]$, on pose :

$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = -x + 3 \qquad v(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^{\mathrm{e}} (-x+3)\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right)\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}}\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} (-x+3)\ln(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e} - \left[-\frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} (-x+3)\ln(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 - 3\mathrm{e} + \frac{11}{4}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} (-x+3)\ln(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{11}{4}$$

b) Pour tout réel x de $\mathrm{I} = [1\ ;\mathrm{e}]$, on pose :

$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x^2 \qquad v(x) = \dfrac{1}{3}x^3$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{3}x^2\mathrm{d}x$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^{\mathrm{e}}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{9}$$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\mathrm{e}^3 + \frac{1}{9}$$

17 **a)** Pour tout réel t de $\mathrm{I} =]0\ ; +\infty[$, on pose :

$u(t) = \ln(t) \qquad u'(t) = \dfrac{1}{t}$

$v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \qquad v(t) = -\dfrac{1}{t}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties, pour tout réel $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\ln(x) - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x} + 1$$

b) Par exemple, la fonction : $x \mapsto -\dfrac{1}{x}\ln(x) - \dfrac{1}{x}$ est une primitive de la fonction : $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $]0\ ; +\infty[$.

19 **a)** Le programme devient :

```
from math import *

def f(x):
    y=1/(1+x**2)
    return y

def Rectangles(n):
    Som=0
    for k in range(1,n):
        Som=Som+f(1+k/n)
    Som1=1/n*(Som+f(2))
    Som2=1/n*(Som+f(1))
    return Som1,Som2
```

b)

```
>>> Rectangles(100)
(0.32025338773317485, 0.32325338773317486)
```

D'après cet affichage :

$$0{,}32 \leqslant \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x \leqslant 0{,}33$$

20 **a)** Le programme devient :

```
from math import *

def f(x):
    y=exp(-x**2)
    return y

def Rectangles(n):
    Som=0
    for k in range(1,n):
        Som=Som+f(-1+k/n)
    Som1=1/n*(Som+f(-1))
    Som2=1/n*(Som+f(0))
    return Som1,Som2
```

b)

```
>>> Rectangles(2000)
(0.7466660873444098, 0.7469821476238241)
```

D'après cet affichage :

$$0{,}746 \leqslant \int_{-1}^0 h(x)\mathrm{d}x \leqslant 0{,}747$$

Acquérir des automatismes

21 $\displaystyle\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x = \frac{4\times 3}{2} + 3\times 3 = 15.$

22 L'aire $\mathscr{A}$ du trapèze ABCD, en *u.a.*, est donnée par : $\qquad \mathscr{A} = \displaystyle\int_2^6 \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x.$

23 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - 1$

24 **a)** $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

L'égalité est vraie.

b) $\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

L'égalité est fausse.

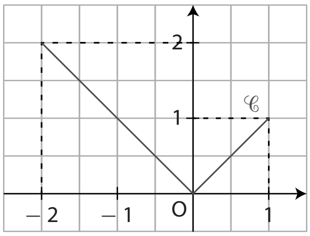
25 **a)** L'aire, en *u.a.*, du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est :

$$\mathscr{A} = \frac{4 \times 3}{2} + 3 \times 3 + \frac{(5+3) \times 3}{2} = 27$$

b) f est continue et positive sur $[-5\,;5]$ donc

$$\mathscr{A} = \int_{-5}^{5} f(x)\mathrm{d}x.$$

26 **a)**



b) L'aire, en *u.a.*, du domaine D situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est donnée par :

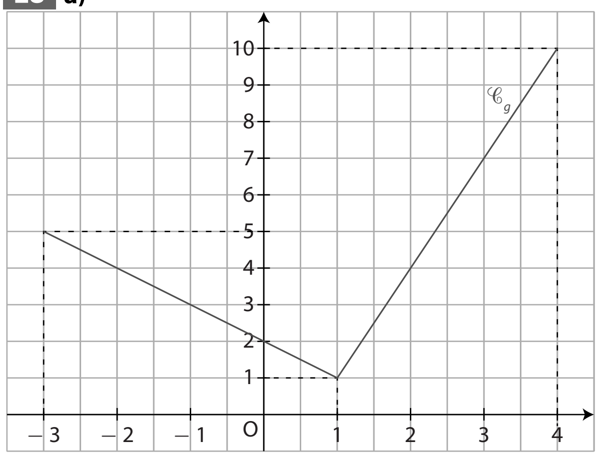
$$\mathscr{A} = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{1 \times 1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

27 **a)** f est continue et positive sur $[0\,;2]$.

D'après le graphique : $2 \times 1{,}5 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 2 \times 3$, soit $3 \leqslant \mathrm{I} \leqslant 6$.

b) Avec la calculatrice :

28 **a)**



b) La courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g est située au-dessus de l'axe des abscisses donc g est positive sur $[-3\,;4]$.

D'autre part, on peut tracer $\mathscr{C}_g$ sans lever le crayon donc g est continue sur $[-3\,;4]$.

c) $\int_{-3}^{4} g(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en *u.a.*, du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$, donc :

$$\int_{-3}^{4} g(x) = \frac{(5+1) \times 4}{2} + \frac{(10+1) \times 3}{2} = \frac{57}{2}.$$

29 **a)** Pour $x \geqslant 1$, le nombre $\mathrm{F}(x)$ est égal à l'aire, en *u.a.*, du domaine D situé sous la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $[1\,;x]$.

b) La fonction ln est continue et positive sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ donc la fonction F est une primitive de ln sur cet intervalle.

Ainsi pour tout réel $x \in [1\,;+\infty[$, $\mathrm{F}'(x) = \ln(x)$.

c) Pour tout réel $x \in [1\,;+\infty[$, $\mathrm{F}'(x) \geqslant 0$ donc la fonction F est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

30 **a)** La fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$ est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2},$$

soit $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ et F est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

b) f est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$, donc

$$\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(5) - \mathrm{F}(0) = \frac{25}{6}$$

31 **a)** Une primitive de la fonction $f : x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[1\,;2]$ est la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \frac{1}{4}x^4$. f est continue et positive sur $[1\,;2]$ donc :

$$\int_1^2 x^3 \mathrm{d}x = \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(1) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

b) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur l'intervalle $[-1\,;1]$ est la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$. f est continue et positive sur $[-1\,;1]$ donc :

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(-1) = -\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}$$

c) Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \sin(x)$. f est continue et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{F}(0) = 1.$$

32 $\int_0^1 (\mathrm{e}^x + 1)\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x + x]_0^1 = \mathrm{e}^1 + 1 - 1 = \mathrm{e}$

33 $\int_{-1}^{1} x^5 \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0,$

Justine a raison.

34 La fonction sinus est continue et négative sur $[-\pi\,;0]$, l'aire, en *u.a.*, de D est donnée par :

$$\mathscr{A} = -\int_{-\pi}^{0} \sin(x)\mathrm{d}x$$

35 La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est continue et négative sur $[1\,;2]$, l'aire, en *u.a.*, de D est donnée par :

$$\mathscr{A} = -\int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = -[-\ln(x)]_1^2 = -[-\ln(2)]$$

$$\mathscr{A} = \ln(2)$$

36 **a)** $\int_{-2}^{2}(3x^2+x-4)\mathrm{d}x=\left[x^3+\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{-2}^{2}$

$\int_{-2}^{2}(3x^2+x-4)\mathrm{d}x=2-2=0$

b) $\int_{-2}^{-1}t(t^2-1)\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{4}(t^2-1)^2\right]_{-2}^{-1}$

$\int_{-2}^{-1}t(t^2-1)\mathrm{d}t=0-\frac{9}{4}=-\frac{9}{4}$

37 **a)** $\int_{0}^{\pi/2}(\sin(x)-\cos(x))\mathrm{d}x=[-\cos(x)-\sin(x)]_0^{\pi/2}$

$\int_{0}^{\pi/2}(\sin(x)-\cos(x))\mathrm{d}x=-1-(-1)=0$

b) $\int_{-\pi}^{0}(\cos(2x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{-\pi}^{0}$

$\int_{-\pi}^{0}(\cos(2x)\mathrm{d}x=0-0=0$

38 **a)** $\int_{-1}^{1}(1-\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x=\left[x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_{-1}^{1}$

$\int_{-1}^{1}(1-\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x=\left(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}\right)$

$\int_{-1}^{1}(1-\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x=2-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$

b) $\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{1-2x}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{1-2x}\right]_{-2}^{0}$

$\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{1-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}-\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{5}\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{5}$

39 **a)**

$\int_{1/2}^{2}\left(-u+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\left[-\frac{1}{2}u^2+\ln(u)\right]_{1/2}^{2}$

$\int_{1/2}^{2}\left(-u+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=(-2+\ln(2))-\left(-\frac{1}{8}-\ln(2)\right)$

$=-\frac{15}{8}+2\ln(2)$

b) $\int_{1/3}^{1}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_{1/3}^{1}$

$\int_{1/3}^{1}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x=0-\frac{1}{2}(\ln(3))^2=-\frac{1}{2}(\ln(3))^2$

40 $\int_{-1}^{0}3x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\left[\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{0}$

$\int_{-1}^{0}3x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{1}=\frac{3}{2}(1-\mathrm{e})$

41 Sur la ligne 2 :

$\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(x+2-\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-2\ln(x-1)\right]_{\frac{3}{2}}^{2}$

$\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(x+2-\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=6-\left(\frac{33}{8}+2\ln(2)\right)$

Donc $\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(x+2-\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\frac{-16\ln(2)+15}{8}$

Sur la ligne 3 :

$\int_{3}^{4}\left(x+2-\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-2\ln(x-1)\right]_{3}^{4}$

$\int_{3}^{4}\left(x+2-\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=(16-2\ln(3))-\left(\frac{21}{2}-2\ln(2)\right)$

Donc $\int_{3}^{4}\left(x+2-\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\frac{-4\ln(2)-4\ln(3)+11}{2}$

42 **a)** On résout l'équation $i(t)=0{,}75$, soit $1{,}5-1{,}5\mathrm{e}^{-50t}=0{,}75$, c'est-à-dire :
$\mathrm{e}^{-50t}=0{,}5$. Cette équation est équivalente à $-50t=\ln(0{,}5)$, donc elle admet une solution unique $t_0=-\frac{\ln(0{,}5)}{50}=\frac{\ln(2)}{50}$

b) $Q=\int_{0}^{t_0}1{,}5-1{,}5\mathrm{e}^{-50t}\mathrm{d}t=[1{,}5t+0{,}03\mathrm{e}^{-50t}]_0^{t_0}$

$Q=0{,}03\ln(2)+0{,}03\times\frac{1}{2}-0{,}03$

$Q=0{,}03\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)$

43 **a)** f est continue et négative sur $]-2\,;+\infty[$, l'aire du domaine coloré en bleu, en *u.a.*, est donnée par :

$$\mathcal{A}=-\int_{0}^{1}\frac{-4}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=-\left[\frac{4}{x+2}\right]_{0}^{1}$$

$$\mathcal{A}=-\left(\frac{4}{3}-2\right)=\frac{2}{3}$$

b) L'unité d'aire vaut $0{,}5\times0{,}5=0{,}25\text{ cm}^2$.

Donc $\mathcal{A}=\frac{2}{3}\times0{,}25=\frac{1}{6}\text{cm}^2$

44 f est continue sur $[0\,;2]$, négative sur $[0\,;1]$ et positive sur $[1\,;2]$.

L'aire, en *u.a.*, du domaine coloré est donnée par :

$\mathcal{A}=-\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

$\mathcal{A}=-\left[-\frac{1}{6}x^3+x^2-\frac{3}{2}x\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{6}x^3+x^2-\frac{3}{2}x\right]_{1}^{2}$

$\mathcal{A}=-\left(-\frac{2}{3}-0\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=1.$

45 **a)** $\int_{1}^{2}\frac{3}{1+x}\mathrm{d}x=3\int_{1}^{2}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

b) $\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{1+x}+\frac{3}{3+x}\right)\mathrm{d}x=3\int_{1}^{2}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\frac{3}{3+x}\mathrm{d}x$

$\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{1+x}+\frac{3}{3+x}\right)\mathrm{d}x=3\ln\left(\frac{3}{2}\right)+3(-\ln(4)+\ln(5))$

et on peut éventuellement remarquer :

$$\int_{1}^{2}\left(\frac{3}{1+x}+\frac{3}{3+x}\right)\mathrm{d}x=3\ln(15)-9\ln(2)$$

46 **a)** $\int_{-5}^{5}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-5}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{5}f(t)\mathrm{d}t=3+4=7$

b) $\int_{-5}^{10}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-5}^{0}f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{10}f(t)\mathrm{d}t=3+9=12$

c) $\int_{5}^{10}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{10}f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{5}f(t)\mathrm{d}t=9-4=5$

47 **a)** Pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$, $xe^x \geqslant 0$ donc $\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x \geqslant 0$.

b) Pour tout réel $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $x\ln(x) \leqslant 0$ donc $\int_{1/2}^1 x\ln(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

c) Pour tout réel $x \in [-\pi\ ;\ 0]$, $x^2\sin(x) \leqslant 0$ donc $\int_{-\pi}^0 x^2\sin(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

48 **a)** Pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$, $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$.

b) On en déduit que :

$$\int_0^1 x^3\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$

49 $\int_1^9 f(x)\mathrm{d}x = 2 \times \frac{4 \times 4}{2} = 16$, la valeur moyenne de f sur $[1\ ;\ 9]$ est donnée par :

$$\mu = \frac{1}{8}\int_1^9 f(x)\mathrm{d}x = \frac{16}{8} = 2$$

50 La valeur moyenne de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ est donnée par :

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}[-\cos(x)]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$$

51 Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{-1}^3 (3f(x) + 4g(x))\mathrm{d}x = 3\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x + 4\int_{-1}^3 g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^3 (3f(x) + 4g(x))\mathrm{d}x = 3 \times 2 + 4 \times (-2) = -2$$

52 Par linéarité de l'intégrale :

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos^2(x)\mathrm{d}x + \int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \int_0^\pi (\mathrm{e}^x\cos^2(x) + \mathrm{e}^x\sin^2(x))\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x(\cos^2(x) + \sin^2(x))\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \int_0^\pi \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^\pi = \mathrm{e}^\pi - 1.$$

53 **a)** $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$

b) Par linéarité de l'intégrale :

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

c) Donc $\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2} - \mathrm{I}_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2)$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}(1 - \ln(2))$$

54 Avec la relation de Chasles :

$$\mathrm{I} = \int_{-3}^4 |\,x\,|\mathrm{d}x = \int_{-3}^0 -x\,\mathrm{d}x + \int_0^4 x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I} = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$\mathrm{I} = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2}$$

55 **a)** f est continue sur $]-\infty\ ;\ 1]$ car f est une fonction affine sur cet intervalle.

f est continue sur $]1\ ;\ +\infty[$ car f est un polynôme sur cet intervalle.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x<1}} f(x) = 3$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\x>1}} f(x) = 3$ et $f(1) = 3$ donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Avec la relation de Chasles :

$$\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^1 (2x+1)\mathrm{d}x + \int_1^3 (2+x^2)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x = [x^2 + x]_{-2}^1 + \left[2x + \frac{1}{3}x^3\right]_1^3$$

$$\int_{-2}^3 f(x)\mathrm{d}x = (2-2) + \left(15 - \frac{7}{3}\right) = \frac{38}{3}$$

56 **1.** Pour tout réel x, $f(x) = (x+1)(x-2)$

Si $x \leqslant -1$, alors $f(x) \geqslant 0$;

si $-1 \leqslant x \leqslant 2$, alors $f(x) \leqslant 0$;

si $x \geqslant 2$, alors $f(x) \geqslant 0$.

2. D'après la propriété de positivité de l'intégrale :

a) $\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ **b)** $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$

c) $\int_3^5 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

57 **a)** Pour tout réel $x \in [-1\ ;\ 0]$, $x + 1 \geqslant 0$ donc $(x+1)\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.

Avec la propriété de positivité de l'intégrale $\int_{-1}^0 (x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \geqslant 0$

b) Pour tout réel $x \in [-2\ ;\ 0]$, $x \leqslant 0$ donc $x(x^2+1) \leqslant 0$.

Avec la propriété de positivité de l'intégrale $\int_{-2}^0 x(x^2+1)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

58 **1. a)** Pour tout réel $x \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$, $f(x) \leqslant 0$ donc $\int_{-1/2}^0 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

b) Pour tout réel x de $[0\ ;\ 3]$, $f(x) \geqslant 0$ donc $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

2. Pour tout réel $x \in [-4\ ;\ -1]$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

D'après l'intégration des inégalités :

$$\int_{-4}^{-1} -1\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{-1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{-4}^{-1} 2\,\mathrm{d}x, \text{ donc}$$

$$-3 \leqslant \int_{-4}^{-1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 6$$

Pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Donc $0 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 2\,\mathrm{d}x$, soit

$$0 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2.$$

59 **a)** Pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$,

$1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$

b) D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant 1$$

60 **a)** La fonction exp est croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $t \in [-1\,;1]$, $0 < e^t \leqslant e$.

$t^2 \geqslant 0$ donc $0 \leqslant t^2 e^t \leqslant e \times t^2$.

b) D'après les propriétés de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_{-1}^1 t^2 e^t \mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^1 e \times t^2 \mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_{-1}^1 e \times t^2\mathrm{d}t = e \times \left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1 = \frac{2e}{3}$, donc

$$0 \leqslant \int_{-1}^1 t^2 e^t \mathrm{d}t \leqslant \frac{2e}{3}.$$

61 **a)** Pour tout nombre réel x de $[0\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0\,;1]$.

b) Ainsi, pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$, c'est-à-dire $2 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{2}$.

c) Pour tout réel x de $[0\,;1]$, $2 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{5}{2}$ et $e^x \geqslant 0$ donc $2e^x \leqslant f(x)e^x \leqslant \dfrac{5}{2}e^x$.

D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$$2\int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)e^x\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{2}\int_0^1 e^x\mathrm{d}x$$

$2\left[e^x\right]_0^1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)e^x\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{2}\left[e^x\right]_0^1$, donc

$$2(e-1) \leqslant \int_0^1 f(x)e^x\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{2}(e-1)$$

62 **a)**

$$\mu = \frac{1}{2}\int_{-2}^0 (-x^2 + x - 3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{-2}^0$$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{32}{3}\right) = -\frac{16}{3}$$

b) $\mu = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

c) $\mu = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-3x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x+1}\right]_{-1}^1$

$$\mu = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}e^{-2} + \frac{1}{3}e^4\right) = \frac{1}{6}(e^4 - e^{-2})$$

63 **a)**

$$\mu = \int_0^1 (x^2 + x - 2)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_0^1 = -\frac{7}{6}$$

b) On résout dans $[0\,;1]$ l'équation :

$x^2 + x - 2 = -\dfrac{7}{6}$, soit $x^2 + x - \dfrac{5}{6} = 0$

$\Delta = \dfrac{13}{3}$, $x' = \dfrac{-1+\sqrt{13/3}}{2} \approx 0{,}5$,

$x'' = \dfrac{-1-\sqrt{13/3}}{2} \approx -1{,}5$.

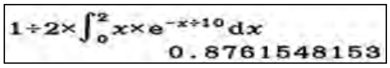
La solution est $c = \dfrac{-1+\sqrt{13/3}}{2}$

64 **a)** Avec le graphique :

$$6 \times 0{,}25 \leqslant \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 9 \times 0{,}25$$

donc $\dfrac{3}{4} \leqslant \mu \leqslant \dfrac{9}{8}$.

b) Avec la calculatrice :



65

$$\mu = \frac{1}{15}\int_0^{15}(980e^{-t/5} + 20)\mathrm{d}t$$

$$\mu = \frac{1}{15}\left[-4\,900e^{-t/5} + 20t\right]_0^{15}$$

$$\mu = \frac{1}{15}(-4\,900e^{-3} + 300 + 4\,900)$$

$$\mu = -\frac{980}{3}e^{-3} + \frac{1040}{3},\quad \mu \approx 330$$

La température moyenne du four sur les 15 premières heures de refroidissement est environ égale à 330 °C.

66 $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x$

67 $u(t) = t$ $\qquad u'(t) = 1$

$v'(t) = e^{3t}$ $\qquad v(t) = \dfrac{1}{3}e^{3t}$

68 **a)** Pour tout réel x de $\mathrm{I} = [0\,;\pi]$, on pose :

$u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos(x)$ $\qquad v(x) = \sin(x)$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^\pi x\cos(x)\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\pi x\cos(x)\mathrm{d}x = -[-\cos(x)]_0^\pi = -2$$

b) Pour tout réel t de $\mathrm{I} = [-1\,;3]$, on pose :

$u(t) = t + 2$ $\qquad u'(t) = 1$

$v'(t) = e^t$ $\qquad v(t) = e^t$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_{-1}^3 (t+2)e^t\mathrm{d}t = [(t+2)e^t]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 1 \times e^t\mathrm{d}t$$

$$\int_{-1}^3 (t+2)e^t\mathrm{d}t = 5e^3 - e^{-1} - [e^t]_{-1}^3$$

$$\int_{-1}^3 (t+2)e^t\mathrm{d}t = 5e^3 - e^{-1} - e^3 + e^{-1} = 4e^3$$

69 **a)** Pour tout réel x de $\mathrm{I} = [0\,;2]$, on pose :

$u(x) = 3x + 1$ $\qquad u'(x) = 3$

$v'(x) = e^{-x}$ $\qquad v(x) = -e^{-x}$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la méthode d'intégration par parties :

$$\int_0^2 (3x+1)e^{-x}dx = [-(3x+1)e^{-x}]_0^2 - \int_0^2 -3e^{-x}dx$$

$$\int_0^2 (3x+1)e^{-x}dx = -7e^{-2} + 1 - [3e^{-x}]_0^2$$

$$\int_0^2 (3x+1)e^{-x}dx = -7e^{-2} + 1 - 3e^{-2} + 3 = 4 - 10e^{-2}$$

b) Pour tout réel x de $I = [1 ; e]$, on pose :

$u(x) = \ln(x)$ $\qquad u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v'(x) = 2x + 1$ $\qquad v(x) = x^2 + x$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la méthode d'intégration par parties :

$$\int_1^e (2x+1)\ln(x)dx = [(x^2+x)\ln(x)]_1^e - \int_1^e (x+1)dx$$

$$\int_1^e (2x+1)\ln(x)dx = e^2 + e - \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^e$$

$$\int_1^e (2x+1)\ln(x)dx = e^2 + e - \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{2}$$

70 **a)** Pour tout réel x de $I = [0 ; 1]$, on pose :

$u(x) = x^2$ $\qquad u'(x) = 2x$

$v'(x) = e^x$ $\qquad v(x) = e^x$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la méthode d'intégration par parties :

$J = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx$, donc $J = e - 2I$.

b) Pour tout réel x de $I = [0 ; 1]$, on pose :

$u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^x$ $\qquad v(x) = e^x$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la méthode d'intégration par parties :

$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1$

$I = e - (e - 1) = 1.$

c) Alors $J = e - 2I = e - 2$

71 Pour tout réel x de $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose :

$u(x) = x^2$ $\qquad u'(x) = 2x$

$v'(x) = \cos(x)$ $\qquad v(x) = \sin(x)$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)dx = [x^2\sin(x)]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$$

Pour tout réel x de $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose :

$u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin(x)$ $\qquad v(x) = -\cos(x)$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx = [-x\cos(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -\cos(x)dx$$

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx = -[-\sin(x)]_0^{\pi/2} = -(-1) = 1$$

On en déduit alors que

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(x)dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

72 **a)** Pour tout réel t de $I =]0 ; +\infty[$, on pose :

$u(t) = \ln(t)$ $\qquad u'(t) = \dfrac{1}{t}$

$v'(t) = t^2$ $\qquad v(t) = \dfrac{1}{3}t^3$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la méthode d'intégration par parties :

$$\int_1^x t^2\ln(t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{3}t^2dt$$

$$\int_1^x t^2\ln(t)dt = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \left[\frac{1}{9}t^3\right]_1^x$$

$$\int_1^x t^2\ln(t)dt = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}$$

b) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3\ln(x) - \dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{1}{9}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2\ln(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Pour se tester

73 **1.** B **2.** C **3.** C

74 **1.** B, C **2.** A, B **3.** A, C, D

75 **1. L'affirmation est vraie**.
En effet, cet encadrement découle de la représentation graphique de la fonction h.

2. L'affirmation est fausse.
En effet,

$$\int_0^2 (f(x)+3)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 3dx = \int_0^2 f(x)dx + 6$$

3. L'affirmation est vraie.
En effet, pour tout réel x de $I = [0 ; 1]$, on pose :

$u(x) = 1 - 2x$ $\qquad u'(x) = -2$

$v'(x) = e^{-x}$ $\qquad v(x) = -e^{-x}$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la méthode d'intégration par parties :

$$\int_0^1 (1-2x)e^{-x}dx = [-(1-2x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 2e^{-x}dx$$

$$\int_0^1 (1-2x)e^{-x}dx = e^{-1} + 1 - 2[-e^{-x}]_0^1$$

$$\int_0^1 (1-2x)e^{-x}dx = e^{-1} + 1 - 2(-e^{-1} + 1) = 3e^{-1} - 1$$

S'entraîner

76 **1.** La courbe $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[a\,;b]$.

2. a) L'aire (en *u.a.*) du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée par : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, celle du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ est donnée par : $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

b) D'après la propriété d'additivité des aires, en *u.a.*, on a :

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

et par linéarité :

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x$$

3. a) Le domaine D_1 est l'image du domaine D par la translation de vecteur $-m\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ et une translation conserve les aires donc $\mathscr{A}(\mathrm{D}_1) = \mathscr{A}(\mathrm{D})$.

b) Pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant m$ donc $f_1(x) \geqslant 0$.

c) Avec le résultat de la question 2.

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}_1) = \int_a^b (g_1(x) - f_1(x))\mathrm{d}x.$$

On en déduit que :

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b (g(x) - m - f(x) + m)\mathrm{d}x,$$

$$\mathscr{A}(\mathrm{D}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\mathrm{d}x.$$

77 **1. a)** D'après la relation de Chasles, pour tout réel x de I, $\varphi(x) = \int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

Donc : $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$

$\varphi(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)$

b) F est dérivable sur I donc φ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $\varphi'(x) = \mathrm{F}'(x) - (-1)\mathrm{F}'(-x)$

$\varphi'(x) = \mathrm{F}'(x) + \mathrm{F}'(-x)$

Or, $\mathrm{F}'(x) = f(x)$ et $\mathrm{F}'(-x) = f(-x)$, donc $\varphi'(x) = f(x) + f(-x)$

2. f est une fonction impaire sur I, donc pour tout réel x de I, $f(-x) = -f(x)$ et donc $\varphi'(x) = 0$.

φ est une fonction constante sur I et $\varphi(0) = 0$ (d'après la définition de φ) donc pour tout réel x de I, $\varphi(x) = 0$.

3. f est une fonction paire sur I, donc pour tout réel x de I, $f(-x) = f(x)$ et donc $\varphi'(x) = 2f(x)$.

Alors, il existe un nombre réel C tel que pour tout réel x de I, $\varphi(x) = 2\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$.

Or $\varphi(0) = \mathrm{F}(0) = 0$, donc $\mathrm{C} = 0$.

Donc pour tout réel x de I, $\varphi(x) = 2\mathrm{F}(x)$, soit $\int_{-x}^x f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

78 **Parcours 1**

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = x\sin(x)$

Pour tout réel x, $\mathrm{F}'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

Parcours 2

a) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$\mathrm{G}'(x) = 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$

$\mathrm{G}'(x) = g(x)$

Donc G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

b) On en déduit que :

$$\int_0^{\pi/2} g(x)\mathrm{d}x = [x^2\cos(x)]_0^{\pi/2} = 0.$$

79 **1.**

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{3}{2x-1}\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\ln(2x-1)\right]_1^2$$

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(3)$$

2. a) Pour tout réel x de $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$,

$$g(x) - f(x) = \frac{9-6x}{4x-2} - \frac{6}{4x-2} = \frac{3(1-2x)}{2(2x-1)} = -\frac{3}{2}$$

b) Pour tout réel x de $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $g(x) = f(x) - \frac{3}{2}$,

donc $\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{3}{2}\mathrm{d}x$

$$\int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln(3) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(\ln(3) - 1)$$

80 **a)** Pour tout réel x,

$$2 + \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4} = \frac{2(\mathrm{e}^x + 4) + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4} = \frac{3\mathrm{e}^x + 8}{\mathrm{e}^x + 4} = f(x)$$

b)

$$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \left(2 + \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 4}\right)\mathrm{d}x = [2x + \ln(\mathrm{e}^x + 4)]_{-1}^0$$

$$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \ln(5) - (-2 + \ln(\mathrm{e}^{-1} + 4))$$

$$= 2 + \ln(5) - \ln(\mathrm{e}^{-1} + 4)$$

81 **a)** On note G la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + \mathrm{C}_1.$$

G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$\mathrm{G}'(x) = x^3\ln(x) + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^3 = x^3\ln(x).$$

Ainsi, G est une primitive de la fonction $x \mapsto x^3\ln(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{F}(x) = \left[\frac{1}{4}t^4\ln(t) - \frac{1}{16}t^4\right]_1^x$, donc :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{4}x^4\ln(x) - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{16}$$

82 $\int_{-1}^{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=[\sqrt{x^2+1}]_{-1}^{2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

83 **1. a)** Pour tout réel $x \neq 1$,

$ax^2+bx+c+\dfrac{d}{1-x}$

$=\dfrac{-ax^3+(a-b)x^2+(b-c)x+c+d}{1-x}$

Le système $\begin{cases}-a=1\\ a-b=-6\\ b-c=1\\ c+d=0\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}a=-1\\ b=5\\ c=4\\ d=-4\end{cases}$

Ainsi, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x)=-x^2+5x+4-\dfrac{4}{1-x}$

b) $\int_0^{1/2}f(x)\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+4x+4\ln(1-x)\right]_0^{1/2}$

$\int_0^{1/2}f(x)\mathrm{d}x=-4\ln(2)+\dfrac{31}{12}$

2. Pour tout réel x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on pose :

$u(x)=\ln(1-x)$ $\qquad u'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$

$v'(x)=3x^2-12x+1$ $\qquad v(x)=x^3-6x^2+x$

u et v sont dérivables sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, u' et v' sont continues sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

D'après la formule d'intégration par parties :

$\mathrm{I}=[(x^3-6x^2+x)\ln(1-x)]_0^{1/2}-\int_0^{1/2}-\dfrac{x^3-6x^2+x}{1-x}\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}=\dfrac{7}{8}\ln(2)+\int_0^{1/2}f(x)\mathrm{d}x$, et d'après la question **1.**

$\mathrm{I}=\dfrac{7}{8}\ln(2)-4\ln(2)+\dfrac{31}{12}=\dfrac{31}{12}-\dfrac{25}{8}\ln(2).$

84 **1.** Pour tout réel x appartenant à $[0\,;1]$, on pose :

$u(x)=x$ $\qquad u'(x)=1$

$v'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ $\qquad v(x)=-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$

u et v sont dérivables sur $[0\,;1]$, u' et v' sont continues sur $[0\,;1]$.

D'après la formule d'intégration par parties :

$\mathrm{I}=\left[-\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}\right]_0^1-\int_0^1-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}=-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}}+\mathrm{J}$

2. a) Pour tout réel x, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^x)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}.$

b) $\mathrm{J}=\int_0^1\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}\mathrm{d}x=[-\ln(\mathrm{e}^{-x}+1)]_0^1$

$\mathrm{J}=-\ln(\mathrm{e}^{-1}+1)+\ln(2)$

3. On en déduit que

$\mathrm{I}=-\dfrac{1}{1+\mathrm{e}}-\ln(\mathrm{e}^{-1}+1)+\ln(2).$

85 **a)** On note a, b, c, d des réels tels que pour tout réel x, $\quad \mathrm{F}(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)\mathrm{e}^{2x}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\mathrm{F}'(x)=[2ax^3+(3a+2b)x^2+2(b+c)x+(c+2d)]\mathrm{e}^{2x}$.

Le système $\begin{cases}2a=1\\ 3a+2b=0\\ 2(b+c)=0\\ c+2d=0\end{cases}$ équivaut à $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{3}{4}\\ c=\frac{3}{4}\\ d=-\frac{3}{8}\end{cases}$

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\mathrm{F}(x)=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)\mathrm{e}^{2x}$ est une primitive de la fonction $x\mapsto x^3\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$.

b) On en déduit que :

$\mathrm{I}=[\mathrm{F}(x)]_0^2=\mathrm{F}(2)-\mathrm{F}(0)=\dfrac{17\mathrm{e}^4}{8}+\dfrac{3}{8}$

$\mathrm{I}=\dfrac{17\mathrm{e}^4+3}{8}$

86 La hauteur moyenne de la ligne électrique est donnée par :

$\mu=\dfrac{1}{200}\int_{-100}^{100}68{,}5(\mathrm{e}^{x/137}+\mathrm{e}^{-x/137})\mathrm{d}x$

$\mu=\dfrac{68{,}5}{200}[137\mathrm{e}^{x/137}-137\mathrm{e}^{-x/137}]_{-100}^{100}$

$\mu=\dfrac{68{,}5\times137}{200}[(\mathrm{e}^{100/137}-\mathrm{e}^{-100/137})-(\mathrm{e}^{-100/137}-\mathrm{e}^{100/137})]$

$\mu=\dfrac{9384{,}5}{200}[2(\mathrm{e}^{100/137}-\mathrm{e}^{-100/137})]$

$\mu=93{,}845(\mathrm{e}^{100/137}-\mathrm{e}^{-100/137})$

On obtient $\mu\approx149{,}5$ m.

87 **a)** Le nombre moyen de bovins malades durant les dix premiers jours est donné par :

$\mu=\dfrac{1}{10}\int_0^{10}(30t^2-t^3)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{10}\left[10t^3-\frac{1}{4}t^4\right]_0^{10}$

$\mu=750.$

b) n désigne un entier naturel, $0\leqslant n\leqslant 20$, le nombre moyen de bovins malades entre le n^{e} jour et le $(n+10)^{\mathrm{e}}$ jour est donné par :

$\mu(n)=\dfrac{1}{10}\int_n^{n+10}(30t^2-t^3)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{10}\left[10t^3-\frac{1}{4}t^4\right]_n^{n+10}$

$\mu(n)=-n^3+15n^2+200n+750.$

À l'aide de la calculatrice, la valeur de n pour laquelle la moyenne $\mu(n)$ est la plus grande est $n=15$ et on obtient $\mu(15)=3\,750$.

88 **Parcours 1**

L'aire, en *u.a.*, du domaine D est donnée par :

$\mathcal{A}(\mathrm{D})=\int_{-3/2}^{-1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{2/3}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2/3}^{1}f(x)\mathrm{d}x$

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Alors
$\mathscr{A}(D) = [F(x)]_{-3/2}^{-1} - [F(x)]_{-1}^{2/3} + [F(x)]_{2/3}^{1}$

$\mathscr{A}(D) = \frac{3}{4} - \left(-\frac{125}{54}\right) + \frac{17}{54}$, donc $\mathscr{A}(D) = \frac{365}{108}$ *u.a.*

Parcours 2

a) L'aire, en *u.a.*, du domaine coloré en orange est :

$$\mathscr{A}_1 = -\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

b) L'aire, en *u.a.*, du domaine coloré en jaune est :

$$\mathscr{A}_2 = \int_1^2 g(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

c) L'aire, en *u.a.*, du domaine coloré en orange et en jaune est : $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$

89 Pour tout réel x, $g(x) = 2\cos(x)\sin(x) - \sin(x)$.
La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :
$G(x) = \sin^2(x) + \cos(x)$ est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
L'aire, en *u.a.*, du domaine coloré est donné par :

$$\mathscr{A} = \int_0^{\pi/3} g(x)\mathrm{d}x - \int_{\pi/3}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{3\pi/2} g(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathscr{A} = [G(x)]_0^{\pi/3} - [G(x)]_{\pi/3}^{\pi} + [G(x)]_{\pi}^{3\pi/2}$$

$\mathscr{A} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) + 2$, donc $\mathscr{A} = \frac{9}{2}$ *u.a.*

90 **1. a)** Pour tout réel x, $f(x) = g(x)$ équivaut à $4 - x^2 = 1 - \frac{1}{4}x^2$, soit $x^2 = 4$, c'est-à-dire $x = -2$ ou $x = 2$.
Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont $A(-2\,;0)$ et $B(2\,;0)$.

b) Pour tout réel x de $[-2\,;2)$,

$f(x) - g(x) = (4 - x^2) - \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)$

$f(x) - g(x) = 3 - \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}(4 - x^2)$

$4 - x^2 \geqslant 0$ donc $g(x) \leqslant f(x)$.

2. $\mathscr{A} = \int_{-2}^{2}(f(x) - g(x))\mathrm{d}x$

$\mathscr{A} = \frac{3}{4}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$

$\mathscr{A} = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right)\right) = 8$ donc $\mathscr{A} = 8$ *u.a.*

91 **1. a)** Pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$,

$$h(x) = \frac{2}{e}\sqrt{x} - \ln(x).$$

h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{e\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - e}{ex}$$

x	0		e^2		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	↘	0	↗	

b) On déduit du tableau de variations que pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $h(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $f(x) \leqslant g(x)$.

2. On note F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$.
F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $F'(x) = \ln(x)$.
F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.
On note G la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $G(x) = \frac{4}{3e}x\sqrt{x}$.
G est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $G'(x) = \frac{4}{3e}\left(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$G'(x) = \frac{4}{3e} \times \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{e}\sqrt{x}$

G est une primitive de g sur $]0\,;+\infty[$.

3. a) f et g sont continues sur $]0\,;+\infty[$.
D'après 1. **b)**, $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $\mathscr{A}(D) = \int_1^{e^2}(g(x) - f(x))\mathrm{d}x$

b) $\mathscr{A}(D) = \int_1^{e^2} g(x)\mathrm{d}x - \int_1^{e^2} f(x)\mathrm{d}x$

$\mathscr{A}(D) = \left[\frac{4}{3e}x\sqrt{x}\right]_1^{e^2} - [x\ln(x) - x]_1^{e^2}$

$\mathscr{A}(D) = \left(\frac{4e^2}{3} - \frac{4}{3e}\right) - (e^2 - (-1)) = \frac{e^2}{3} - \frac{4}{3e} - 1$

92 **a)** Pour tout réel x de $[0\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

b) L'aire, en *u.a.*, du domaine D_a est donnée par :

$$\mathscr{A} = \int_0^a xe^{-x}\mathrm{d}x.$$

Pour tout réel x de l'intervalle $I = [0\,;a]$, on pose :
$u(x) = x$ $\quad$ $u'(x) = 1$
$v'(x) = e^{-x}$ $\quad$ $v(x) = -e^{-x}$
u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I.
D'après la formule d'intégration par parties :

$\int_0^a xe^{-x}\mathrm{d}x = [-xe^{-x}]_0^a - \int_0^a -e^{-x}\mathrm{d}x$

$\int_0^a xe^{-x}\mathrm{d}x = -ae^{-a} - [e^{-x}]_0^a$

$\int_0^a xe^{-x}\mathrm{d}x = -ae^{-a} - e^{-a} + 1,$

donc $\mathscr{A} = -ae^{-a} - e^{-a} + 1$ *u.a.*

c) $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-a} = 0$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} ae^{-a} = 0$

donc $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathscr{A} = 1$.

93 **Parcours 1**
Pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $1 \leqslant e^{\cos(x)} \leqslant e$ et $x^2 \leqslant f(x) \leqslant ex^2$.
D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$$\int_0^{\pi/2} x^2\mathrm{d}x \leqslant I \leqslant e\int_0^{\pi/2} x^2\mathrm{d}x$$

Or $\int_0^{\pi/2} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$, donc

$$\frac{\pi^3}{24} \leqslant \mathrm{I} \leqslant \frac{e\pi^3}{24}$$

Parcours 2

a) Pour tout réel x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $1 \leqslant e^{\sin(x)} \leqslant e$ et $x \leqslant g(x) \leqslant ex$.

b) D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$$\int_0^{\pi/2} x\,dx \leqslant \mathrm{J} \leqslant e\int_0^{\pi/2} x\,dx$$

Or $\int_0^{\pi/2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$, donc

$$\frac{\pi^2}{8} \leqslant \mathrm{J} \leqslant \frac{e\pi^2}{8}$$

94 **a)** Pour tout réel t,

$1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$, donc $1 - \frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$

$\frac{1}{1+t^2} - (1-t^2) = \frac{t^4}{1+t^2}$, donc $\frac{1}{1+t^2} - (1-t^2) \geqslant 0$

et $1 - t^2 \leqslant \frac{1}{1+t^2}$

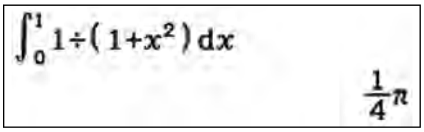
b) D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$$\int_0^1 (1-t^2)dt \leqslant \mathrm{I} \leqslant \int_0^1 1dt$$

$\int_0^1 1dt = 1$ et $\int_0^1 (1-t^2)dt = \left[t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, donc

$$\frac{2}{3} \leqslant \mathrm{I} \leqslant 1.$$

c) Avec la calculatrice :



95 **a)** g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $g'(x) = \frac{xe^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$.

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗	

b) La fonction g est décroissante sur $[1\,;2]$ donc pour tout réel x de $[1\,;2]$, $g(2) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$; c'est-à-dire $\frac{e^2}{4} \leqslant g(x) \leqslant e$

c) D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$$\int_1^2 \frac{e^2}{4}dx \leqslant \int_1^2 g(x)dx \leqslant \int_1^2 e\,dx$$

soit $\frac{e^2}{4} \leqslant \int_1^2 g(x)dx \leqslant e$

96 **a)** Pour tout réel x de I,
$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $x > 0$ donc $-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

b) D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$\int_{\pi/2}^{2\pi} -\frac{1}{x}dx \leqslant \int_{\pi/2}^{2\pi} f(x)dx \leqslant \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{x}dx$,

or $\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_{\pi/2}^{2\pi} = \ln(2\pi) - \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{x}dx = 2\ln(2)$

On en déduit l'encadrement :

$$-2\ln(2) \leqslant \int_{\pi/2}^{2\pi} f(x)dx \leqslant 2\ln(2)$$

97 **a)** n désigne un nombre entier naturel non nul.
La fonction $t \mapsto -\frac{1}{n}e^{-nt}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-nt}$ sur $[0\,;1]$.

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 e^{-nt}dt = \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - e^{-n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

98 **a)** n désigne un entier naturel, $n \geqslant 1$, pour tout réel t de $[0\,;1]$, $t^n e^t \geqslant 0$.

D'après la propriété de positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 t^n e^t dt \geqslant 0, \text{ c'est-à-dire } u_n \geqslant 0.$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 t^{n+1}e^t dt - \int_0^1 t^n e^t dt$

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 t^n(t-1)e^t dt$.

Pour tout réel t de $[0\,;1]$, $t^n(t-1)e^t \leqslant 0$, donc $\int_0^1 t^n(t-1)e^t dt \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est minorée (par 0) et décroissante donc elle est convergente.

d) Avec la calculatrice :

Donc $u_{10} \approx 0{,}23$.

99 **a)** n désigne un entier naturel, $n \geqslant 1$.
Pour tout réel x de $[n\,;n+1]$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après la propriété d'intégration des inégalités :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}dx,$$

donc $\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{1}{n}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = 0$.

100 **a)** – D'après la propriété de positivité de l'intégrale, la proposition P implique la proposition Q.
– La proposition Q n'implique pas la proposition P, en effet la fonction f définie sur $[-1\,;2]$ par $f(x)=x$ est telle que $\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$, donc $\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0$ et f n'est pas positive sur $[-1\,;2]$.
– Les propositions P et Q ne sont pas équivalentes.
b) – La proposition P n'implique pas la proposition Q, en effet la fonction *f* définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x)=x$ est telle que $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0$ et *f* n'est pas la fonction nulle sur $[-1\,;1]$
– La proposition Q implique la proposition P d'après la définition de l'intégrale.
– Les propositions P et Q ne sont pas équivalentes.
c) – La proposition P implique la proposition Q, en effet, si pour tout réel $t\in[a\,;b]$, $f(t)\geqslant 0$ alors pour tout réel x de $[a\,;b]$, on a pour tout réel t de $[a\,;x]$, $f(t)\geqslant 0$ donc d'après la propriété de positivité de l'intégrale $\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$.
– La proposition Q n'implique pas la proposition P, en effet, la fonction *f* définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x)=-x$ est telle que pour tout réel x de $[-1\,;1]$, $\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1-x^2}{2}$, donc $\int_{-1}^{x}f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$ et *f* n'est pas positive sur $[-1\,;1]$.
– Les propositions P et Q ne sont pas équivalentes.

101 **a)** *f* est la fonction définie sur $\mathrm{I}=[0\,;1]$ par $f(x)=x^2$. Sa valeur moyenne sur I est :
$$\mu=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$
D'autre part $\frac{f(0)+f(1)}{2}=\frac{1}{2}$, donc
$$\mu\neq\frac{f(0)+f(1)}{2}$$
b) *f* est la fonction définie sur $\mathrm{I}=[0\,;1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^x$.
Sa valeur moyenne sur I est :
$$\mu=\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x]_0^1=\mathrm{e}-1.$$
D'autre part $f\left(\frac{0+1}{2}\right)=\mathrm{e}^{1/2}$, donc $\mu\neq f\left(\frac{0+1}{2}\right)$

102
1. a) $\mathrm{S}_1=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}$
b)
$$\mathrm{S}_2=\mathrm{S}_1+\left(\frac{3}{2}-1\right)\times\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\mathrm{S}_1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\mathrm{S}_1=\frac{1}{3\times 4}$$
c) $\mathrm{S}_3=\mathrm{S}_2+\left(\frac{5}{4}-1\right)\times\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{4}{7}-\frac{1}{2}\right)$
$$\mathrm{S}_3=\mathrm{S}_2+\frac{1}{4}\times\frac{2}{15}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{14}=\mathrm{S}_2+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{7\times 8}$$
d) $\mathrm{S}_4=\mathrm{S}_3+\frac{1}{8}\times\left(\frac{8}{9}-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{8}{11}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{8}{13}-\frac{4}{7}\right)$
$$+\frac{1}{8}\left(\frac{8}{15}-\frac{1}{2}\right)$$
$$\mathrm{S}_4=\mathrm{S}_3+\frac{1}{8}\times\frac{4}{45}+\frac{1}{8}\times\frac{2}{33}+\frac{1}{8}\times\frac{4}{91}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{30}$$
$$\mathrm{S}_4=\mathrm{S}_3+\frac{1}{9\times 10}+\frac{1}{11\times 12}+\frac{1}{13\times 14}+\frac{1}{15\times 16}$$
2. a) Lorsque n devient de plus en plus grand, la somme S_n des aires des rectangles est de plus en plus proche de l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$, c'est-à-dire de $\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln(x)]_1^2=\ln(2)$
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n=\ln(2)$
b) n est une valeur donnée du paramètre, $n\geqslant 1$.
À la sortie de la boucle, on a :
$$S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\ldots+\frac{1}{(2^n-1)\times 2^n},$$
donc la fonction B_r renvoie pour résultat S_n.
c)
```
>>> Br(5)
0.6777662022075267
>>> Br(10)
0.692659137728412
>>> Br(20)
0.6931467037230513
```

103 **1. a)** x et y représentent les coordonnées du point choisi au hasard dans le rectangle OABJ.
b) Si $y\leqslant\mathrm{e}^{-x^2}$ alors, le point choisi au hasard appartient au domaine D et dans ce cas la variable L est incrémentée de 1.
c) Le rapport $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}}$ est une approximative de $\frac{\mathscr{A}(\mathrm{D})}{2}$, donc $\frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{N}}$ est une approximation de l'aire (en *u.a.*) $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ du domaine D.
Donc $\mathrm{I}=\frac{2\mathrm{L}}{\mathrm{N}}$ est une approximation de $\int_0^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.
2. b) Par exemple :
```
>>> M_C(1000)
0.868
>>> M_C(10000)
0.8762
>>> M_C(100000)
0.88046
```

104 **1.** n désigne un entier naturel, $n\geqslant 1$.
Pour tout réel x de $[0\,;1]$, $\frac{x^n}{1+x}\geqslant 0$ donc $\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x\geqslant 0$, soit $u_n\geqslant 0$.
La suite (u_n) est minorée par 0.
$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$
$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{1+x}\mathrm{d}x$$

Pour tout réel x de $[0\ ;\ 1]$, $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant 0$, soit $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente, on note ℓ sa limite.

2. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

$$u_{n+1} + u_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

b) On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}+u_n) = 0$; d'autre part, d'après **1.** $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}+u_n) = 2\ell$.

Donc, par unicité de la limite, $\ell = 0$.

105 **1. a)** On conjecture que f est croissante sur $]0\ ;1]$ et décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.

On conjecture que f est positive sur $]0\ ;\mathrm{e}]$ et négative sur $[\mathrm{e}\ ;+\infty[$.

b) f est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 1 - \ln(x) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	1	↘	

Donc f est croissante sur $]0\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;+\infty[$.

Pour tout réel x de $]0\ ;+\infty[$,

• si $x \leqslant \mathrm{e}$, alors $\ln(x) \leqslant 1$ donc $f(x) \geqslant 0$

• si $x \geqslant \mathrm{e}$, alors $\ln(x) \geqslant 1$ donc $f(x) < 0$

2. • $0 < a \leqslant \mathrm{e}$

f est continue et positive sur $[a\ ;\mathrm{e}]$, donc $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$.

• $a > \mathrm{e}$

f est continue et négative sur $[\mathrm{e}\ ;\ a]$, donc $\mathscr{A}(a) = -\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x$.

b) Pour tout réel x de $]0\ ;+\infty[$, on pose :

$u(x) = 1 - \ln(x)$ $\qquad$ $u'(x) = -\dfrac{1}{x}$

$v'(x) = x$ $\qquad$ $v(x) = \dfrac{1}{2}x^2$

u et v sont dérivables sur $]0\ ;+\infty[$, u' et v' sont continues sur $]0\ ;+\infty[$.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln(x))\right]_a^{\mathrm{e}} - \int_a^{\mathrm{e}} -\frac{1}{2}x\mathrm{d}x$$

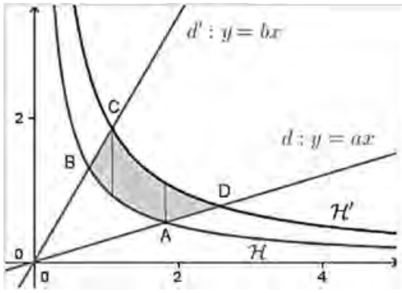
$$\int_a^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}a^2(1-\ln(a)) - \left[-\frac{1}{4}x^2\right]_a^{\mathrm{e}}$$

$$\int_a^{\mathrm{e}} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}a^2(1-\ln(a)) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}a^2$$

donc $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a^2\ln(a) + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^2 - \dfrac{3}{4}a^2$ *u.a.*

c) $\mathscr{A}(a) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$ si, et seulement si, $\dfrac{1}{4}a^2(2\ln(a) - 3) = 0$, c'est-à-dire $\ln(a) = \dfrac{3}{2}$, soit $a = \mathrm{e}^{3/2}$

106



• Intersection de $\mathscr{H}$ et d :

$\dfrac{1}{x} = ax$ équivaut à $x^2 = \dfrac{1}{a}$ donc $x = \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

d'où $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a};\sqrt{a}\right)$

• Intersection de $\mathscr{H}$ et d' : $\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{b}}{b};\sqrt{b}\right)$

• Intersection de $\mathscr{H}'$ et d :

$\dfrac{2}{x} = ax$ équivaut à $x^2 = \dfrac{2}{a}$ donc $x = \sqrt{\dfrac{2}{a}} = \dfrac{\sqrt{2a}}{a}$

d'où $\mathrm{D}\left(\dfrac{\sqrt{2a}}{a};\sqrt{2a}\right)$

• Intersection de $\mathscr{H}'$ et d' : $\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{2b}}{b};\sqrt{2b}\right)$

L'aire du domaine coloré est, en *u.a.* :

$$\int_{x_\mathrm{B}}^{x_\mathrm{C}}\left(bx - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_{x_\mathrm{C}}^{x_\mathrm{A}}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{D}}\left(\frac{2}{x} - ax\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{b}{2}x^2 - \ln(x)\right]_{\frac{\sqrt{b}}{b}}^{\frac{\sqrt{2b}}{b}} + [\ln(x)]_{\frac{\sqrt{2b}}{b}}^{\frac{\sqrt{a}}{a}} + \left[2\ln(x) - a\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{a}}{a}}^{\frac{\sqrt{2a}}{a}}$$

$$= \frac{b}{2}\times\frac{2}{b} - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(b) - \frac{b}{2}\times\frac{1}{b} - \frac{1}{2}\ln(b) - \frac{1}{2}\ln(a)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(b) + \ln(2) - \ln(a) - 1 + \ln(a) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1-\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{2\ln(2)-1}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

107 La parabole a une équation de la forme $y = ax^2$ avec $a > 0$. Le problème consiste à déterminer a.

Notons M le point d'intersection de la parabole avec (BC) dont l'abscisse k est positive.

On a donc $ak^2 = 1$ donc $k = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

L'aire du domaine vert vaut $\dfrac{1}{4}$ et s'exprime en fonction de a par :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} ax^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{a}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{2}{3\sqrt{a}} + \frac{1}{2}$$

$-\frac{2}{3\sqrt{a}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ équivaut à $\sqrt{a} = \frac{8}{3}$ donc $a = \frac{64}{9}$

d'où l'équation cherchée $y = \frac{64}{9}x^2$.

Par symétrie, l'aire de la partie orange vaut $\frac{1}{4}$ et celle de la partie violette vaut $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

108 $\mathscr{A} = \int_0^6 x(6-x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^6 = 36.$

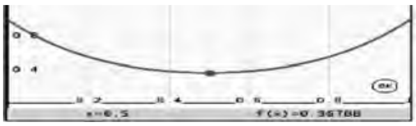
On note $\mathscr{A}'$ l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_m$.

Pour $0 \leqslant m \leqslant 6$,

$$\mathscr{A}' = \int_0^{6-m} [x(6-x) - mx]\mathrm{d}x = \frac{(6-m)^3}{6}$$

$\mathscr{A}' = \frac{1}{8} \times 36$ équivaut à $(6-m)^3 = 27$, soit $6 - m = 3$, $m = 3$.

109 **a)** On trace la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f à l'écran de la calculatrice.



On considère la fonction polynôme du second degré g telle que :

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \\ g(1) = f(1) \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} g(0) = 1 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-1} \\ g(1) = 1 \end{cases}$$

On pose $g(x) = ax^2 + bx + c$, le système s'écrit

$$\begin{cases} c = 1 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = \mathrm{e}^{-1} \\ a + b + c = 1 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} c = 1 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = \mathrm{e}^{-1} - 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = 4(1 - \mathrm{e}^{-1}) \\ b = -4(1 - \mathrm{e}^{-1}) \end{cases}$$

Ainsi $g(x) = 4(1 - \mathrm{e}^{-1})(x^2 - x) + 1$.

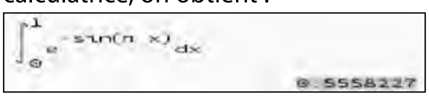
La courbe représentative $\mathscr{P}$ de g approche la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0\,;1]$.

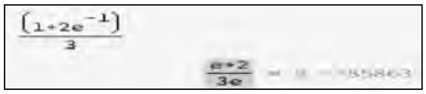
b) $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \left[4(1 - \mathrm{e}^{-1})\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right) + x\right]_0^1$

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1 + 2\mathrm{e}^{-1})$$

On en déduit que $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}(1 + 2\mathrm{e}^{-1})$

Avec la calculatrice, on obtient :





110 Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$,

$$u_n = \int_0^q nx^n\mathrm{d}x = n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^q = \frac{n}{n+1}q^{n+1}$$

- Si $0 \leqslant q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

111 **a)** Les milieux $x'_0, x'_1, \ldots, x'_k, \ldots, x'_{n-1}$ sont donnés par :

$$x'_0 = x_0 + \frac{p}{2},\ x'_1 = x_0 + p + \frac{p}{2} = x_0 + \frac{3p}{2}, \ldots$$

$$x'_k = x_0 + kp + \frac{p}{2} = x_0 + \frac{(2k+1)p}{2}, \ldots$$

$$x'_{n-1} = x_0 + (n-1)p + \frac{p}{2} = x_0 + \frac{2(n-1)+1}{2}p$$

où $p = \frac{b-a}{n}$.

Alors $\mathrm{I}_n = p\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_0 + \frac{(2k+1)p}{2}\right)$

La boucle des lignes 10 et 11 du programme calcule :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(2k+1)p}{2}\right)$$

À la ligne 12, on multiplie cette somme par p et la fonction Milieux renvoie pour résultat I_n.

b) Par exemple :

```
>>> Milieux(0,1,100)
1.718274668972308
>>> Milieux(0,1,1000)
1.7182817568639708
>>>
>>> Milieux(-1,1,100)
2.3503632143714985
>>> Milieux(-1,1,1000)
2.3504019955539186
```

112 **1. a)** Pour k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, l'aire du trapèze T_k est donnée par :

$$\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \times \frac{b-a}{n}$$

b) La somme des aires des trapèzes T_k est donnée par :

$$\mathrm{K}_n = \frac{b-a}{n}$$

$$\left[\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right]$$

$$\mathrm{K}_n = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

2. a) Avec $p = \frac{b-a}{n}$, on peut écrire :

$x_k = x_0 + kp$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, donc

$$\mathrm{K}_n = p\left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_0 + kp)\right]$$

Cette formule explique le calcul de la variable K du programme.

b) Par exemple :

```
>>> Trapèzes(0,1,100)
1.718296147450417
>>> Trapèzes(0,1,1000)
1.7182819716491962
>>>
>>> Trapèzes(-1,1,100)
2.3504807335115396
>>> Trapèzes(-1,1,1000)
2.3504031707550124
```

113 **a)** $\mathscr{A}_1 = \int_0^a e^{1-x}dx = [-e^{1-x}]_0^a = e - e^{1-a}$

b) T : $y = -e^{1-a}(x-a) + e^{1-a}$

$y = 0$ équivaut à $x = 1 + a$ d'où C$(1 + a\,;0)$

$$\mathscr{A}_2 = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{e^{1-a}}{2}$$

c) $\mathscr{A}_1 + 2\mathscr{A}_2 = e$ est indépendant de a.

Objectif BAC

114 **Partie A**

1. La hauteur d'un arceau est donnée par :

$$f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{2}$$

2. a) Pour tout réel x,

$f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, donc

$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)$

$1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)$

$1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$

b) $I = \int_0^\alpha \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]_0^\alpha$

$I = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$

La longueur d'un arceau, en mètre, est égale à :

$2I = e^\alpha - e^{-\alpha}$.

Partie B

1. La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir la façade nord est égale à :

$\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$ car la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

La quantité pour la façade sud est égale à :

$2\int_0^\alpha f(x)dx - 2$ car on tient compte de l'ouverture ABCD dont l'aire est égale à 2.

Finalement, la quantité, en m^2, nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est égale à :

$$4\int_0^\alpha f(x)dx - 2.$$

2. L'aire de la partie de la forme rectangulaire est donnée par : $4{,}5 \times (e^\alpha - e^{-\alpha})$.

L'aire totale de la bâche pour réaliser cette serre est :

$$\mathscr{S} = 4\int_0^\alpha f(x)dx - 2 + 4{,}5(e^\alpha - e^{-\alpha})$$

On calcule :

$\int_0^\alpha f(x)dx = \left[\frac{7}{2}x - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right]_0^\alpha$

$\int_0^\alpha f(x)dx = \frac{7}{2}\alpha - \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$, donc

$\mathscr{S} = 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha}) - 2 + 4{,}5(e^\alpha - e^{-\alpha})$

$\mathscr{S} = 14\alpha - 2 + 2{,}5(e^\alpha - e^{-\alpha})$

On obtient alors $\mathscr{S} \approx 42$ m^2

115 **1.** $I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}dx = [-\ln(1-x)]_0^{1/2}$, donc $I_0 = \ln(2)$

2. $I_0 - I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x}dx - \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x}dx$

$I_0 - I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1-x}{1-x}dx = [x]_0^{1/2} = \frac{1}{2}$

Donc $I_1 = I_0 - \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2}$

3. a) Pour n entier naturel,

$I_n - I_{n+1} = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx - \int_0^{1/2} \frac{x^{n+1}}{1-x}dx$

$I_n - I_{n+1} = \int_0^{1/2} \frac{x^n(1-x)}{1-x}dx = \int_0^{1/2} x^n dx$

$I_n - I_{n+1} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{1/2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$

b) n désigne un entier naturel, $n \geqslant 1$.

$I \leftarrow \ln(2)$
Pour k allant de 0 à n-1
 $I \leftarrow I - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k+1}$
Fin Pour

À la sortie de l'algorithme, la variable I contient I_n.

4. a) D'après les propriétés des intégrales :

$0 \leqslant \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}dx \leqslant \int_0^{1/2} \frac{1}{2^{n-1}}dx$, soit $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

5. a) Pour tout entier naturel non nul,

$$S_n = \frac{1}{2} + (I_1 - I_2) + (I_2 - I_3) + \ldots + (I_{n-1} - I_n)$$

d'après la formule établie en **3.a.**

Donc $S_n = \frac{1}{2} + I_1 - I_n$, or $\frac{1}{2} + I_1 = I_0$, donc $S_n = I_0 - I_n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = I_0 = \ln(2)$.

116 **a)** u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, on suppose leurs fonctions dérivées u' et v' continues sur I.

Alors, pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

b) Un exemple d'application

Calcul de $\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\mathrm{d}x$.

Pour tout réel x de $I = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on pose :

$u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos(x)$ $\quad v(x) = \sin(x)$

Les fonctions u et v sont dérivables sur I, les fonctions u' et v' sont continues sur I.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\pi/2}$$

$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1$$

117 **a)** G est une primitive de la fonction $t \mapsto te^t$ sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel x, $F(x) = [G(t)]_x^{2x} = G(2x) - G(x)$.

b) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = 2 \times G'(2x) - G'(x)$, soit $F'(x) = 2 \times 2xe^{2x} - xe^x$

$F'(x) = 4xe^{2x} - xe^x$.

118 **a) Vrai**

$u_1 = \int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d}x$. Pour tout réel x de $I = [0;1]$, on pose :

$u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x}$ $\quad v(x) = -e^{-x}$

u et v sont dérivables sur I, u' et v' sont continues sur I. D'après la formule d'intégration par parties :

$$u_1 = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$u_1 = -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$$

b) Vrai

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x de $[0 ; 1]$, $x^n e^{-x} \geqslant 0$.

D'après la propriété de positivité de l'intégrale :

$\int_0^1 x^n e^{-x}\mathrm{d}x \geqslant 0$, soit $u_n \geqslant 0$.

c) Faux

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}\mathrm{d}x.$$

Pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $x^n(x-1)e^{-x} \leqslant 0$ et d'après les propriétés de l'intégrale : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Donc la suite (u_n) est décroissante.

d) Vrai

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $[0 ; 1]$ donc pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $e^{-x} \leqslant 1$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x de $[0 ; 1]$, $x^n e^{-x} \leqslant x^n$.

D'après la propriété d'ordre de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^n e^{-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{d}x,$$

soit $u_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$, $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Pour aller plus loin

119 **1. a)** Les rectangles R_k se trouvent au-dessous de la courbe $\mathscr{C}$ donc $u_n \leqslant \mathscr{A}$.

Les rectangles R'_k se trouvent au-dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ donc $\mathscr{A} \leqslant v_n$.

b) Pour tout entier naturel n, $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^3}{n^3}\right)$$

$$u_n = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3)$$

$$v_n = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$

$$v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1^3}{n^3} + \frac{2^3}{n^3} + \ldots + \frac{n^3}{n^3}\right)$$

$$v_n = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$$

2. a) • L'égalité est vraie pour $n = 1$, en effet :

$$1^3 = \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2$$

• On suppose l'égalité vraie au rang n ($n \in \mathbb{N}^*$), alors :

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1))$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

Donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Ainsi l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On obtient alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$u_n = \frac{1}{n^4}\times\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{4n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^4}\times\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

3.a) Pour $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{n^2}{4(n+1)^2}-\dfrac{(n-1)^2}{4n^2}$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{n^4-(n-1)^2(n+1)^2}{4n^2(n+1)^2}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{2n^2-1}{4n^2(n+1)^2},$$

$2n^2-1 \geqslant 0$ donc $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$.

La suite (u_n) est croissante.

$$v_{n+1}-v_n = \frac{(n+2)^2}{4(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{n^2(n+2)^2-(n+1)^4}{4n^2(n+1)^2}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{-2n^2-4n-1}{4n^2(n+1)^2},$$

$-2n^2-4n-1 \leqslant 0$ donc $v_{n+1}-v_n \leqslant 0$.

La suite (v_n) est décroissante.

c) Pour $n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$, $v_n-u_n = \dfrac{(n+1)^2}{4n^2}-\dfrac{(n-1)^2}{4n^2} = \dfrac{1}{n}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

3. a) D'après les expressions de u_n et v_n établies à la question **2.b)**

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{4}$$

b) Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$u_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant v_n$, on en déduit que $\mathcal{A} = \dfrac{1}{4}$.

120 **1. a)** Pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, l'aire sous la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ est comprise entre les aires des rectangles représentés sur la figure, soit $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.

b) n désigne un entier naturel non nul. Alors

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

$\mathrm{H}_n - 1 + \dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{H}_n$, on en déduit que

$$\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x + \frac{n}{n+1}$$

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$, on en déduit que :

$$\ln(n+1) \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n+1)+\frac{n}{n+1}$$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{H}_n=+\infty$.

2. a) La ligne 4 s'écrit : $u = u + 1/k$

b) Par exemple :

```
>>> H(20000)
10.48072821722932
```

121 **1.** $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_2 = \left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. n est un nombre entier naturel, $n \geqslant 3$

a) $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\mathrm{d}x$

On pose pour tout réel $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$u(x) = \sin^{n-1}(x)$

$u'(x) = (n-1)\sin^{n-2}(x)\times\cos(x)$

$v'(x) = \sin(x)$ $\quad v(x) = -\cos(x)$

u et v sont dérivables sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, u' et v' sont continues sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\mathrm{I}_n = [-\sin^{n-1}x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}_n = (n-1)(\mathrm{I}_{n-2}-\mathrm{I}_n)$$

b) On obtient alors :

$\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}-(n-1)\mathrm{I}_n$, soit $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$,

donc $\mathrm{I}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$

3. a) Pour k entier naturel, $k \geqslant 1$,

• $\mathrm{I}_2 = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}$, puis :

$$\mathrm{I}_4 = \frac{3}{4}\mathrm{I}_2 = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

$\mathrm{I}_6 = \dfrac{5}{6}\mathrm{I}_4 = \dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}$, et de proche en proche :

$$\mathrm{I}_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k-3}{2k-2}\times\ldots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$$

• $\mathrm{I}_1 = 1$, puis :

$$\mathrm{I}_3 = \frac{2}{3}\mathrm{I}_1 = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{I}_5 = \frac{4}{5}\mathrm{I}_3 = \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$$

$\mathrm{I}_7 = \dfrac{6}{7}\mathrm{I}_5 = \dfrac{6}{7}\times\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3}$, et de proche en proche :

$$\mathrm{I}_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}\times\frac{2k-2}{2k-1}\times\ldots\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$$

Remarque : On peut démontrer ces formules par récurrence.

4. a) Pour tout réel x de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin^{2n}(x) \geqslant 0$, donc $\sin^{2n+1}(x) \leqslant \sin^{2n}(x)$ et $\sin^{2n}(x) \leqslant \sin^{2n-1}(x)$

b) Avec la propriété d'intégration des inégalités pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \mathrm{I}_{2n+1} \leqslant \mathrm{I}_{2n} < \mathrm{I}_{2n-1}$

D'après **3.a)**, $\mathrm{I}_{2n+1} > 0$ donc

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \leqslant \frac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n+1}}$$

D'après la relation établie en **2.b)**

$\mathrm{I}_{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\mathrm{I}_{2n-1}$, donc $\dfrac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n}$ et finalement

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \leqslant \frac{2n+1}{2n}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = 1$ et d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = 1$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = \frac{\frac{2n-1}{2n} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}}{\frac{2n}{2n+1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}}$$

$$\frac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = \frac{(2n+1)(2n-1)^2 \times \dots \times 3^2}{(2n)^2 \times \dots \times 4^2 \times 2^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Donc $\dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = u_n \times \dfrac{\pi}{2}$ et $u_n = \dfrac{2}{\pi} \times \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2}{\pi}$.

6. a) Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \dots \times \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 (2n+1)$$

Cette formule explique le calcul de la variable W du programme.

b) On obtient par exemple :

```
>>> W(10000)
0.6366356872650755
```

122 **1.** $\mathrm{I}_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$

Pour tout réel x de $[0\,;1]$, on pose :

$u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ $\qquad v(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$

u et v sont dérivables sur $[0\,;1]$, u' et v' sont continues sur $[0\,;1]$.

D'après la formule d'intégration par parties :

$\mathrm{I}_1 = [-x\mathrm{e}^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_1 = -1 - [\mathrm{e}^{1-x}]_0^1 = -1-(1-\mathrm{e})$ donc $\mathrm{I}_1 = \mathrm{e} - 2$.

2. a) Pour tout réel x de $[0\,;1]$,

$0 \leqslant 1-x \leqslant 1$ donc $\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}^1$, soit $1 \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}$.

D'autre part pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \geqslant 0$, donc :

$$x^n \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}x^n.$$

b) Avec la propriété d'intégration des inégalités :

$$\int_0^1 x^n\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}x^n\mathrm{d}x$$

Or $\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$, on en déduit que :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

3. Pour $n \geqslant 1$, on pose pour tout réel x de $[0\,;1]$,

$u(x) = x^{n+1}$ $\qquad u'(x) = (n+1)x^n$

$v'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ $\qquad v(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$

u et v sont dérivables sur $[0\,;1]$, u' et v' sont continues sur $[0\,;1]$.

D'après la formule d'intégration par parties :

$\mathrm{I}_{n+1} = [-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_{n+1} = -1 + (n+1)\mathrm{I}_n$.

4. a) Pour n entier naturel, $n \geqslant 1$,

$k_{n+1} = (n+1)!\mathrm{e} - \mathrm{I}_{n+1}$

$k_{n+1} = (n+1)!\mathrm{e} + 1 - (n+1)\mathrm{I}_n$

$k_{n+1} = (n+1)[n!\mathrm{e} - \mathrm{I}_n] + 1$

$k_{n+1} = (n+1)k_n + 1$.

b) $k_1 = \mathrm{e} - \mathrm{I}_1 = 2$

• k_1 est un entier naturel.

• Pour n entier naturel, $n \geqslant 1$, on suppose que k_n est un entier naturel.

Alors $k_{n+1} = (n+1) \times k_n + 1$ est donc aussi un entier naturel.

On conclut que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, k_n est un entier naturel.

c) Pour n entier naturel, $n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$$

$\dfrac{1}{n+1} > 0$ et $\dfrac{\mathrm{e}}{n+1} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{3} < 1$, donc $0 < \mathrm{I}_n < 1$, I_n n'est pas un entier naturel.

D'après **4.** $n!\mathrm{e} = k_n + \mathrm{I}_n$ n'est pas un entier naturel (sinon, $\mathrm{I}_n = n!\mathrm{e} + k_n$ serait un entier naturel, ce qui n'est pas le cas).

5. a) p et q sont deux entiers naturels, $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$.

n est un entier naturel, $n \geqslant q$, $n!$ est un multiple de q donc $\dfrac{n!p}{q}$ est un entier naturel.

b) Si e est un nombre rationnel alors il existe p et q dans $\mathbb{N}$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ tels que $\mathrm{e} = \dfrac{\mathrm{P}}{q}$.

On prend n entier naturel, $n \geqslant q$, alors $n!\mathrm{e} = \dfrac{n!p}{q}$ est un entier naturel.

Mais d'après **4.c)**, $n!\mathrm{e} = k_n + \mathrm{I}_n$ n'est pas un entier naturel.

La contradiction prouve que le nombre e est irrationnel.

123 a et b sont des nombres réels tels que $a \neq b$.

Les points $\mathrm{A}(a\,; f(a))$ et $\mathrm{B}(b\,; f(b))$ appartiennent à P.

(AB) a pour coefficient directeur $\dfrac{\alpha a^2 - \alpha b^2}{a-b} = \alpha(a+b)$.

La tangente en $C(x_C\,;\,f(x_C))$ a pour coefficient directeur $2\alpha x_C = \alpha(a+b)$ d'où $x_C = \dfrac{a+b}{2}$.

```
1  f(x):=α*x^2
       x -> α·x^2
2  A:=point(a,f(a));,B:=point(b,f(b));,C:=point((a+b)/2,f((a+b)/2));
3  equation(droite(A,B))
       y=((a·α+b·α)·x-a·b·α)
4  g1(x):=(a*α+b*α)*x-a*b*α
5  equation(droite(A,C))
       y=(-(1/2)·a^2·α-(1/2)·a·b·α+((3/2)·a·α+(1/2)·b·α)·x)
6  g2(x):=-1/2*a^2*α-1/2*a*b*α+(3/2*a*α+1/2*b*α)*x
7  equation(droite(B,C))
       y=(-(1/2)·a·b·α-(1/2)·b^2·α+((1/2)·a·α+(3/2)·b·α)·x)
8  g3(x):=-1/2*a*b*α-1/2*b^2*α+(1/2*a*α+3/2*b*α)*x
9  Aire1:=integrer(g1(x)-f(x),x,a,b);
       Done
10 Aire2:=integrer(g2(x)-f(x),x,a,(a+b)/2);
       Done
11 Aire3:=integrer(g3(x)-f(x),x,(a+b)/2,b);
       Done
12 simplifier(Aire1/(Aire1-Aire2-Aire3))
       4/3
```

124 D'après la relation de Chasles :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} (\pi - |2x-\pi|)\sin(x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{2\pi} (\pi - |2x-\pi|)\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Si $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $2x \leqslant \pi$ donc $2x - \pi \leqslant 0$ et $|2x-\pi| = \pi - 2x$.

Alors $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\pi - |2x-\pi|)\sin(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\mathrm{d}x$.

Si $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$, alors $\pi \leqslant 2x$ donc $2x - \pi \geqslant 0$ et $|2x-\pi| = 2x - \pi$.

Alors

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} (\pi - |2x-\pi|)\sin(x)\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{2\pi} (2\pi - 2x)\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\mathrm{d}x$

Pour tout réel x de $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose :

$u(x) = 2x$ $\quad u'(x) = 2$

$v'(x) = \sin(x)$ $\quad v(x) = -\cos(x)$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\mathrm{d}x = [-2x\cos(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -2\cos(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi/2} 2x\sin(x)\mathrm{d}x = [2\sin(x)]_0^{\pi/2} = 2$$

Calcul de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi} (2\pi - 2x)\sin(x)\mathrm{d}x$

Pour tout réel x de $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$, on pose :

$u(x) = 2\pi - 2x$ $\quad u'(x) = -2$

$v'(x) = \sin(x)$ $\quad v(x) = -\cos(x)$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} (2\pi - 2x)\sin(x)\mathrm{d}x$$

$$= [-(2\pi - 2x)\cos(x)]_{\pi/2}^{2\pi} - \int_{\pi/2}^{2\pi} 2\cos(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{\pi/2}^{2\pi} (2\pi - 2x)\sin(x)\mathrm{d}x = 2\pi - [2\sin(x)]_{\pi/2}^{2\pi} = 2\pi + 2$$

On obtient : $\mathrm{I} = 2 + 2\pi + 2 = 2\pi + 4$.

15 Succession d'épreuves indépendantes. Schéma de Bernoulli

Questions-Tests

1 **(2)** $\{c\,;a\,;d\}$ **2** **(3)** 3 **3** **(2)** 120

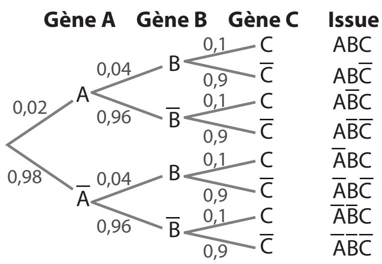
4 **(3)** $\binom{15}{8}$ **5** **a)** (1) $\frac{1}{4}$ **b)** (1) $\frac{1}{3}$

6 **a)** (3) 0,9 **b)** (1) 0,12 **c)** (2) 0,39

Découvrir

1 Succession d'épreuves indépendantes

1



2 **a)** $P(ABC) = 0{,}02 \times 0{,}04 \times 0{,}1 = 8 \times 10^{-5}$

La probabilité que, chez l'animal choisi, les trois gènes aient muté est 8×10^{-5}.

b) $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 0{,}98 \times 0{,}96 \times 0{,}9 = 0{,}84672$.

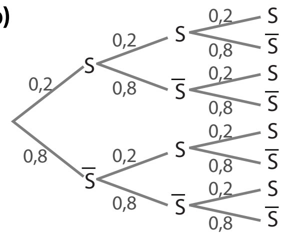
La probabilité que, chez l'animal choisi, les trois gènes n'aient pas muté est 0,84 672.

c) $P(A\overline{B}C) = 0{,}02 \times 0{,}96 \times 0{,}1 = 1{,}92 \times 10^{-3}$.

La probabilité que, chez l'animal choisi, seul le gène B n'ait pas muté est $1{,}92 \times 10^{-3}$.

2 Schéma de Bernoulli et loi binomiale

1 **1. a)** $P(S) = \frac{1}{5} = 0{,}2$. **b)**



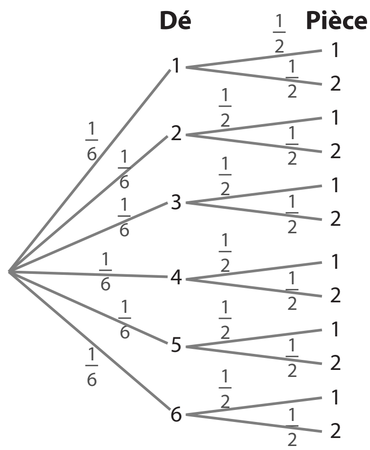
2.

k	0	1	2	3
P(X = *k*)	0,512	0,384	0,096	8×10^{-3}

Par exemple, $P(X = 3) = 0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 = 8 \times 10^{-3}$.

Savoir-faire

2 **a)**



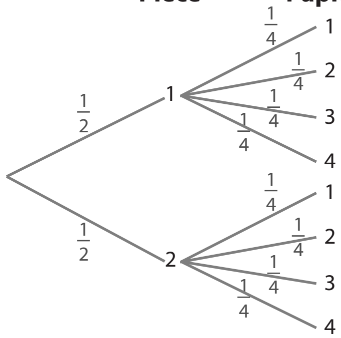
Issue	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(3 ; 1)	(3 ; 2)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
Issue	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(6 ; 1)	(6 ; 2)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

b) $p = P((2\,;2)) + P((4\,;2)) + P((6\,;2))$

$p = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$.

La probabilité d'obtenir un couple de numéros pairs est égale à $\frac{1}{4}$.

3 **a)** **Pièce** **Papier**



Issue	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) $p = P((1\,;2)) + P((2\,;2)) + P((2\,;1))$

$p = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

La probabilité d'obtenir au moins une fois le numéro 2 est égale à $\frac{3}{8}$.

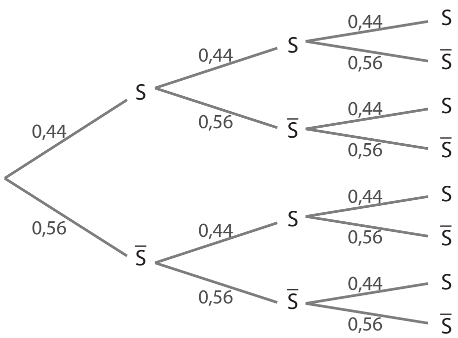
5 **a)** Chaque tirage est une expérience aléatoire à deux issues :

- le succès S : « La brique est jaune »
- l'échec $\overline{S}$: « La brique est verte ».

On sait que $P(S) = 0{,}44$, donc on considère chaque tirage comme une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,44.

b) Cette épreuve de Bernoulli est répétée trois fois de manière indépendante. La situation peut donc être associée à un schéma de Bernoulli.

c) **1^er^ tirage** **2^e^ tirage** **3^e^ tirage**



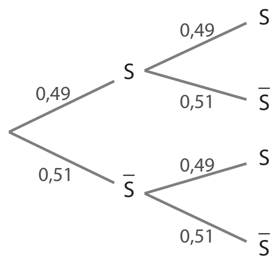
6 **a)** Chaque naissance est une expérience aléatoire à deux issues :

- le succès S : « L'enfant est une fille »
- l'échec $\overline{S}$: « L'enfant est un garçon ».

On sait que $P(S) = 0{,}49$ donc on considère chaque tirage comme une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,49.

b) Cette épreuve de Bernoulli est répétée trois fois de manière indépendante. La situation peut donc être associée à un schéma de Bernoulli.

1^er^ enfant **2^e^ enfant**



8 **a)** Épreuve de Bernoulli : lancer de dé.

Le succès est S : « Le numéro obtenu est le 6 » et $p = P(S) = \frac{1}{6}$.

Schéma de Bernoulli : on répète $n = 4$ fois cette épreuve de Bernoulli dans des conditions d'indépendance.

Loi binomiale : la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{6}$.

b) $P(X = 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{324}$

soit $P(X = 3) \approx 0{,}015$.

La probabilité d'obtenir exactement trois fois le 6 en quatre lancers est environ égale à 0,015.

c) $P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$P(X \leqslant 1) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3$

$P(X \leqslant 1) \approx 0{,}868$.

Acquérir des automatismes

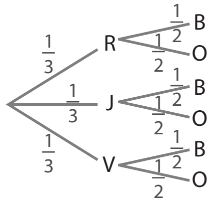
10 **Expérience 1** 4 issues **Expérience 2** 36 issues **Expérience 3** 12 issues

11 **a)** Exemples : (A ; 3) et (B ; 7)
b) Exemples : (A ; B) et (C ; A)

12 **a)** $P((H\,;a)) = 0{,}08$ **b)** $P((\overline{H}\,;b)) = 0{,}18$ **c)** $P((\overline{H}\,;c)) = 0{,}3$.

13 **a)** $E = \{(R\,;B), (R\,;O), (J\,;B), (J\,;O), (V\,;B), (V\,;O)\}$

b)

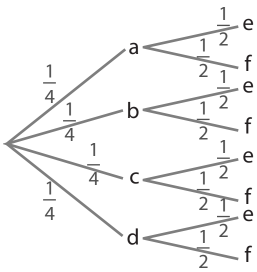


c) • $P(V\,;B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$.

• $P(J\,;O) = \dfrac{1}{6}$ • $P(R\,;B) = \dfrac{1}{6}$ • $P(R\,;O) = \dfrac{1}{6}$.

14 **a)** $E = \{(a\,;e), (a\,;f), (b\,;e), (b\,;f), (c\,;e), (c\,;f), (d\,;e), (d\,;f)\}$

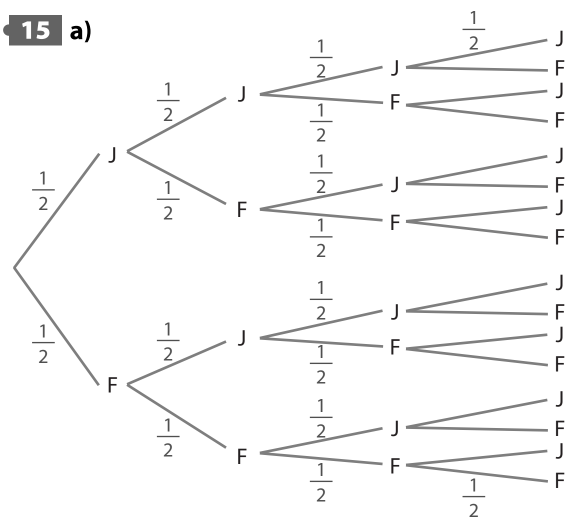
b)



c) $P(a\,;e) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

La probabilité que les aînés des deux familles jouent le premier match est égale à $\dfrac{1}{8}$.

15 **a)**



Il y a 16 réponses possibles à ce contrôle.

b) Il s'agit d'une loi équiprobable car chaque issue a une probabilité égale à $\dfrac{1}{16}$.

c) • $P(A) = \dfrac{1}{16}$.

• $P(B) = P(JFFF) + P(FJFF) + P(FFJF) + P(FFFJ)$

$P(B) = 4 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{4}$.

d) $P(C) = P(JFFF) + P(JFJF) + P(JFFJ)$
$+ P(FJJF) + P(FFJJ) + P(FJFJ)$
$+ P(JJJF) + P(JJFJ) + P(JFJJ)$
$+ P(FJJJ) + P(JJJJ)$

$P(C) = 11 \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{11}{16}$.

(ou encore

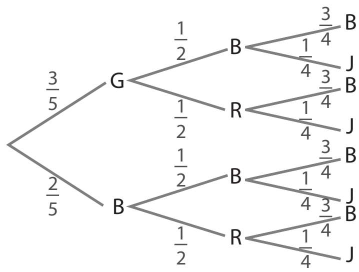
$P(C) = 1 - \big(P(A) + P(B)\big) = 1 - \left(\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{11}{16}$.

16 a) On note les couleurs G (gris) ; B (bleu), R (rouge) ; J (jaune).

$E_1 = \{G\,;B\}$; $E_2 = \{B\,;R\}$; $E_3 = \{B\,;J\}$.

Ainsi, l'univers E possède $2 \times 2 \times 2$ soit 8 issues.

b)



c) $P(M) = P(B;R;J) + P(G;R;J) + P(G;B;J) + P(G;R;B)$

$P(M) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4}$

$P(M) = \dfrac{17}{40} = 0{,}425$.

La probabilité que les trois boules soient de couleurs différentes est égale à 0,425.

d) $P(G\,;B\,;J) = \dfrac{3}{40}$; $P(G\,;R\,;J) = \dfrac{3}{40}$.

Les deux issues sont donc $(G\,;B\,;J)$ et $(G\,;R\,;J)$.

17 Les deux ont raison.

Pour Axelle, le succès est « le numéro tiré est pair », tandis que pour Kylian, le succès est « le numéro tiré est impair ».

18 Il s'agit d'un schéma de Bernoulli dont l'épreuve de Bernoulli est répétée $n = 3$ fois et dont la probabilité du succès est $p = 0{,}4$.

19 Cet arbre ne peut pas représenter un schéma de Bernoulli car :

• sur la deuxième partie de l'arbre, il y a trois issues (B, C, D)

• $P_A(B) \neq P_{\overline{A}}(B)$ donc la réalisation de B dépend de la réalisation ou non de A. Il n'y a donc pas indépendance.

20 Succès : « L'élève choisi est un garçon ».

Échec : « L'élève choisi est une fille ».

$P(S) = \dfrac{16}{34} = \dfrac{8}{17}$ et $P(\overline{S}) = \dfrac{18}{34} = \dfrac{9}{17}$.

21 Succès : « La boule tirée est rouge ».

Échec : « La boule tirée est noire ».

$P(S) = \dfrac{5}{9}$ et $P(\overline{S}) = \dfrac{4}{9}$.

22 Succès : « Le numéro 3 est sorti ».

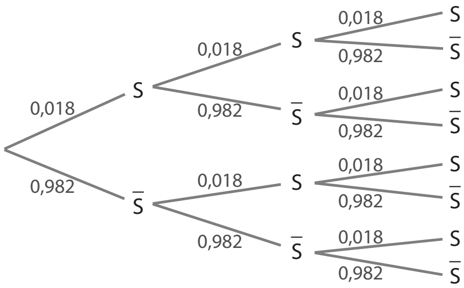
Échec : « Le numéro 1, 2 ou 4 est sorti ».

$P(S) = \dfrac{1}{4}$ et $P(\overline{S}) = \dfrac{3}{4}$.

23 **a)** Le passage de chaque voiture correspond à une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le radar constate un défaut d'assurance ». $p = P(S) = 0{,}018$.

Cette épreuve est répétée $n = 3$ fois de manière identique et indépendante. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

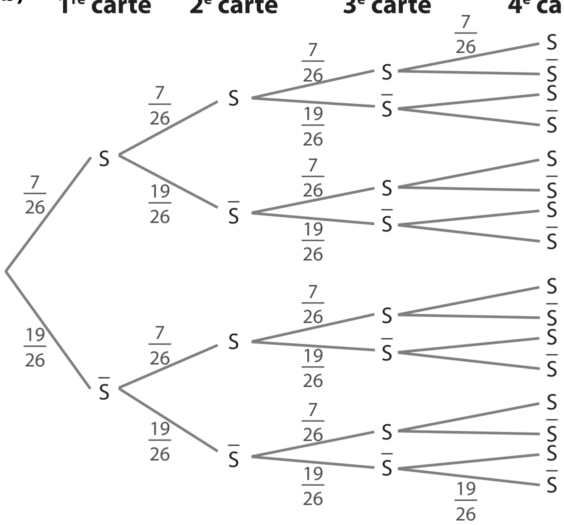
b) **1re voiture** **2e voiture** **3e voiture**



24 **a)** Le tirage d'une carte correspond à une épreuve de Bernoulli dont le succès S est « la carte tirée est un atout ». $p = P(S) = \dfrac{21}{78} = \dfrac{7}{26}$.

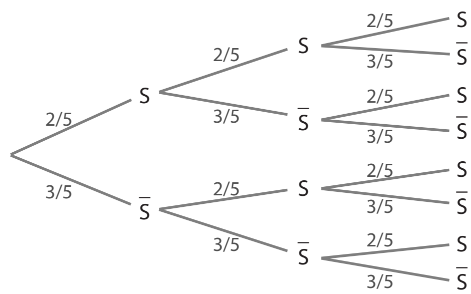
Cette épreuve est répétée $n = 4$ fois de manière identique et indépendante. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli.

b) **1re carte** **2e carte** **3e carte** **4e carte**



25 Le succès est S : « La carte porte un X ».

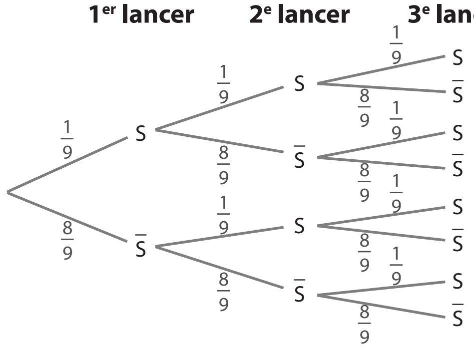
1re carte **2e carte** **3e carte**



26 Puisqu'un même morceau ne peut pas être répété deux fois, c'est qu'il n'y a pas indépendance entre les deux morceaux diffusés. On ne peut donc pas associer la situation à un schéma de Bernoulli.

27 Le succès est S : « La pièce tombe sur Pile ».

1er lancer **2e lancer** **3e lancer**



28 L'épreuve est répétée $n = 3$ fois.
La probabilité du succès est $p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.
Les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3.

29 Le deux ont raison.
Léa a considéré que le succès est A ; tandis que Jean-Philippe a considéré que le succès est B.

30 X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(10\,;\dfrac{2}{5}\right)$.

31 Succès : « Le numéro obtenu est le 6 ».

$$p = P(S) = \frac{1}{6}.$$

L'épreuve est répétée $n = 20$ fois de manière identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20\,;\dfrac{1}{6}\right)$.

32 Succès : « Le numéro obtenu est Pile ».

$$p = P(S) = \frac{1}{2}.$$

L'épreuve est répétée $n = 5$ fois de manière identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

33 Succès : « Le numéro obtenu est 3, 4 ou 5 ».

$$p = \mathrm{P(S)} = \frac{3}{10}.$$

L'épreuve est répétée $n = 3$ fois de manière identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale $\mathrm{B}\left(3\,;\frac{3}{10}\right)$.

34 **a)** Le choix d'une carte est une épreuve de Bernoulli, le succès est S : « La carte tirée est un as » et $p = \mathrm{P(S)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

On répète $n = 3$ fois cette même épreuve dans des conditions d'indépendance.

La variable aléatoire X qui donne le nombre d'as obtenus suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{8}$.

b) • $\mathrm{P(X = 1)} = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{8}\right)^1\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{512} \approx 0{,}287.$

• $\mathrm{P}(1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 3) = \mathrm{P(X = 1)} + \mathrm{P(X = 2)}$

$$= \frac{147}{512} + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)$$

$$= \frac{21}{64} \approx 0{,}328.$$

35 **a)** $n = 3$

$\mathrm{P(X = 0)} = (1 - p)^3 = \frac{27}{125}$ donc $1 - p = \frac{3}{5}$ et $p = \frac{2}{5}$.

b)

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = k)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

36 $n = 4$ et $(1 - p)^4 = 0{,}129\,6$ donc $1 - p = 0{,}6$ et $p = 0{,}4$.

37 **1. a)** $p = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}3 = 0{,}4$.

La probabilité d'obtenir un numéro pair est égale à 0,4.

b) $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 1) = \binom{n}{1} 0{,}4^1 \times 0{,}6^{n-1} = n \times 0{,}4 \times 0{,}6^{n-1}$

2. a) Dans la case rouge, il faut saisir :

i*0.4*0.6**(i-1)

b)

n	1	2	3	4	5
P(X = 1)	0,4	0,48	0,432	0,346	0,259
n	6	7	8	9	10
P(X = 1)	0,187	0,131	0,09	0,06	0,04

38 Réalisation de la feuille de calcul.

39 $\mathrm{P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}$.

a) Lorsque X suit la loi binomiale B(5 ; 0, 3) : $\mathrm{P(X \leqslant 2)} \approx 0{,}84$.

b) Lorsque X suit la loi binomiale $\mathrm{B}\left(10\,;\frac{1}{4}\right)$: $\mathrm{P(X \leqslant 2)} \approx 0{,}53$.

40 $\mathrm{P(3 \leqslant X < 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)}$.

a) Lorsque X suit la loi binomiale B(10 ; 0,2) : $\mathrm{P(3 \leqslant X < 6)} \approx 0{,}32$.

b) Lorsque X suit la loi binomiale $\mathrm{B}\left(11\,;\frac{2}{5}\right)$: $\mathrm{P(3 \leqslant X < 6)} \approx 0{,}63$.

41 **a)** Cet algorithme calcule $\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b)$.

b)
```
from math import *

p=0
for i in range(8,16):
    p=p+factorial(20)/(factorial(20-i)*factorial(i))*0.7**i*0.3**(20-i)
print(p)
```

Pour la loi binomiale $\mathrm{B}(20\,;0{,}7)$: $\mathrm{P}(8 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 15) \approx 0{,}761$.

42 **a)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}03$.

b) $\mathrm{P(X = 0)} = 0{,}97^{20} \approx 0{,}54$

$\mathrm{P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)}$

$\mathrm{P(X \geqslant 1)} \approx 0{,}46$

43 **a)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{4}$.

b) $\mathrm{P(A) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)}$

$$\mathrm{P(A)} = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}63.$$

La probabilité que moins de deux lampes s'illuminent en vert est environ égale à 0,63.

$\mathrm{P(B) = P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)}$

$\mathrm{P(B) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(A)} \approx 1 - 0{,}63 \approx 0{,}37$.

La probabilité qu'au moins deux lampes s'illuminent en vert est environ égale à 0,37.

44 **a)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}1$.

b) $\mathrm{P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)} = 1 - 0{,}9^4$

$\mathrm{P(X \geqslant 1)} \approx 0{,}34$

La probabilité qu'au moins un enfant sur les quatre présente le caractère C est environ égale à 0,34.

45 **a)** Tirer une cordelette est une épreuve de Bernoulli.

S : « Tirer un gros lot » et $\mathrm{P(S)} = \frac{30}{250} = 0{,}12$.

On répète trois fois cette même épreuve dans des conditions d'indépendance.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}12$.

b) $\mathrm{P(X = 0)} = 0{,}88^3 \approx 0{,}68$.

La probabilité de ne pas gagner de gros lot est environ égale à 0,68.

c) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(X \geqslant 1) \approx 0{,}32$

La probabilité de gagner au moins un gros lot est environ égale à 0,32.

d) $P(X = 2) = \binom{3}{2} 0{,}12^2 (1 - 0{,}12)^1 \approx 0{,}038.$

La probabilité de gagner exactement deux gros lots est environ à 0,038.

Pour se tester

46 **1.** C **2.** B **3.** A

47 **1.** A, C, D **2.** B, C **3.** A, D **4.** A, B, C

48 **1.** Faux

En effet, pour les moins de 18 ans, l'univers est $E_1 = \{F ; H\}$; pour les 18 à 60 ans, l'univers est $E_2 = E_1$; pour les 60 ans et plus, l'univers est $E_3 = E_1 = E_2$.

Donc l'univers de cette expérience aléatoire est $E = E_1 \times E_2 \times E_3$ et il comporte $2 \times 2 \times 2$ soit 8 issues.

2. Vrai

En effet, $p = P(F ; F ; F) + P(H ; H ; H)$

$$p = \frac{45}{100} \times \frac{30}{75} \times \frac{18}{30} + \frac{55}{100} \times \frac{45}{75} \times \frac{12}{30}$$

$p = 0{,}24.$

3. Vrai

En effet, $p' = P(F ; F ; F) + P(F ; F ; H) + P(H ; F ; F) + P(F ; H ; F)$

$$p' = \frac{45}{100} \times \frac{30}{75} \times \frac{18}{30} + \frac{45}{100} \times \frac{30}{75} \times \frac{12}{30} + \frac{55}{100} \times \frac{30}{75} \times \frac{18}{30} + \frac{45}{100} \times \frac{45}{75} \times \frac{18}{30}$$

$p' = 0{,}474.$

S'entraîner

49 **1.**

k	0	1	2
P(X = k)	q^2	$2pq$	p^2

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = q^2 + 2pq + p^2$

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = (p + q)^2 = 1$

2. a)

k	0	1	2	3
P(X = k)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ est égal à :

$$q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3$$

b) $(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$.

Donc $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = (p + q)^3 = 1^3 = 1$.

3. Hypothèse de récurrence : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n$ c'est-à-dire

$$p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q + \ldots + \binom{n}{n-k+1} p^{k-1} q^{n-k-1} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1} pq^{n-1} + q^n$$

• On sait de plus que, pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$,

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-1}$$

Ainsi,

$$p^n + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q + \ldots + \binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{1} pq^{n-1} + q^n$$

En multipliant cette ligne par p, on obtient la première ligne bleue.

• On repart de l'hypothèse de récurrence et on sait que $\binom{n}{n} = 1$. Ainsi, en multipliant $(p + q)^n$ par q, on obtient la deuxième ligne bleue.

• On sait que, pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{n-k} + \binom{n}{k}$$

En additionnant les deux premières lignes bleues, on obtient alors la troisième ligne.

Par exemple :

$$\binom{n}{k-1} p^k q^{n+1-k} + \binom{n}{k} p^k q^{n+1-k} =$$
$$\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] p^k q^{n+1-k} =$$
$$\left[\binom{n}{n+1-k} + \binom{n}{k}\right] p^k q^{n+1-k} = \binom{n+1}{k} p^k q^{n+1-k}.$$

50 $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(X \geqslant 1) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^n$

Or $\binom{n}{0} = 1$ et $p^0 = 1$, donc $P(X \geqslant 1) = 1 - (1 - p)^n$.

Ainsi, $P(X \geqslant 1) \geqslant S$ est successivement équivalent à $1-(1-p)^n \geqslant S$; $(1-p)^n \leqslant 1-S$;
$\ln(1-p)^n \leqslant \ln(1-S)$; $n\ln(1-p) \leqslant \ln(1-S)$;
$n \geqslant \dfrac{\ln(1-S)}{\ln(1-p)}$ (car $1-p \in]0\,;1[$, donc $\ln(1-p) < 0$).

51 **Parcours 1**

On note V l'issue : « La lettre choisie est une voyelle ».

$p = P(V\,;\overline{V}) + P(\overline{V}\,;V) + P(V\,;V)$

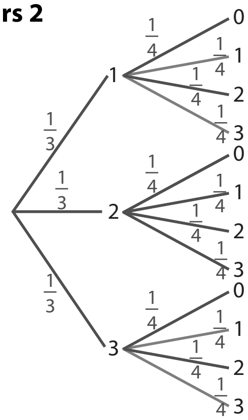
$$p = \frac{6}{26}\times\frac{19}{24} + \frac{20}{26}\times\frac{5}{24} + \frac{6}{26}\times\frac{5}{24}$$

$$p = \frac{61}{156} \approx 0{,}39.$$

La probabilité qu'il y ait au moins une voyelle est environ égale à 0,39.

Parcours 2

a) et **b)**



c) $P(A) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}$

$$P(A) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.$$

La probabilité qu'au moins l'un des deux chiffres tapés soit pair est égale à $\dfrac{2}{3}$.

52 **1. a)** Dans le cadre rouge, il faut saisir :

randint(1,4)

Dans le cadre vert, il faut saisir :

x = = k :

Dans le cadre bleu, il faut saisir :

som/n

b)

```
from random import *

def Echantillon(n,k):
    som=0
    for i in range(0,n):
        a=randint(1,6)
        b=randint(1,4)
        x=a+b
        if x==k:
            som=som+1
    f=som/n
    return f
```

2. a)

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Les issues de X sont donc les nombres entiers de 2 à 10.

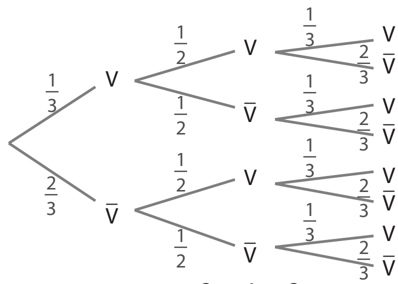
b) $P(X=5) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$

$P(X=6) = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}167$

Ces deux probabilités sont proches des fréquences observées dans les échantillons de la question **1. b)**.

53 **1. a)**

Urne 1 **Urne 2** **Urne 3**

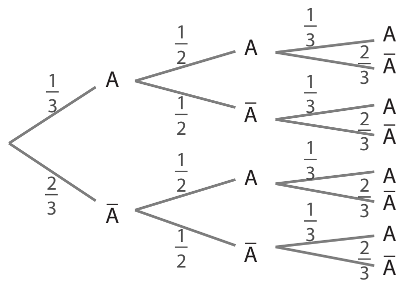


b) $p = 1 - P(\overline{V}\,;\overline{V}\,;\overline{V}) = 1 - \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}$

$$p = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

La probabilité de tirer au moins une boule verte est égale à $\dfrac{7}{9}$.

2. a) **Urne 1** **Urne 2** **Urne 3**



b)

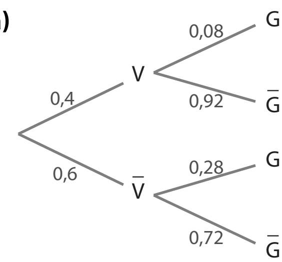
$p' = P(\overline{A}\,;\overline{A}\,;\overline{A}) + P(A\,;\overline{A}\,;\overline{A}) + P(\overline{A}\,;A\,;\overline{A}) + P(\overline{A}\,;\overline{A}\,;A)$

$$p' = \frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$$

$$p' = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

La probabilité d'obtenir A une fois au plus est égale à $\dfrac{2}{3}$.

54 **a)**

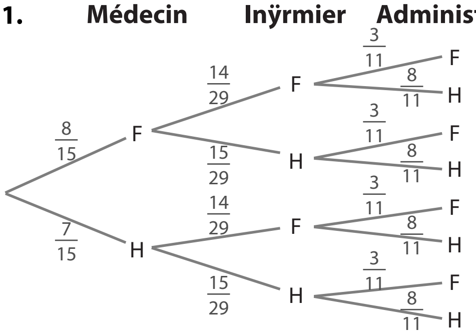


b) D'après la formule des probabilités totales,
$P(G) = P(V \cap G) + P(\overline{V} \cap G)$
$P(G) = 0{,}4 \times 0{,}08 + 0{,}6 \times 0{,}28$. Donc $P(G) = 0{,}2$.
La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe est égale à 0,2.

c) $P_G(V) = \dfrac{P(V \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0{,}4 \times 0{,}08}{0{,}2} = 0{,}16$.
Sachant que la personne choisie a contracté la grippe, la probabilité qu'elle soit vaccinée est 0,16.

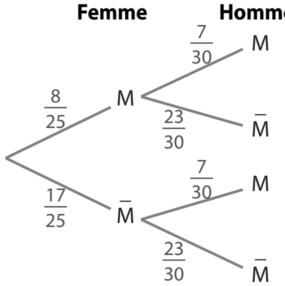
d) $P(V \cup G) = 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}568$.
La probabilité que la personne choisie ait contractée la grippe ou soit vaccinée est égale à 0,568.

55 **1.** **Médecin** **Inÿrmier** **Administratif**



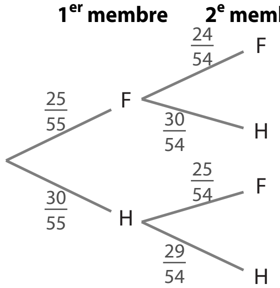
$P(S) = P(F ; H ; H) + P(H ; F ; H) + P(H ; H ; F)$
$$P(S) = \frac{8}{15} \times \frac{15}{29} \times \frac{8}{11} + \frac{7}{15} \times \frac{14}{29} \times \frac{8}{11} + \frac{7}{15} \times \frac{15}{29} \times \frac{3}{11}$$
$P(S) = \dfrac{71}{165} \approx 0{,}43$.
La probabilité que l'un des trois membres soit une femme est environ égale à 0,43.

2. **Femme** **Homme**



$P(S) = P(M ; M) + P(M ; \overline{M}) + P(\overline{M} ; M)$
$P(S) = 1 - P(\overline{M} ; \overline{M}) = 1 - \dfrac{17}{25} \times \dfrac{23}{30}$
$P(S) = \dfrac{359}{750} \approx 0{,}48$.
La probabilité que l'un des deux membres choisis au moins soit médecin est environ égale à 0,48.

3. **1^er^ membre** **2^e^ membre**



$P(S) = P(F ; F) + P(H ; H)$
$P(S) = \dfrac{25}{55} \times \dfrac{24}{54} + \dfrac{30}{55} \times \dfrac{29}{54}$
$P(S) = \dfrac{49}{99} \approx 0{,}495$.
La probabilité que les deux membres choisis soient du même sexe est environ égale à 0,495.

56 **Parcours 1**

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes malades parmi les 50 individus.
X suit la loi binomiale $B(50 ; 0{,}004)$.
$P(A) = P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2)$
$P(A) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$
$P(A) =$
$$1 - \left[\binom{50}{0} 0{,}004^0 \times 0{,}996^{50} + \binom{50}{1} 0{,}004^1 \times 0{,}996^{49}\right]$$
$P(A) \approx 0{,}017$.
La probabilité qu'au moins deux personnes de l'échantillon soient malades est environ égale à 0,017.

Parcours 2

a) X suit la loi binomiale $B(10 ; 0{,}4)$.

b) $P(X = 0) = \dbinom{10}{0} 0{,}4^0 \times 0{,}6^{10} \approx 0{,}006$
$P(X = 1) = \dbinom{10}{0} 0{,}4^1 \times 0{,}6^9 \approx 0{,}040$

c) $P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$
$P(X \geqslant 2) \approx 1 - (0{,}006 + 0{,}040) = 0{,}594$.
La probabilité qu'au moins deux personnes répondent est environ égale à 0,594.

57 **1. a)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}04$.

b) $P(X > 5) = 1 - P(X \leqslant 5)$
$P(X > 5) \approx 0{,}21$

2. a) $P(X > k) \leqslant 0{,}01$ équivaut à $P(X \leqslant k) > 0{,}99$.

```
from math import *

def Combi(n,k):
    C=factorial(n)//(factorial(k)*factorial(n-k))
    return C

def Seuil(S):
    k=0
    P=0.96**100
    while P<S:
        k=k+1
        P=P+Combi(100,k)*0.04**k*0.96**(100-k)
    return k
```

b)

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> Seuil(0.99)
9
>>>
```

La plus petite valeur est $k = 9$.
Un lot est remboursé lorsqu'il contient strictement plus de 9 roses fanées.

58 **(1) a)** X suit la loi binomiale $B\left(4\,;\dfrac{1}{37}\right)$.

b) $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}104$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie en misant sur l'un des 37 numéros est environ égale à 0,104.

(2) a) X suit la loi binomiale $B\left(4\,;\dfrac{19}{37}\right)$.

b) $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}943$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie en misant sur « impair » est environ égale à 0,943.

(3) a) X suit la loi binomiale $B\left(4\,;\dfrac{18}{37}\right)$.

b) $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}930$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie en misant sur « 1 à 18 » est environ égale à 0,93.

(4) a) X suit la loi binomiale $B\left(4\,;\dfrac{18}{37}\right)$.

b) $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}930$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie en misant sur « Rouge » est environ égale à 0,93.

(5) a) X suit la loi binomiale $B\left(4\,;\dfrac{12}{37}\right)$.

b) $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}792$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie en misant sur « 1 à 12 » est environ égale à 0,792.

59 **a)** X suit la loi binomiale $B(50\,;0{,}75)$.

$$P(X=35)=\binom{50}{35}0{,}75^{35}\times 0{,}25^{15}\approx 0{,}089.$$

La probabilité que sur cet échantillon de 50 clients, 35 lui aient laissé un pourboire est environ égale à 0,089.

b) $72 \div 1{,}80 = 40$.

Il faut donc que 40 clients lui aient laissé un pourboire.

$P(X=40)\approx 0{,}099$.

La probabilité qu'il ait reçu 72 € de pourboires est environ égale à 0,099.

c) $P(35 \leqslant X \leqslant 40) \approx 0{,}673$.

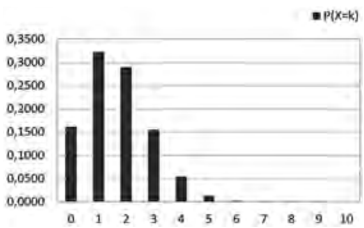
La probabilité qu'entre 35 et 40 (inclus) des 50 clients de l'échantillon, lui aient laissé un pourboire est environ égale à 0,673.

60 **1. a)** X suit la loi binomiale $B\left(10\,;\dfrac{1}{6}\right)$.

En cellule B2, il faut taper :

=LOI.BINOMIALE (A2 ;10 ;1/6 ;0)

	A	B
1	k	P(X=k)
2	0	0,1615
3	1	0,3230
4	2	0,2907
5	3	0,1550
6	4	0,0543
7	5	0,0130
8	6	0,0022
9	7	0,0002
10	8	1,861E-05
11	9	8,269E-07
12	10	1,654E-08



b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) \approx 1 - 0{,}1615 \approx 0{,}839$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$U_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{6}$, puisqu'on commence par $n-1$ échecs suivi d'un succès.

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$U_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6} U_n.$$

Donc la suite (U_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$.

c) $U_n < 0{,}1$ est successivement équivalent à

$\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{6} < 0{,}1$; $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} < 0{,}6$;

$\ln\left[\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}\right] < \ln(0{,}6)$;

$(n-1)\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) < \ln(0{,}6)$;

$n-1 > \dfrac{\ln(0{,}6)}{\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)}$ (car $\ln\left(\dfrac{5}{6}\right) < 0$)

$n > 1 + \dfrac{\ln(0{,}6)}{\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)}$

Or $1 + \dfrac{\ln(0{,}6)}{\ln\left(\dfrac{5}{6}\right)} \approx 3{,}8$

Ainsi, il faut prendre $n \geqslant 4$.

61 **a)** On sait que :

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, donc

$p_3 + p_2 + p_3 + p_2 + p_3 + p_2 = 1$ or $p_2 = 2p_3$ donc

$9p_3 = 1$ et $p_3 = \dfrac{1}{9}$ donc $p_2 = \dfrac{2}{9}$.

Ainsi, $p_1 + p_3 + p_5 = \dfrac{1}{9}$ et $p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{2}{9}$.

b) La probabilité d'obtenir un résultat qui est

$p = p_2 + p_4 + p_6 = \dfrac{2}{3}$.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on a obtenu un résultat pair lors des n lancers.

X suit la loi binomiale $B\left(n\,;\dfrac{2}{3}\right)$.

$q_n > 0{,}999$ est successivement equivalent à $P(X \geqslant 1) > 0{,}999$; $1 - P(X=0) > 0{,}999$;

$P(X=0) < 0{,}001$; $\dbinom{n}{0}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} < 0{,}001$;

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} < 0{,}001$; $\ln\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right) < \ln(0{,}001)$;

$n\ln\left(\dfrac{1}{3}\right) < \ln(0{,}001)$; $n > \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)}$.

Or, $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)} \approx 6{,}3$.

Donc, il faut $n \geqslant 7$.

62 Dans chaque cas, on note X la variable aléatoire qui indique le nombre de fois où la figure est apparue sur les trois rouleaux.

a) • Gain 1 000 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{2}{38}\right)$.

$P(X=3) \approx 1{,}45 \times 10^{-4}$.

• Gain 500 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{3}{38}\right)$.

$P(X=3) \approx 4{,}92 \times 10^{-4}$.

• Gain 100 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{4}{38}\right)$.

$P(X=3) \approx 1{,}16 \times 10^{-3}$.

• Gain 50 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{5}{38}\right)$.

$P(X=3) \approx 2{,}28 \times 10^{-3}$.

• Gain 25 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{6}{38}\right)$.

$P(X=3) \approx 3{,}94 \times 10^{-3}$.

• Gain 10 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{8}{38}\right)$ (avec olives)

$P(X=3) \approx 9{,}93 \times 10^{-3}$.

• Gain 10 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{10}{38}\right)$ (avec cerises)

$P(X=3) \approx 0{,}018$.

• Gain 5 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{10}{38}\right)$.

$P(X=2) \approx 0{,}153$.

• Gain 2 : X suit $B\left(3\,;\dfrac{10}{38}\right)$.

$P(X=1) \approx 0{,}429$.

b) Pour que la partie ne soit pas perdante, il faut que le gain soit supérieur ou égal à 10.

Ainsi, $p \approx 1{,}45 \times 10^{-4} + 4{,}92 \times 10^{-4} + 1{,}16 \times 10^{-3} + 2{,}28 \times 10^{-3} + 3{,}94 \times 10^{-3} + 9{,}33 \times 10^{-3} + 0{,}018$

$p \approx 0{,}034$.

63 **a)** « Ne pas obtenir de succès » ou « Obtenir seulement des échecs ».

b) « Obtenir au moins trois succès » ou « Obtenir plus de deux succès ».

c) « Obtenir au moins deux succès » ou « Obtenir plus de trois échecs ».

64 **a)** La proportion est vraie.

En effet $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$.

b) La proposition est fausse.

En effet pour $n = 4$, $p = 0{,}4$ et $k = 1$,

$P(X = 1) = 0{,}345\ 6$ et $P(X = 3) = 0{,}153\ 6$ donc $P(X=1) > P(X=3)$.

c) La proposition est vraie.

En effet, pour $0 \leqslant k \leqslant n$,

$P(Y=k) = P(X=n-k) = \dbinom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k$,

or, $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$ donc $P(Y=k) = \dbinom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$.

65 **1. a)** Le trajet 0-0-1-1-0 correspond au numéro 2 ; le trajet 1-1-0-1-0 correspond au numéro 3.

b) Dans le cadre rouge, il faut écrire :

som/n

```python
from random import *

def Simulation(n,k):
    som=0
    for i in range(n):
        a=randint(0,1)
        b=randint(0,1)
        c=randint(0,1)
        d=randint(0,1)
        e=randint(0,1)
        S=a+b+c+d+e
        if S==k:
            som=som+1
    f=som/n
    return f
```

```
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>> Simulation(10000,3)
0.3102
>>> |
```

c) Pour 10 000 lancers, le programme affiche une fréquence égale à 0,315 1.

2. a) Le succès est : « La bille part à droite ».

$p = P(S) = \dfrac{1}{2}$.

Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

b) X suit la loi binomiale $B\left(5\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $P(X=3) = \dbinom{5}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 0{,}3125$.

Ces deux résultats sont très proches.

La difference est dûe aux fluctuations d'échantillonnage.

d) $P(X=0) = 0{,}031\ 25$; $P(X=1) = 0{,}156\ 25$;
$P(X=2) = 0{,}312\ 5$; $P(X=4) = 0{,}156\ 25$;
$P(X=5) = 0{,}031\ 25$.

66 **1. a)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 70$ et $p = 0{,}95$.

b) $P(X \leqslant 69) = 1 - P(X=70)$

$P(X \leqslant 69) = 1 - 0{,}95^{70}$

$P(X \leqslant 69) \approx 0{,}972$

2. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}95$.

b) $P(X \leqslant 69) \approx 0{,}002$

c) $P(X \geqslant 71) = 1 - P(X \leqslant 70) \approx 0{,}993$

3. a) Dans le cadre rouge, il faut écrire :

$$R = 90*70 - 45*(0.95*n - 70)$$

Dans le cadre vert, il faut écrire :

$$R = 90*0.95*n$$

b)

```
from math import *

def Recette(n):
    if 0.95*n>=70:
        R=90*70-45*(0.95*n-70)
    else:
        R=90*0.95*n
    return R
```

La recette est maximale pour la plus petite valeur de n telle que $0{,}95n \geqslant 70$, c'est-à-dire pour $n = 74$.

67 **Yanis** :

$p = P(3\,;2) + P(2\,;3) = \frac{1}{6}\times\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$\approx 0{,}111$.

Elia :

$p' = P(5\,;5\,;2) + P(5\,;2\,;5) + P(2\,;5\,;5)$

$p' = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$

$p' = \frac{75}{216} \approx 0{,}347$.

Yanis se trompe, Elia a plus de chance.

68 On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de tickets gagnants sur les n tickets.

X suit la loi binomiale $B\left(n\,;\frac{1}{n}\right)$.

$P(X \geqslant 1) < 0{,}64$ est successivement equivalent à

$1 - P(X = 0) < 0{,}64$; $1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0\left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 0{,}64$;

$1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 0{,}64$; $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 0{,}36$.

À la calculatrice, on trouve qu'il faut prendre $n \geqslant 24$.

69 **1.** Pour tout x de $[0\,;100]$, $f(x) = \frac{x}{50} - \frac{x^2}{5000}$, donc $f'(x) = \frac{1}{50} - \frac{x}{2500}$. D'où le tableau de variation de f.

x	0		50		100
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

Ainsi, la fonction f admet un maximum égal à $\frac{1}{2}$ et atteint pour $x = 50$.

2. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{m}{100}$.

$P(X = 1) = 2\times\frac{m}{100}\times\left(1-\frac{m}{100}\right)$. Ainsi, $P(X = 1) = f(m)$.

La fonction $x \mapsto 2\frac{x}{100}\left(1-\frac{x}{100}\right)$ définie sur $[0\,;100]$ admet pour maximum $f(50) = \frac{1}{2}$.

La probabilité est maximale pour $m = 50$.

b) Dans ce cas, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

70 750 € d'indemnisation correspond à trois retards de plus de 3 h.

Pour un vol donné, on note succès l'événement S : «Le vol a plus de 3 h de retard ».

$p = P(S) = 0{,}04 \times 0{,}22 = 0{,}008\,8$.

L'expérience est répétée $n = 10$ fois de manière identique et indépendante, donc, la variable aléatoire X qui donne le nombre de retards de plus de 3 h parmi les 10 vols, suit la loi binomiale $B(10\,;0{,}008\,8)$.

$P(X = 3) = \binom{10}{3}0{,}0088^3 \times 0{,}9912^7 \approx 7{,}7\times10^{-5}$.

71 **a)** X suit la loi binomiale $B(4\,;0{,}8)$

Y suit la loi binomiale $B(5\,;0{,}3)$.

b) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(X \geqslant 1) = 1 - \binom{4}{0}0{,}8^0 \times 0{,}2^4 \approx 0{,}9984$.

$P(Y \geqslant 2) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1))$

$P(Y \geqslant 2) = 1 - \left(\binom{5}{0}0{,}3^0 \times 0{,}7^5 + \binom{5}{1}0{,}3 \times 0{,}7^4\right)$

$P(Y \geqslant 2) \approx 0{,}472$.

Ainsi, elle a moins de chance de gagner au moins deux parties contre Leonard que de gagner au moins une partie contre Alex.

72 On note, Succès : « Le devin donne la bonne réponse », $p = P(S) = \frac{1}{2}$ dans le cas où il répond au hasard.

On répète $n = 10$ fois l'épreuve, X est le nombre de réponses justes du devin.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$.

$P(X = 8) \approx 0{,}04$ (arrondi au centième).

Dans le cas de réponses au hasard, cette probabilité est faible, l'homme serait-il alors un vrai devin ?

Objectif BAC

73 **Partie A**

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et de probabilité 0,01.

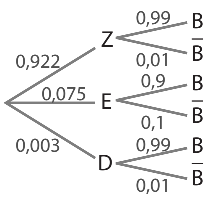
2. On a $P(X=2) = \binom{8}{2} 0{,}01^2 \times (1-0{,}01)^{8-2}$

$= 28 \times 0{,}01^2 \times 0{,}99^6 \approx 0{,}00263$ soit 0,002 6 à 10^{-4} près.

3. On a $P(X=0) = 0{,}01^0 \times 0{,}99^8 \approx 0{,}922\,7$ et $P(X=1) = 8 \times 0{,}01 \times 0{,}99^7 \approx 0{,}074\,6$.

Donc $P(X \geqslant 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$ $\approx 1 - (0{,}922\,7 + 0{,}074\,6 + 0{,}002\,6) = 1 - 0{,}999\,9$ soit 0,000 1 ce qui est effectivement négligeable.

Partie B 1.



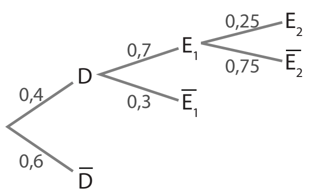
2. La probabilité demandée est

$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0{,}075 \times 0{,}9 = 0{,}0675$.

3. D'après la fomule des probabilités totales :

$P(B) = P(Z \cap B) + P(E \cap B) + P(D \cap B) = 0{,}922 \times 0{,}99 + 0{,}074 \times 0{,}9 + 0{,}003 \times 0{,}99 = 0{,}983\,25$ soit 0,983 3 à 10^{-4} près.

74 **1. a)**



b) $P(E_1) = P(D \cap E_1) = P(D) \times P_D(E_1) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$.

c) La probabilité de ne pas être recruté est :

$P(F) = P(\overline{D}) + P(D \cap \overline{E_1}) + P(D \cap E_1 \cap \overline{E_2})$

$= 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}75$

$= 0{,}6 + 0{,}12 + 0{,}21 = 0{,}93$.

2. a) Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à 0,07. La variable X suit donc la loi binomiale $B(5\,;0{,}07)$.

b) $P(X=2) = \binom{5}{2} 0{,}07^2 \times 0{,}93^3 = 10 \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^3$

$P(X=2) = \binom{5}{2} 0{,}07^2 \times 0{,}93^3 = 10 \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^3$

$\approx 0{,}0394 \approx 0{,}039$ à 10^{-3} près.

3. a) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}07^0 \times 0{,}93^n$

$= 1 - 0{,}93^n$.

b) Dans le cadre rouge, il faut écrire :

1-0.93**n<0.999

Dans le cadre vert, il faut écrire : n+1

c) $P(X \geqslant 1) > 0{,}999$ est successivement equivalent à $1 - 0{,}93^n \geqslant 0{,}999$; $0{,}93^n \leqslant 0{,}001$;

$\ln(0{,}93^n) \leqslant \ln(0{,}001)$; $n\ln(0{,}93) \leqslant \ln(0{,}001)$;

$n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}93)}$.

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}93)} \approx 95{,}2$. Donc il faut prendre $n = 96$.

Le cabinet doit examiner au moins 96 dossiers pour que la probabilité de recruter au moins un candidat soit supérieure ou égale à 0,999.

75 **1. a)** Anselme répond au hasard à chaque question donc la probabilité qu'il réponde juste à une question de $p = \dfrac{1}{4}$.

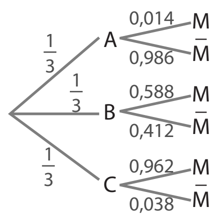
Il y a 20 questions qui sont indépendantes donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bonnes réponses d'Anselme, donc sa note, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}25$.

b) À l'aide de la calculatrice, l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geqslant 10)$ est 0,014.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.

On note A, B, C et M les événements :

- A : « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
- B : « la copie choisie est celle de Barbara » ;
- C : « la copie choisie est celle de Camille » ;
- M : « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 ».



La probabilité cherchée est : $P_M(B) = \dfrac{P(B \cap M)}{P(M)}$.

- On choisit au hasard la copie d'un des trois candidats donc $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{3}$.
- $P(B \cap M) = P(B) \times P_B(M)$.

D'après le contexte, $P_B(M) = P(Y \geqslant 10)$

donc $P(B \cap M) = \dfrac{1}{3} \times 0{,}588$.

- D'après la formule des probabilités totales

$P(M) = P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M)$
$= P(A) \times P_A(M) + P(B) \times P_B(M) + P(C) \times P_C(M)$
$= P(A) \times P(X \geqslant 10) + P(B) \times P(Y \geqslant 10)$
$+ P(C) \times P(Z \geqslant 10)$
$= \frac{1}{3} \times 0{,}014 + \frac{1}{3} \times 0{,}588 + \frac{1}{3} \times 0{,}962$
$= \frac{1{,}564}{3}$

Donc $P_M(B) = \dfrac{\frac{0{,}588}{3}}{\frac{1{,}564}{3}} \approx 0{,}376.$

76 Pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$,

• $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

• $P(X \geqslant k) = P(X = k) + P(X = k+1) + \ldots + P(X = n)$

$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} + \ldots$

$+ \binom{n}{n} p^n (1-p)^0$

• $P(X \leqslant k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$

$= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots$

$+ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

77 X est la variable aléatoire qui compte le nombre de participants, parmi les trois, qui tenteront le parcours sportif.

X suit la loi binomiale $B\left(3\,;\frac{1}{3}\right)$.

$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$

$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}.$

Ainsi, $P(X = 0) = 8 \times P(X = 3)$, donc il a raison.

78 **a)** Faux. A : « Obtenir deux 6 »

$P(A) = 0{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}002\,5$

B : « Obtenir une seule fois le 1 »

$P(B) = 0{,}1 \times (1 - 0{,}1) + (1 - 0{,}1) \times 0{,}1 = 0{,}18.$

Donc Léa se trompe.

b) Faux. C : « La somme des deux numéros fait 7 »

$P(C) = P(1\,;6) + P(6\,;1) + P(5\,;2) + P(2\,;5)$
$+ P(3\,;4) + P(4\,;3)$

$P(C) = 0{,}1 \times 0{,}05 + 0{,}05 \times 0{,}1 + 0{,}05 \times 0{,}2$
$+ 0{,}2 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}3$

$P(C) = 0{,}21$ et $0{,}21 \neq 0{,}2$.

c) Faux. D : « Obtenir deux numéros différents »

$P(D) = 1 - (P(1\,;1) + P(2\,;2) + P(3\,;3)$
$+ P(4\,;4) + P(5\,;5) + P(6\,;6))$

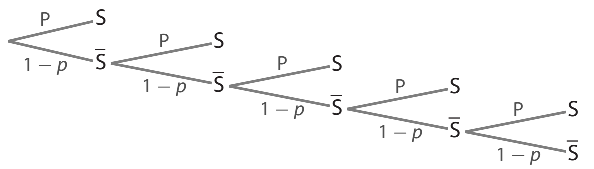
$P(D) = 1 - (0{,}1^2 + 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 0{,}3^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2)$

$P(D) = 0{,}765.$

Pour aller plus loin

79 **1. a)** X peut prendre toutes les valeurs qui sont des nombres entiers naturels non nuls.

b) **1re épreuve 2e épreuve 3e épreuve 4e épreuve 5e épreuve**



c) • $P(X = 3) = p(1-p)^2$ • $P(X = 5) = p(1-p)^4$.

d) Pour tout nombre entier naturel k non nul,

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

e) Pour tout nombre entier naturel k non nul,

$P(X \leqslant k) = P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = k)$

$P(X \leqslant k) = p + p(1-p) + \ldots + p(1-p)^{k-1}$

$P(X \leqslant k) = p(1 + (1-p) + \ldots + (1-p)^{k-1})$

$P(X \leqslant k) = p \times \dfrac{1-(1-p)^{k-1+1}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k.$

f) Puisque $1 - p \in \,]0\,;1[$, $\lim\limits_{k\to+\infty}(1-p)^k = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} P(X \leqslant k) = 1.$

2. a) X est la variable aléatoire qui indique le rang de la première panne.

Donc si, pour une utilisation donnée, le succès est S : « le produit est en panne », alors X suit la loi géométrique de paramètre $p = P(S) = \frac{1}{50}$.

b) • $P(X = 30) = \frac{1}{50} \times \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{29} \approx 0{,}011.$

La probabilité que le produit tombe en panne lors de la 30e utilisation est environ égale à 0,011.

• $P(X \leqslant 75) = 1 - \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{75} \approx 0{,}780.$

La probabilité que le produit tombe en panne avant la 76e utilisation est environ égale à 0,78.

80 **Partie A**

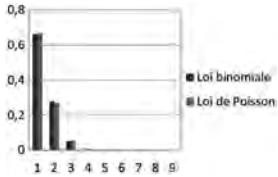
1. a) Dans la cellule B3, on saisit :

=LOI.BINOMIALE(A3;8;0,05;0)

Dans la cellule C3, on saisit :

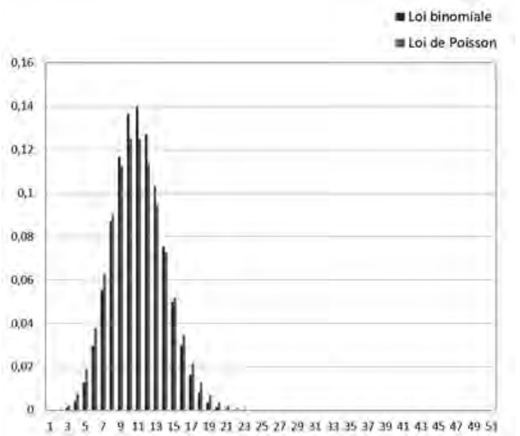
=LOI.POISSON(A3;0,4;0)

	A	B	C
1		P(X=k)	
2	k	Loi binomiale	Loi de Poisson
3	0	0,663420431	0,670320046
4	1	0,279334918	0,268128018
5	2	0,051456432	0,053625604
6	3	0,005416467	0,00715008
7	4	0,000356346	0,000715008
8	5	1,50041E-05	5,72006E-05
9	6	3,94844E-07	3,81338E-06
10	7	5,9375E-09	2,17907E-07
11	8	3,90625E-11	1,08954E-08

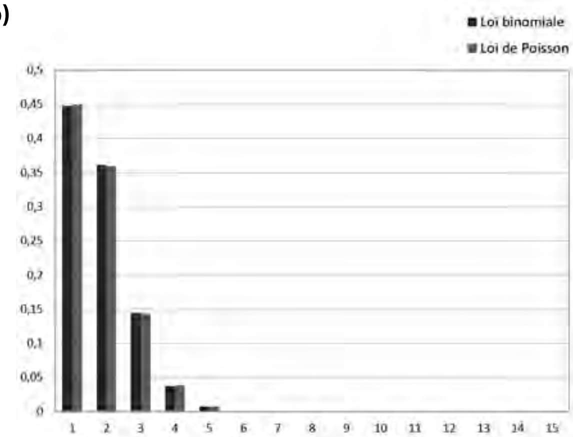


b) On observe que pour les deux lois, on obtient des résultats très proches.

2. a)



b)



Partie B

1. a) X suit la loi binomiale B(40 ; 0,02).

b) $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}954$.

La probabilité que deux pièces au plus soient défectueuses est environ égale à 0,954.

2. $P(Y \leqslant 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$

$$P(Y \leqslant 2) = e^{-0,8} \times \frac{0{,}8^0}{0!} + e^{-0,8} \times \frac{0{,}8^1}{1!} + e^{-0,8} \times \frac{0{,}8^2}{2!}$$

$P(Y \leqslant 2) \approx 0{,}953$.

On constate à nouveau que ces deux probabilités sont très proches.

81 **Partie A**

a) $F(x)$ est une probabilité donc pour tout nombre réel x, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.

b) $P(X > x) = 1 - P(X \leqslant x) = 1 - F(x)$

c) Avec $x \leqslant x'$, $P(x < X \leqslant x') = P(X \leqslant x') - P(X \leqslant x)$
$= F(x') - F(x)$.

$P(x < X \leqslant x') \geqslant 0$ donc $F(x) < F(x')$.

F est croissante sur $\mathbb{R}$.

d) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

$F(k) - F(k-1) = P(k-1 < X \leqslant k) = P(X = k)$

Partie B

a)

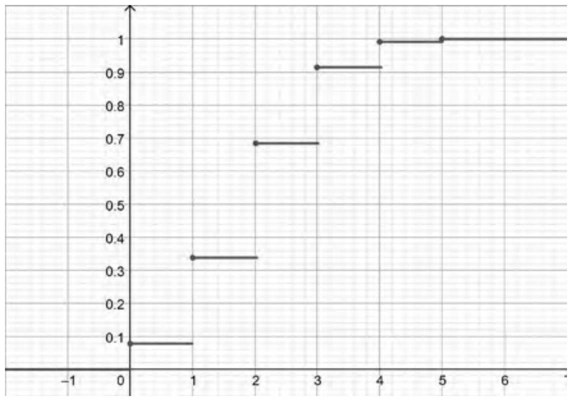
Issue de X	0	1	2	3	4	5
Probabilité	0,078	0,260	0,346	0,230	0,077	0,010

b) $F(1{,}7) = P(X \leqslant 1{,}7) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0{,}338$

c)

x	– 3	– 1	0	0,2	1
$F(x)$	0	0	0,078	0,078	0,338
x	1,7	2	2,1	2,8	
$F(x)$	0,338	0,684	0,684	0,684	

d)



Partie C

a) $F(0{,}85) = P(X \leqslant 0{,}85) = P(X = 0)$

Or $P(X = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(1 - \frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$.

On cherche donc n tel que $\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0{,}1296$.

$$n = \frac{\ln(0{,}1296)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} = 4.$$

b) $F(1{,}2) = P(X \leqslant 1{,}2) = P(X \leqslant 1)$

$F(1{,}2) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$F(1{,}2) = 0{,}1296 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3$

$F(1{,}2) = 0{,}475\ 2$.

82 **1. a)** X_1 suit la loi binomiale $B\left(80 ; \frac{20}{600}\right)$ soit $B\left(80 ; \frac{1}{30}\right)$.

X_2 suit la loi binomiale $B\left(100 ; \frac{45}{1500}\right)$ soit B(100 ; 0,03).

b) • $P(X_1 < 1) = P(X_1 = 0) \approx 0{,}066$.
La probabilité que sur une journée, moins d'une personne (et donc aucune) clique sur la publicité du site 1 est environ égale à 0,066.
• $P(X_2 > 1) = 1 - P(X_2 \leqslant 1)$
$P(X_2 > 1) = 1 - (P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1))$
$P(X_2 > 1) \approx 0{,}806$.
La probabilité que sur une journée plus d'une personne clique sur la publicité du site 2 est environ égale à 0,806.
c) Pour le site 1
Sur une journée, en moyenne, $80 \times \dfrac{20}{600}$ personnes cliquent sur la publicité.
Sur une année, en moyenne, environ 973 personnes cliquent sur la publicité.
Pour le site 2
Sur une journée, en moyenne, $100 \times \dfrac{45}{1500}$ personnes cliquent sur la publicité.
Sur une année, en moyenne, environ 1 095 personnes cliquent sur la publicité.
2. a) Pour le site 1

$$973 \times 150 \times \frac{1}{20} \approx 7300.$$

Or 7 300 < 8 000, donc l'encart publicitaire ne sera pas rentable.
b) Pour le site 2

$$1095 \times 150 \times \frac{3}{45} \approx 10950.$$

Or 10 950 > 8 000, donc l'encart publicitaire sera rentable.

83 On note m le nombre de balles de couleur rouge $(0 \leqslant m \leqslant 10)$.
X donne le nombre de balles rouges tirées.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{m}{10}$.

$$P(X = 1) = 3 \times \frac{m}{10} \times \left(1 - \frac{m}{10}\right)^2$$

Lorsque $m = 7$, $P(X = 1) = 0{,}189$.
On peut aussi effectuer une simulation avec le tableur.
On évalue à 7 le nombre de balles rouges.

84 On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants sur les quatre billets achetés.
X suit la loi binomiale $B\left(4\,;\dfrac{1}{2}\right)$.
$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2)$
$P(X \geqslant 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$
$P(X \geqslant 2) = 1 - \left[\binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]$
$P(X \geqslant 2) = 1 - (0{,}062\,5 + 0{,}25)$
$P(X \geqslant 2) = 0{,}687\,5$.
La publicité ment puisqu'en achetant 4 billets, on a 0,687 5 % de chances de gagner au moins deux fois.

16 Sommes de variables aléatoires

Questions-Tests

1 **(2)**

2 **a) (3)** **b) (1)**

3 **a) (3)** **b) (1)**

4 **a) (2)** **b) (3)**

Découvrir

1 Somme de deux variables aléatoires, espérance

1 **a)** Loi de probabilité de X :

a	1	2
$P(X = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Espérance de X :

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}.$$

b) Loi de probabilité de Y :

b	1	2	3	4
$P(Y = b)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Espérance de Y :

$$E(Y) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{5}{2}.$$

2 **a)**

Jeton \ Dé	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6

Les valeurs prises par $X + Y$ sont 2, 3, 4, 5 et 6.

b) Loi de probabilité de $X + Y$:

c	2	3	4	5	6
$P(X + Y = c)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Espérance de $X + Y$:

$$E(X + Y) = \frac{1}{8} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{4} \times 5 + \frac{1}{8} \times 6$$
$$= 4$$

3 On observe que $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

2 Propriétés de la variance

1 **a)** Loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4	5
$P(X = a)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

On obtient $V(X) = 2$.

b) La loi de probabilité de Y est la même que celle de X, donc $V(Y) = 2$.

c)

Tirage 1 \ Tirage 2	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10

Loi de probabilité de $X + Y$:

c	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X + Y = c)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{21}{25}$	$\frac{1}{25}$

d) On obtient $V(X + Y) = 4$.

On constate que $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

2 **a)** $Z = 2X$

b) Loi de probabilité de Z :

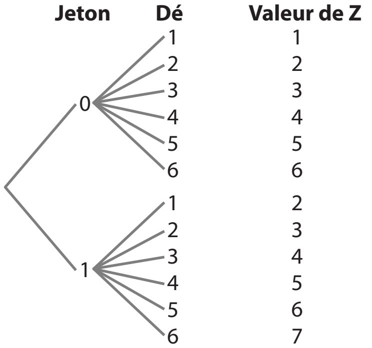
b	2	4	6	8	10
$P(Z = b)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

c) On obtient $V(X) = 4$.

On constate que $V(Z) = 2V(X)$.

Savoir-faire

3 On représente la situation par un arbre des possibles.



Les valeurs prises par Z sont les nombres entiers de 1 à 7 et on peut établir la loi de probabilité de Z :

c	1	2	3	4	5	6	7
$P(Z=c)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

4 **a)** $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2{,}5+3{,}4=5{,}9$
b) $E(4X)=4E(X)=4\times 2{,}5=10$
c) $E(4X+Y)=4E(X)+E(Y)=10+3{,}4=13{,}4$

7 X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le dé à quatre faces et Y celle qui donne le numéro obtenu avec le dé à six faces.
X et Y sont indépendantes, car les lancers des deux dés le sont.
Il y a trois cas où on obtient avec le dé à six faces le double du numéro obtenu avec le dé à quatre faces : 1 et 2 ; 2 et 4 ; 3 et 6.

$$P(\{X=1\}\cap\{Y=2\})=P(X=1)\times P(Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$$

$$P(\{X=2\}\cap\{Y=4\})=P(X=2)\times P(Y=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$$

$$P(\{X=3\}\cap\{Y=6\})=P(X=3)\times P(Y=6)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$$

Donc la probabilité demandée est $\frac{3}{24}$.

8 X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le premier dé et Y celle qui donne le numéro obtenu avec le second dé.
Avec la calculatrice, on obtient $V(X)=8{,}25$ et $V(Y)=100$.
Les variables X et Y sont indépendantes, donc $V(X+Y)=V(X)+V(Y)=108{,}25$.

11 X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec un dé.
Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4
$P(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Un lancer de six dés est alors un échantillon $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ de taille 6 de la loi de probabilité suivie par X.
La variable aléatoire S_6 somme de cet échantillon compte alors le nombre de points obtenus.
À la main ou à l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X)=2{,}5$ et $\sigma(X)\approx 1{,}12$.
Par conséquent, $E(S_6)=6\times 2{,}5=15$
et $\sigma(S_6)\approx\sqrt{6}\times 1{,}12$, c'est-à-dire $\sigma(S_6)\approx 2{,}74$.

12 Les 30 tentatives quotidiennes sont indépendantes les unes des autres, donc elles constituent un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_{30})$ de taille 30 de la loi de probabilité de X.
La variable aléatoire M_{30} moyenne de cet échantillon modélise alors le gain quotidien moyen.
À la main ou à l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X)=2{,}45$ et $\sigma(X)\approx 4{,}96$.
Par conséquent, $E(M_{30})=2{,}45$ et $\sigma(M_{30})\approx\frac{4{,}96}{\sqrt{30}}$, c'est-à-dire $\sigma(M_{30})\approx 0{,}91$.

14 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	10	20	30	40
$P(X=a)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

b) c) Voici le programme et un exemple d'exécution.

```
from random import *

def X(n):
    for i in range(n):
        r=random()
        d=1
        if r>=1/10 and r<3/10:
            d=2
        if r>=3/10 and r<6/10:
            d=3
        if r>=6/10:
            d=4
        print(d)
```

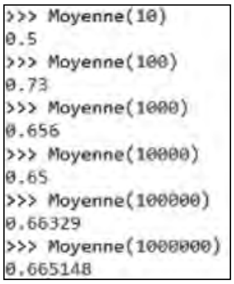
```
>>> X(8)
4
4
4
3
4
4
2
4
```

15 **1.** L'espérance de X est :

$$E(X)=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{6}\times 2=\frac{2}{3}.$$

2. a) Le rôle de cette fonction est de simuler la somme d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Voici des exemples d'exécutions pour des valeurs de n de plus en plus grandes. On observe que les valeurs obtenues se rapprochent de $\frac{2}{3}$.



```
>>> Moyenne(10)
0.5
>>> Moyenne(100)
0.73
>>> Moyenne(1000)
0.656
>>> Moyenne(10000)
0.65
>>> Moyenne(100000)
0.66329
>>> Moyenne(1000000)
0.665148
```

Acquérir des automatismes

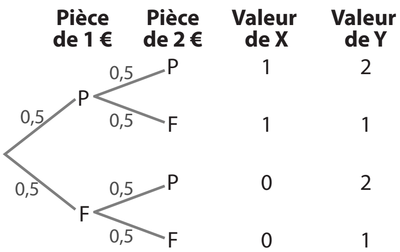
16 $X + Y$ peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.

17 a) $X + Y$ peut prendre $5 \times 12 = 60$ valeurs différentes.
b) $X + Y$ peut prendre $15 \times 6 = 90$ valeurs différentes.

18 a) $P(X + Y = 0) = P(\{X = 0\} \cap \{Y = 0\}) = 0{,}3$
b) $P(X + Y = 5) = P(\{X = 0\} \cap \{Y = 5\}) = 0{,}2$
c) $P(X + Y = 7) = P(\{X = 2\} \cap \{Y = 5\}) = 0{,}05$

19 a) $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 8 + 0{,}5 = 8{,}5$
b) $E(4Y) = 4E(Y) = 4 \times 0{,}5 = 2$
c) $E(X + 4Y) = E(X) + E(4Y) = 2 + 2 = 10$

20 a)



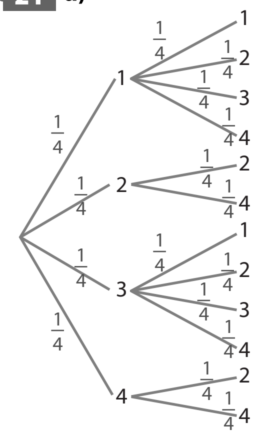
b)

Y / X	1	2
0	1 ; 0,25	2 ; 0,25
1	2 ; 0,25	3 ; 0,25

c) Voici la loi de probabilité de $X + Y$:

a	1	2	3
$P(X + Y = a)$	0,25	0,5	0,25

21 a)



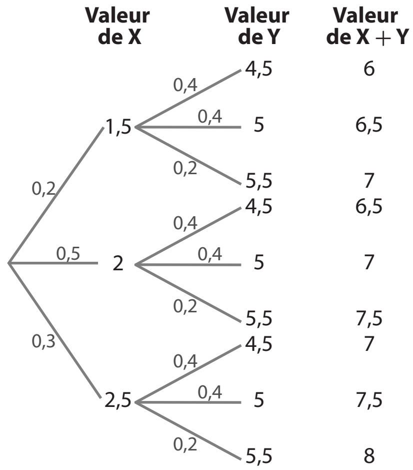
b)

Y / X	1	2	3	4
1	2 ; $\frac{1}{16}$	3 ; $\frac{1}{16}$	4 ; $\frac{1}{16}$	5 ; $\frac{1}{16}$
2	3 ; 0	4 ; $\frac{1}{8}$	5 ; 0	6 ; $\frac{1}{8}$
3	4 ; $\frac{1}{16}$	5 ; $\frac{1}{16}$	6 ; $\frac{1}{16}$	7 ; $\frac{1}{16}$
4	5 ; 0	6 ; $\frac{1}{8}$	7 ; 0	8 ; $\frac{1}{8}$

c) Voici la loi de probabilité de $X + Y$:

c	2	3	4	5	6	7	8
$P(X + Y = c)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

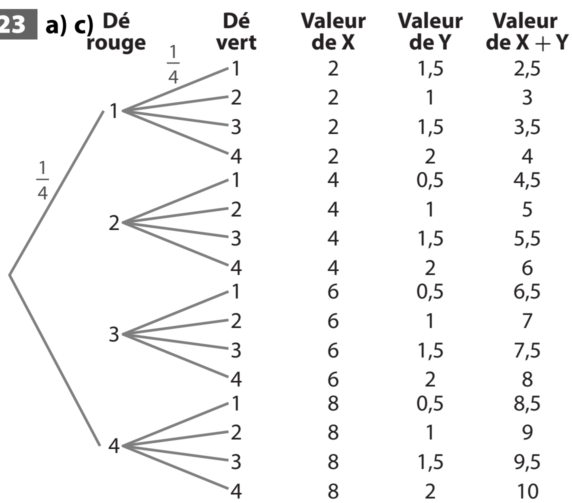
22 a)



b) La variable aléatoire $X + Y$ représente le prix total de l'ensemble boisson/sandwich.
Voici la loi de probabilité de $X + Y$.

a	6	6,5	7	7,5	8
$P(X = a)$	0,08	0,28	0,36	0,22	0,06

23 a) c)



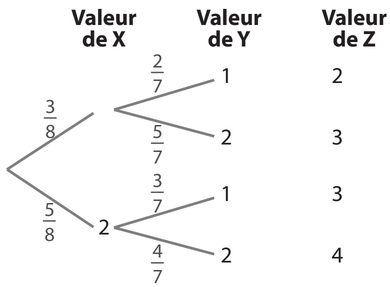
b) X est la variable égale à 2 fois le numéro obtenu avec le dé rouge et Y celle qui est égale à 0,5 fois le numéro obtenu avec le dé vert.

c) Loi de probabilité de Z :

c	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$P(X+Y=c)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
c	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
$P(X+Y=c)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

24 a) X est la variable aléatoire qui donne le montant de la première pièce et Y celle qui donne le montant de la deuxième pièce.

a)



c) Voici la loi de probabilité de Z :

a	2	3	4
$P(Z=a)$	$\frac{6}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{20}{56}$

25 a) X est la variable aléatoire qui correspond au fait de gagner ou non le bon d'achat de 5 € et Y celle qui correspond au fait de gagner ou non le bon d'achat de 10 €.

b) Loi de probabilité de X :

a	0	5
$P(X=a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Loi de probabilité de Y :

b	0	10
$P(Y=b)$	$\frac{38}{50}$	$\frac{12}{50}$

$E(X)=\frac{5}{2}$ et $E(Y)=\frac{120}{50}=\frac{12}{5}$

c) $E(Z)=E(X)+E(Y)=\frac{5}{2}+\frac{12}{5}=\frac{49}{10}$

26 a) X est la variable aléatoire qui donne le premier temps d'attente et Y celle qui donne le second temps d'attente.

b) $E(X)=2\times0{,}1+5\times0{,}22+7\times0{,}28$
$+10\times0{,}25+12\times0{,}15=7{,}56$

$E(Y)=2\times0{,}6+4\times0{,}25+6\times0{,}11+8\times0{,}04=6{,}18$

c) $E(Z)=E(X)+E(Y)=7{,}56+6{,}18=13{,}74$

Ali peut donc espérer attendre 13,74 minutes en moyenne, soit environ 13 minutes et 44 secondes.

27 a) $E(X)=10$

b) Y est la variable aléatoire qui représente la nouvelle note de Rayen.

$Y=1{,}2X$ donc $E(X)=1{,}2E(Y)=12$.

28 a) X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le dé, et $a=10$.

b) $E(X)=1\times\frac{1}{12}+\ldots+12\times\frac{1}{12}=\frac{13}{2}$

donc $E(Y)=10E(X)=65$.

29 a) $P(\{X=1\}\cap\{Y=2\})$

$=P(X=1)\times P(Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.

b) $P(\{X=1\}\cap\{Y=2\})$

$=P(X=1)\times P(Y=2)=0{,}2\times0{,}4=0{,}08$.

30 a) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)=25$

b) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)=6$

31 a) $V(aX)=a^2V(X)=4\times10=40$

b) $V(aX)=a^2V(X)=100\times5{,}2=520$

32 a) $E(X)=5\times0{,}2=1$

$V(X)=5\times0{,}2\times0{,}8=0{,}8$

b) $E(X)=10\times0{,}7=7$

$V(X)=10\times0{,}7\times0{,}3=2{,}1$

33 a) Loi de probabilité de X :

a	1	2	3	4
$P(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

La loi de probabilité de Y est la même que celle de X.

b) $P(\{X=1\}\cap\{Y=1\})$

$=P(X=1)\times P(Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

c)

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

34 a) Loi de probabilité de X :

a	0	2	5
$P(X=a)$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$

La loi de probabilité de Y est la même que celle de X.

b) $P(\{X=2\}\cap\{Y=5\})$

$=P(X=2)\times P(Y=5)=\frac{7}{20}\times\frac{8}{20}=\frac{7}{50}$

c)

X \ Y	0	2	5
	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{80}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{7}{80}$	$\frac{49}{400}$	$\frac{7}{50}$
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{4}{25}$

35 **a)** La loi de probabilité de Y est la même que celle de X.
b) $V(X) = V(Y) = 19816$
c) $V(X+Y) = V(X) + V(Y) = 39632$

36 **a)** $V(X) \approx 0{,}312$ et $V(Y) \approx 1{,}288$
c) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ donc $V(X+Y) \approx 1{,}6$.

37 **a)** X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le dé à 10 faces et Y celle qui donne le numéro obtenu avec le dé à 20 faces.
b) Pour tout entier a compris entre 1 et 10, $P(X = a) = \frac{1}{10}$.
Pour tout entier b compris entre 1 et 20, $P(Y = b) = \frac{1}{20}$.
c) $V(X) = 8{,}25$ et $V(Y) = 33{,}25$
d) $V(Z) = V(X) + V(Y) = 41{,}5$

38 **a)** $E(X) = 12{,}76$ et $V(X) = 20{,}1824$
$E(Y) = 34{,}9$ et $V(Y) = 49{,}49$
b) $E(Z) = V(X) + V(Y) = 47{,}66$
$V(Z) = V(X) + V(Y) = 69{,}6724$

39 **a)** $E(X) = 2{,}4$ et $V(X) = 10{,}44$
b) Y est la variable aléatoire qui donne la hauteur en pouces.
$Y = 0{,}4X$ donc $E(Y) = 0{,}4E(X) = 0{,}96$
et $V(Y) = 0{,}4^2 V(X) = 1{,}6704$.

40 **a)** $E(X) = 9{,}55$ et $V(X) = 22{,}7475$
b) $Y = 0{,}8X$ donc $E(Y) = 0{,}8E(X) = 7{,}64$
et $V(Y) = 0{,}8^2 V(X) = 14{,}5584$.

41 **a)** On répète 100 fois, de manière indépendante, une même expérience à deux issues. La probabilité du succès, « Obtenir Pile », est égale à 0,5.
Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}5$.
b) Le tableau de la loi de probabilité de X aurait 202 colonnes en tout.
c) $E(X) = 100 \times 0{,}5 = 50$. En moyenne, on peut espérer obtenir 50 fois Pile.
d) $V(X) = 100 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 25$ et donc $\sigma(X) = 5$.

42 **a)** Ces 20 morceaux constituent 20 répétitions indépendantes d'une même expérience à deux issues. La probabilité du succès, « Obtenir un morceau chanté », est égale à 0,8.
Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}8$.
b) $E(X) = 20 \times 0{,}8 = 16$. En moyenne, on peut espérer obtenir 16 morceaux chantés.
d) $V(X) = 20 \times 0{,}8 \times 0{,}2 = 3{,}2$ et donc $\sigma(X) \approx 1{,}79$.

43 **a)** Ces 50 passants constituent 50 répétitions indépendantes d'une même expérience à deux issues. La probabilité du succès, « Interroger une femme », est égale à 0,49.
Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}49$.
b) $E(X) = 50 \times 0{,}49 = 24{,}5$.
En moyenne, on peut espérer interroger 24,5 femmes.
c) $V(X) = 50 \times 0{,}49 \times 0{,}51 = 12{,}495$
et donc $\sigma(X) \approx 3{,}53$.

44 **a)** Ces 80 tentatives constituent 80 répétitions indépendantes d'une même expérience à deux issues. La probabilité du succès est égale à 0,75.
Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}75$.
b) $E(X) = 80 \times 0{,}75 = 60$. En moyenne, Léonard peut espérer réussir 60 fois.
d) $V(X) = 80 \times 0{,}75 \times 0{,}25 = 15$
et donc $\sigma(X) \approx 3{,}87$.

45 **a)** $E(S_n) = 100 \times 5 = 500$
$V(S_n) = 100 \times 25 = 2500$ donc $\sigma(S_n) = 50$.
b) $E(S_n) = 400 \times 12{,}5 = 5000$
$V(S_n) = 400 \times 9 = 3600$ donc $\sigma(S_n) = 60$.
c) $E(S_n) = 20 \times 12{,}4 = 248$
$V(S_n) = 20 \times 45 = 900$ donc $\sigma(S_n) = 30$.

46 **a) (3)** **b) (2)**

47 **a)** La taille de l'échantillon est $n = 10$.
b) $E(X) = 3{,}77$, $V(X) = 1{,}1971$ et $\sigma(X) \approx 1{,}09$.
c) $E(S_{10}) = 37{,}7$, $V(S_{10}) = 11{,}971$ et $\sigma(S_{10}) \approx 3{,}46$.

48 **a)** Pour tout entier a compris entre 1 et 8, $P(X = a) = \frac{1}{8}$.
b) $E(X) = 4{,}5$, $V(X) = 5{,}25$ et $\sigma(X) \approx 2{,}29$.
c) $E(S_{20}) = 90$, $V(S_{20}) = 105$ et $\sigma(S_{20}) \approx 10{,}25$.

49 **a)** $E(X) = 60{,}09$, $V(X) = 1{,}7619$ et $\sigma(X) \approx 1{,}33$.
b) $E(M_{40}) = 60{,}09$, $V(M_{40}) \approx 0{,}044$
et $\sigma(M_{40}) \approx 0{,}209$.

50 **a)** $E(X) = 2,15$, $V(X) = 1,4475$ et $\sigma(X) \approx 1,2$.
b) $E(M_{100}) = 2,15$, $V(M_{100}) \approx 0,014$
et $\sigma(M_{100}) \approx 0,12$.

Pour se tester

51 **1.** B **2.** C **3.** B **4.** D **5.** B

52 **1.** A, B, C **2.** B, C **3.** C **4.** A, D

53 **1. Faux.** En effet, si on note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second, alors

$$P(Z = 10) = P(X = 4) \times P(Y = 6) + P(X = 5) \times P(Y = 5) + P(X = 6) \times P(Y = 4)$$

Donc $P(Z = 10) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$

2. Vrai. En effet, les variables X et Y sont indépendantes donc $P(\{X = 4\} \cap \{X = 6\})$
$= P(X = 4) \times P(Y = 6) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

3. Vrai. En effet, les paramètres de cette loi binomiale sont $n = 12$ et $p = 0,3$ donc $E(X) = 12 \times 0,3 = 3,6$.

4. Faux. En effet, l'écart-type de la somme S_{50} est égal à $\sqrt{50}\sigma(X)$ et $\sqrt{50} \neq 7$.

S'entraîner

54 **(1)** $E(Z) = 1 \times b = b$
$V(Z) = (b - b)^2 \times 1 = 0$
(2) $E(aX) = aE(X)$ et $V(aX) = a^2V(X)$
(3) $E(Y) = E(aX + Z) = E(aX) + E(Z)$
donc $E(X) = aE(X) + b$
Les variables aX et Z sont indépendantes
donc $V(Y) = V(aX + Z) = V(aX) + V(Z)$,
donc $V(Y) = aV(X)$.
(4) Si a et b sont deux nombres réels et X est une variable aléatoire, alors la variable aléatoire $Y = aX + b$ vérifie $E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2V(X)$.

55 **a)** X et Y sont indépendantes, donc pour tous nombres a_i et b_j,
$P(X + Y = a_i + b_j) = P(X = a_i) \times P(Y = b_j)$
$P(X + Y = a_i + b_j) = p_i q_j$
b) Pour tout entier i,

$$\sum_{j=1}^{2} a_i p_i q_j + b_j p_i q_j = \sum_{j=1}^{2} a_i p_i q_j + \sum_{j=1}^{2} b_j p_i q_j$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_i p_i q_j + b_j p_i q_j = a_i p_i \sum_{j=1}^{2} q_j + p_i \sum_{j=1}^{2} b_j q_j$$

Or $\sum_{j=1}^{2} q_j = 1$ et $\sum_{j=1}^{2} b_j q_j = E(Y)$

Donc $\sum_{j=1}^{2} a_i p_i q_j + b_j p_i q_j = a_i p_i + p_i E(Y)$

On obtient ainsi les deux premières expressions.
Puis, $\sum_{i=1}^{3} a_i p_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, ce qui donne la dernière expression.

56 **a)** Les variables aléatoires 2X et X + X ne sont pas égales. En effet, elles ne prennent pas les mêmes valeurs. 2X prend comme valeurs les doubles des valeurs de X, alors que X + X prend comme valeurs toutes les sommes possibles de deux valeurs prises par X.
b) $V(2X) = 2^2 V(X) = 4 \times 20,25 = 81$

57 **Parcours 1**
X est la variable aléatoire qui donne le résultat obtenu avec la première roue.
Voici la loi de probabilité de X :

a	2	5	10	20
$P(X = a)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ainsi $E(X) = 7$ et $V(X) = 33,75$.
Z est la variable aléatoire qui donne le résultat obtenu avec la seconde roue.
Voici la loi de probabilité de Y :

b	0	15	30
$P(Y = b)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi $E(Y) = 15$ et $V(Y) = 75$.
Z est la variable aléatoire qui donne la somme des nombres obtenus. $Z = X + Y$, et X et Y sont indépendantes, donc :
$E(Z) = E(X) + E(Y) = 22$
$V(Z) = V(X) + V(Y) = 108,75$

Parcours 2
a) X est la variable aléatoire qui donne le résultat obtenu sur la bande du haut, Y celle qui donne le résultat obtenu sur la bande du bas.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	2	5	10	20
$P(X=a)$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$

Voici la loi de probabilité de Y :

b	0	5	25
$P(Y=b)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$

c) $E(X)=\frac{58}{13}$ et $V(X)\approx 31{,}33$.

$E(X)=\frac{70}{12}=\frac{35}{6}$ et $V(X)\approx 78{,}47$.

d) Z=X+Y, et X et Y sont indépendantes, donc :

$E(Z)=E(X)+E(Y)=\frac{803}{78}$

$V(Z)=V(X)+V(Y)$ donc $V(Z)\approx 109{,}8$.

58 **a)**

A \ N	20	30	40	50	60	Total
40	1	2	0	1	0	**4**
50	3	4	5	3	2	**17**
60	3	4	2	6	5	**20**
70	2	1	3	2	1	**9**
Total	**9**	**11**	**10**	**12**	**8**	**50**

Voici la loi de probabilité de X :

a	40	50	60	70
$P(X=a)$	$\frac{4}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{20}{50}$	$\frac{9}{50}$

Voici la loi de probabilité de Y :

b	20	30	40	50	60
$P(Y=b)$	$\frac{9}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{10}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{8}{50}$

$E(X)=56{,}8$ et $E(Y)=39{,}8$

b) $E(Z)=E(X)+E(Y)=96{,}6$

59 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

k	$P(X=k)$
1	0,015
2	0,045
3	0,09
4	0,134
5	0,161
6	0,161
7	0,138
8	0,103
9	0,069
10	0,041
11	0,023
12	0,011

Voici la loi de probabilité de Y :

m	$P(Y=m)$
3	0,008
4	0,019
5	0,038
6	0,063
7	0,09
8	0,113
9	0,125
10	0,125
11	0,114
12	0,095
13	0,073
14	0,052
15	0,035
16	0,022
17	0,013
18	0,007

b) X et Y sont indépendantes donc

$P(\{X=5\}\cap\{Y=10\})=P(X=5)\times P(Y=10)$

$P(\{X=5\}\cap\{Y=10\})\approx 0{,}161\times 0{,}125$

$P(\{X=5\}\cap\{Y=10\})\approx 0{,}02$

c) La probabilité cherchée est la somme des probabilités suivantes :

$P(\{X=1\}\cap\{Y=4\})\approx 0{,}0003$

$P(\{X=2\}\cap\{Y=8\})\approx 0{,}0051$

$P(\{X=3\}\cap\{Y=12\})\approx 0{,}0086$

$P(\{X=4\}\cap\{Y=16\})\approx 0{,}0029$

On en déduit que la probabilité cherchée est environ égale à 0,0169.

d) $E(X)\approx 6$ et $V(X)\approx 6$.

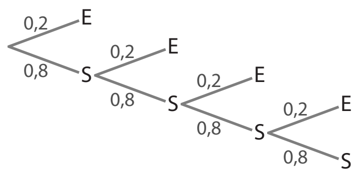
$E(Y)\approx 10$ et $V(Y)\approx 10$.

$Z=X+Y$, et X et Y sont indépendantes, ainsi

$E(Z)=E(X)+E(Y)$ donc $E(Z)\approx 16$

$V(Z)=V(X)+V(Y)$ donc $V(Z)\approx 16$.

60 **1. a)** Dans cet arbre, S symbolise un succès et E symbolise un échec.



Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2	3	4
$P(X=a)$	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

c) $E(X)=2{,}3616$ et $V(X)\approx 2{,}57$.

2. a) X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'énigmes résolues le premier jour et Y celle qui donne le nombre d'énigmes résolues le deuxième jour.

b) La loi de probabilité de X est donnée à la question **1. b)**. La loi de probabilité de Y est la même que celle de X.

c) $Z = X + Y$, et X et Y sont indépendantes, ainsi $E(Z) = E(X) + E(Y) = 4{,}7232$

$V(Z) = V(X) + V(Y)$ donc $V(Z) \approx 5{,}14$.

61 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2	3
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b) $E(X) = 1{,}5$ et $V(X) = 1{,}25$.

c) Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}5$.

d) $E(Y) = 1{,}5$ et $V(X) = 0{,}75$.

e) Les espérances sont égales mais pas les variances. Donc l'affirmation d'Alexandre est fausse.

62 **1. a)** On effectue des tirages avec remise, donc toutes les variables aléatoires X_i ont la même loi, que voici :

k	10	20
$P(X_i = k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Ainsi, $E(X_i) = \frac{40}{3}$.

b) $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ donc $E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = \frac{400}{3}$.

2. a) On gagne forcément 10 € à chaque tirage, donc 100 € en 10 tirages. Chaque boule jaune tirée fait gagner 10 € de plus, et Y est le nombre de boules rouges tirées, donc $X = 10Y + 100$.

b) Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$, donc $E(Y) = \frac{10}{3}$.

c) $E(X) = E(10Y + 100) = 10E(Y) + 100$

$E(X) = \frac{100}{3} + 100 = \frac{400}{3}$.

63 **a)** X est la variable aléatoire qui donne le nombre de parties gagnées au premier jeu et Y celle qui donne le nombre de parties gagnées au second jeu.

b) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}8$.

Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}2$.

c) $E(X) = 8$ et $V(X) = 1{,}6$.

$E(Y) = 1{,}6$ et $V(Y) = 1{,}28$.

c) $Z = X + Y$, et X et Y sont indépendantes, ainsi $E(Z) = E(X) + E(Y) = 9{,}6$

et $V(Z) = V(X) + V(Y) = 2{,}88$.

64 **Parcours 1**

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu pour un lancer de dé.

$E(X) = 4{,}64$ et $\sigma(X) \approx 1{,}47$.

On en déduit :

$E(M_{100}) = E(X) = 4{,}64$ et $\sigma(M_{100}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{100}}$

donc $\sigma(M_{100}) \approx 0{,}147$.

Parcours 2

a) X est la variable aléatoire qui donne le nombre renvoyé lors d'une exécution.

b) $E(X) = 2{,}25$ et $\sigma(X) \approx 1{,}51$.

c) $E(M_{200}) = E(X) = 2{,}24$

$\sigma(M_{200}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{200}}$ donc $\sigma(M_{200}) \approx 0{,}107$.

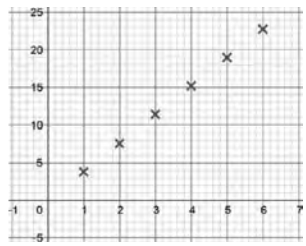
65 **1.** $E(X) = 3{,}79$ et $\sigma(X) \approx 1{,}34$.

2. On peut considérer une playlist de 20 morceaux comme un échantillon de taille $n = 20$ de la loi de probabilité de X.

La durée totale d'une telle playlist est alors donnée par la variable aléatoire somme S_{20}.

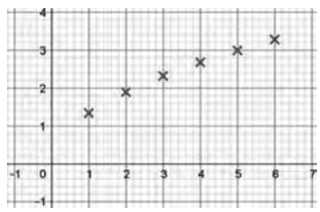
$E(S_{20}) = 20E(X) = 75{,}8$ et $\sigma(S_{20}) = \sqrt{20}\sigma(X)$ donc $\sigma(S_{20}) \approx 6$.

3. a) $E(S_n) = nE(X)$ et $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\,\sigma(X)$.



Il s'agit d'une relation linéaire.

b)



Il s'agit d'une relation quadratique, les points sont sur une courbe qui rappelle celle de la fonction racine carrée.

66 **a)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}2$.

b) $P(X = 10) \approx 0{,}107$

c) $P(X \geqslant 10) \approx 0{,}268$

d) $E(X) = 8$ et $\sigma(X) \approx 2{,}53$.

e) Les 52 numéros constituent un échantillon de taille 52 de la loi de probabilité de X. Le nombre total de pages publicitaires est donc donné par la variable aléatoire somme S_{52}.

$E(S_{52}) = 52E(X) = 416$ et $\sigma(S_{52}) = \sqrt{52}\sigma(X)$ donc $\sigma(S_{52}) \approx 18{,}24$.

67 **a)** On note p la probabilité que le train arrive avec 5 minutes de retard. Voici alors la loi de probabilité de X :

a	0	2	5
$P(X = a)$	$2p$	$2p$	p

La somme des probabilités est égale à 1, donc $2p + 2p + p = 5$, ce qui donne $p = 0{,}2$.

Voici donc la loi de probabilité de X :

a	0	2	5
$P(X = a)$	0,4	0,4	0,2

b) $E(X) = 1{,}8$ et $\sigma(X) \approx 1{,}83$.

c) Les 20 jours constituent un échantillon de taille 20 de la loi de probabilité de X. Le retard moyen est donc donné par la variable aléatoire moyenne M_{20}.

$E(M_{20}) = E(X) = 1{,}8$ et $\sigma(M_{20}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{20}}$
donc $\sigma(M_{20}) \approx 0{,}409$.

68 **a)** $X = 0$ quand on tire autant de boules rouges que de boules vertes. C'est le cas si on tire 1 boule de chaque couleur.

Ainsi,
$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{30}{120}.$$

$X = 1$ quand on tire deux boules rouges et une boule verte ou bien deux boules vertes et une boule rouge, ou encore si on tire une boule rouge et deux boules noires, une boule verte et deux boules noires. Ainsi,
$$P(X = 1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1} + \binom{3}{1}\binom{5}{2} + \binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{5}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{53}{120}.$$

b) $X = 2$ quand on tire deux boules rouges et une boule noire ou bien deux boules vertes et une boule noire. Ainsi,
$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1} + \binom{5}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{26}{120}.$$

Il reste donc seulement à calculer la probabilité de l'événement $\{X = 3\}$, qui est
$$P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3} + \binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{11}{120}.$$

Voici donc la loi de probabilité de X :

a	0	1	2	3
$P(X = a)$	$\frac{30}{120}$	$\frac{53}{120}$	$\frac{26}{120}$	$\frac{11}{120}$

c) $E(X) = 1{,}15$ et $\sigma(X) \approx 0{,}9$.

d) Les 100 répétitions constituent un échantillon de taille 100 de la loi de probabilité de X. La différence moyenne est donc donnée par la variable aléatoire moyenne M_{100}.

$E(M_{100}) = E(X) = 1{,}15$ et $\sigma(M_{100}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{100}}$
donc $\sigma(M_{100}) \approx 0{,}09$.

69 **a)** A et E, B et F, C et D.

b) La seule implication vraie est celle que l'on a vu dans le cours, la A.

70 **a)** Si X est une loi binomiale de paramètres n et p, alors X prend toutes les valeurs de 0 à n. Alors 2X prend comme valeurs uniquement les nombres entiers pairs entre 0 et $2n$. Elle ne peut donc pas prendre la valeur 1, et ne suit donc pas une loi binomiale.

b) L'écart-type de la somme S_n de l'échantillon est $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$. Il est donc bien modifié quand on augmente la taille n de l'échantillon.

c) L'écart-type de la moyenne M_n de l'échantillon est $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$. Quand on augmente la taille n de l'échantillon, la valeur de $\sqrt{n}$ augmente, et donc la valeur de $\sigma(M_n)$ diminue.

71 **1.a)** Réalisation de la feuille de calcul.

b) On observe que la moyenne des moyennes est proche de 3,5 et que l'écart-type des moyennes est proche de 0,5, avec des écarts pouvant dépasser 0,1.

2. a) On observe que la moyenne des moyennes est proche de 3,5 et que l'écart-type des moyennes est proche de 0,17, avec des écarts qui dépassent rarement 0,03.

b) On observe que la moyenne des moyennes est proche de 3,5 et que l'écart-type des moyennes est proche de 0,05, avec des écarts qui dépassent rarement 0,01.

2. a) $E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(X) \approx 1{,}71$

b) $E(M_{10}) = E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(M_{10}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{10}}$
donc $\sigma(M_{10}) \approx 0{,}54$.

c) $E(M_{100}) = E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(M_{100}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{100}}$
donc $\sigma(M_{100}) \approx 0{,}171$.

$E(M_{1000}) = E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(M_{1000}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{1000}}$
donc $\sigma(M_{1000}) \approx 0{,}054$.

d) Les résultats théoriques sont proches des valeurs obtenues par simulation.

72 **1. a)** Dans la ligne 5, on attribue à la variable p un nombre aléatoire, qui vaut 0 ou 1 de manière équiprobable. Dans la ligne 7, on fait la même chose pour la variable r.

b) Tableau de suivi des variables :

s	1	2	3	4	4	5	6	6	7	7
p	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
r	1	0	1	1	0	1	1	0	0	

c) La variable s compte le nombre de séries.

d) On peut par exemple obtenir 5.

e) Voici la nouvelle fonction Python :

```
from random import *

def MoyenneSeries():
    t=0
    for i in range(1000):
        s=1
        p=int(random()+0.5)
        for i in range(9):
            r=int(random()+0.5)
            if r!=p:
                s=s+1
            p=r
        t=t+s
    t=t/1000
    return t
```

On conjecture que l'espérance du nombre de séries en 10 lancers est 5,5.

2. a) Chaque variable X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,5.

b) $E(X_i) = 0{,}5$

c) On a forcément 1 série en 10 lancers, qui commence au premier lancer. Puis, chaque fois qu'un lancer donne un résultat différent du précédent, on ajoute 1 au nombre de séries.

Ainsi, $S_{10} = 1 + X_2 + \ldots + X_{10}$

d) $E(S_{10}) = 1 + E(X_2) + \ldots + E(X_{10})$

$E(S_{10}) = 1 + 9 \times 0{,}5 = 5{,}5$

3. a) Voici la nouvelle fonction Python.

```
from random import *

def MoyenneSeries(n):
    t=0
    for i in range(1000):
        s=1
        p=int(random()+0.5)
        for i in range(n-1):
            r=int(random()+0.5)
            if r!=p:
                s=s+1
            p=r
        t=t+s
    t=t/1000
    return t
```

b) On conjecture que l'espérance est égale à $\dfrac{n+1}{2}$.

c) On reprend les notations de la question 2.

$S_n = 1 + X_2 + \ldots + X_n$.

$E(S_n) = 1 + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$

$E(S_n) = 1 + (n-1) = \dfrac{n+1}{2}$

73 **Méthode 1**

$E(X) = 1 \times \dfrac{1}{10} + 2 \times \dfrac{1}{10} + \ldots + 10 \times \dfrac{1}{10}$

$E(X) = \dfrac{1 + 2 + \ldots + 10}{10}$

$E(X) = \dfrac{(10+1)10}{20} = 5{,}5$ et de même $E(Y) = 5{,}5$.

Donc $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 11$.

Méthode 2

Voici la loi de probabilité de $X + Y$:

c	$P(X+Y=c)$
2	$\frac{1}{100}$
3	$\frac{2}{100}$
4	$\frac{3}{100}$
5	$\frac{4}{100}$
6	$\frac{5}{100}$
7	$\frac{6}{100}$
8	$\frac{7}{100}$
9	$\frac{8}{100}$
10	$\frac{9}{100}$
11	$\frac{10}{100}$
12	$\frac{9}{100}$
13	$\frac{8}{100}$
14	$\frac{7}{100}$
15	$\frac{6}{100}$
16	$\frac{5}{100}$
17	$\frac{4}{100}$
18	$\frac{3}{100}$
19	$\frac{2}{100}$
20	$\frac{1}{100}$

On retrouve bien $E(X+Y) = 11$.

74 X est la variable qui donne le temps pour le premier niveau, et Y celle qui donne le temps pour le second niveau.

L'espérance de X est $E(X) = 3{,}29$.

Pour faire mieux que le record mondial, il faut que Y vérifie $E(X) + E(Y) \leqslant 7$, c'est-à-dire $E(Y) \leqslant 3{,}71$, ce qui signifie que l'espérance de son temps pour le deuxième niveau doit être inférieure à 3,71 minutes.

75 X est la variable aléatoire qui donne le bilan financier pour un jour pris au hasard.

$E(X) = 6{,}67$.

Pour un échantillon de n jours, l'espérance de la somme des bilans financiers quotidiens est $E(S_n) = 6{,}67n$ en centaines d'euros.

On doit donc résoudre l'inéquation $6{,}67n \geqslant 100$.

On obtient qu'il faut en moyenne 15 jours.

76 **a)** X est la variable aléatoire qui, pour un votant tiré au hasard, vaut 1 s'il compte voter pour ce candidat et 0 sinon. X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}52$. Ainsi, $\sigma(X) \approx 0{,}5$.

Donc pour les échantillons de taille 1 000, l'écart-type du pourcentage est $\sigma = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{1000}}$, ce qui donne $\sigma \approx 0{,}016$.

Pour diviser cet écart-type par 2, il faut multiplier la taille de l'échantillon par 4.

En effet, on obtient alors $\sigma' = \dfrac{0{,}5}{\sqrt{4\,000}} = \dfrac{\sigma}{2}$.

77 Voici la fonction Python.

```
def LoiConjointe(L,M):
    n=len(L)
    r=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(r):
            p=L[i]*M[j]
            print(p)
    return
```

78 On note p et q les probabilités respectives d'obtenir 1 et 6.

La somme des probabilités est égale à 1, donc $p + \dfrac{4}{6} + q = 1$, ce qui donne $q = \dfrac{1}{3} - p$.

Puisque l'espérance pour des échantillons de 100 lancers est proche de $\dfrac{1100}{3}$, on peut considérer que l'espérance est égale à $\dfrac{11}{3}$.

Par conséquent :

$$p + \frac{2+3+4+5}{6} + 6q = \frac{11}{3}$$

$$p + \frac{7}{3} + \frac{6}{3} - 6p = \frac{11}{3}$$

$$-5p = -\frac{2}{3}$$

$$p = \frac{2}{15}$$

et on en déduit $q = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{15} = \dfrac{1}{5}$.

79 **a)** Chaque variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$. Donc $E(X_i) = \dfrac{1}{n}$.

b) X est la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui retrouvent leur propre chapeau.

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

donc $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$,

ce qui donne $E(X) = n \times \dfrac{1}{n} = 1$.

Cela signifie que, en moyenne, une personne retrouve son chapeau.

80 L'écart-type pour un ticket est $\sigma \approx 3{,}74$. On peut considérer un ensemble de n tickets comme un échantillon de taille n. L'écart-type du gain moyen dans de ces échantillons est $\dfrac{3{,}74}{\sqrt{n}}$.

On cherche donc n tel que :

$$\frac{3{,}74}{\sqrt{n}} \leqslant 0{,}1$$

$$\sqrt{n} \geqslant \frac{3{,}74}{0{,}1}$$

$$\sqrt{n} \geqslant 37{,}4$$

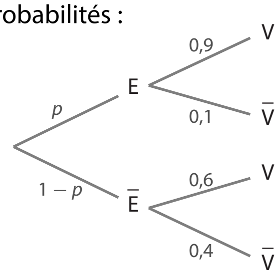
$$n \geqslant 1398{,}76$$

Il faut donc au moins 1 399 tickets.

Objectif BAC

81 **Partie A**

1. Arbre de probabilités :



2. D'après la formule des probabilités totales,

$P(V) = p \times 0{,}9 + (1 - p) \times 0{,}6$

$P(V) = 0{,}9p + 0{,}6 - 0{,}6p$

$P(V) = 0{,}3p + 0{,}6$

3.**a)** $P(V) = 0{,}675$ donc $0{,}3p + 0{,}6 = 0{,}675$, ce qui donne $0{,}3p = 0{,}075$, donc $p = 0{,}25$.

b) On doit calculer la probabilité :

$$P_V(E) = \frac{P(V \cap E)}{P(V)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}9}{0{,}675} = \frac{1}{3}.$$

Partie B

1. a) La somme des probabilités est égale à 1, donc $0{,}23 + p_1 + 0{,}21 + 0{,}14 + p_2 = 1$, ce qui donne $p_1 + p_2 = 0{,}42$.

De plus, d'après l'énoncé, $p_1 = 2p_2$. Par conséquent, $3p_2 = 0,42$, ce qui donne $p_2 = 0,14$ et $p_1 = 0,28$.
b) $E(X) = 7,42$ et $V(X) \approx 0,112$.
2. L'espérance du temps de trajet total est $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 4,7232$.
X et Y sont indépendantes, donc la variance du temps de trajet total est $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, ce qui donne $V(X+Y) \approx 0,532$.

82 **Partie A**
1. La probabilité de gagner un bon d'achat de 10 € est $0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,1 = 0,31$.
Les paramètres de la loi de X sont donc $n = 100$ et $p = 0,31$.
2. $P(X = 30) \approx 0,084767$
3. $P(X \leqslant 20) \approx 0,009658$
4. $P(X \geqslant 50) \approx 0,000057$
5. Le nombre moyen de clients recevant un bon d'achat sur 100 clients est l'espérance de X, $E(X) = 100 \times 0,31 = 31$. Le montant moyen de la somme totale distribuée est donc 310 €.
Ainsi, le budget prévu n'est pas suffisant.

Partie B
1. Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2	…	50
$P(X = a)$	0,5	1	…	25

Voici la loi de probabilité de Y :

b	0	50
$P(Y = b)$	0,9	0,1

2. $E(X) = 25,5$ et $V(X) = 208,25$.
$E(Y) = 5$ et $V(X) = 225$.
3. La somme des montants gagnés est donnée par la variable aléatoire somme $X + Y$. Donc l'espérance de cette somme est $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 30,5$.
X et Y sont indépendantes, donc la variance de la somme des montants gagnés est $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, ce qui donne $V(X+Y) = 433,25$.

83 **1. a)** X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,4$.
b) $P(X \geqslant 20) \approx 0,13$
c) $E(X) = 16$ et $\sigma(X) \approx 3,1$.
2. a) $E(M_n) = E(X) = 16$ et $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \dfrac{3,1}{\sqrt{n}}$.
b) Le nombre n doit vérifier :
$$\frac{3,1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,5$$
$$\sqrt{n} \geqslant \frac{3,1}{0,5}$$
$$\sqrt{n} \geqslant 6,2$$
$$n \geqslant 38,44$$
La valeur minimale de n est donc 39.

84 **a)** Quelques exemples de situations où interviennent des lois binomiales :
– Lancer une pièce de monnaie.
– Prendre le train plusieurs fois et compter le nombre de retard.
– Répondre au hasard aux questions d'un QCM avec une seule réponse exacte par question.
Une variable aléatoire qui suit une loi binomiale est la somme de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli.

85 **a)** X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le premier dé. On note p la probabilité d'obtenir la face 1. Alors la loi de probabilité de X est :

a	1	2	3	4	5	6
$P(X = a)$	p	p	p	$2p$	$2p$	$2p$

La somme des probabilités est égale à 1, donc
$$p + p + p + 2p + 2p + 2p = 1$$
$$9p = 1$$
$$p = \frac{1}{9}$$
Donc la loi de probabilité de X est :

a	1	2	3	4	5	6
$P(X = a)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

Y est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec le premier dé. On note q la probabilité d'obtenir la face 1. Alors la loi de probabilité de Y est :

b	1	2	3	4	5	6
$P(Y = b)$	q	q	$2q$	$2q$	$3q$	$3q$

La somme des probabilités est égale à 1, donc
$$q + q + 2q + 2q + 3q + 3q = 1$$
$$12q = 1$$
$$q = \frac{1}{12}$$
Donc la loi de probabilité de Y est :

b	1	2	3	4	5	6
$P(Y = b)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$

B $E(X) = 4$ et $V(X) \approx 4,17$.
$E(Y) = \dfrac{25}{6}$ et $V(X) \approx 2,47$.
3. La somme des deux dés est donnée par la variable aléatoire somme $X + Y$.
Donc l'espérance de cette somme est :
$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \dfrac{49}{6}$.
X et Y sont indépendantes, donc la variance du temps de trajet total est $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, ce qui donne $V(X+Y) \approx 6,64$.

86 **a)** Vrai. En effet, à chaque tirage on pioche trois pièces de 1 € et/ou 2 €, et ainsi obtenir tous les montants entiers de 3 à 6.
b) Faux. En effet, on ne sait pas s'il y a remise entre les deux tirages.
c) Vrai. En effet, cette propriété est toujours vraie pour deux variables aléatoires X et Y.
d) Faux. En effet, cette propriété n'est vraie que si X et Y sont indépendantes, et l'énoncé ne permet pas de l'affirmer.

Pour aller plus loin

87 **Partie A**

1. a) Loi de probabilité de X :

a	1	2
$P(X = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Loi de probabilité de Y :

b	1	4	10
$P(Y = b)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

b) Espérance de X :

$E(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{3}{2}$.

Espérance de Y :

$E(Y) = \frac{3}{6} \times 1 + \frac{2}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 10 = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

2. a)

X \ Y	1	4	10
1	1	4	10
2	2	8	20

b)

X \ Y	1	4	10
1	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

c) Voici la loi de probabilité de XY :

c	1	2	4	8	10	20
$P(XY = c)$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

d) $E(XY) = \frac{3}{12} \times 1 + \frac{3}{12} \times 2 + \frac{2}{12} \times 4 + \frac{2}{12} \times 8 + \frac{1}{12} \times 10 + \frac{1}{12} \times 20 = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$

e) $\frac{21}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{2}$

donc on peut conjecturer que $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

Partie B

1. $E(X) = a_1p_1 + a_2p_2$
$E(Y) = b_1q_1 + b_2q_2$

2. a) XY prend les valeurs a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1 et $a_2 + b_2$.
b) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et donc $P(\{X = a\} \cap \{Y = b\}) = P(X = a) \times P(Y = b)$.
c) Voici la loi de probabilité de XY :

c	a_1b_1	$a_1 + b_2$	$a_2 + b_1$	$a_2 + b_2$
$P(XY = c)$	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

d) $E(XY) = (a_1b_1)p_1q_1 + (a_1b_2)p_1q_2 + (a_2b_1)p_2q_1 + (a_2b_2)p_2q_2$
$E(XY) = a_1b_1p_1q_1 + a_1b_2p_1q_2 + a_2b_1p_2q_1 + a_2b_2p_2q_2$
e) $E(X) \times E(Y) = (a_1p_1 + a_2p_2)(b_1q_1 + b_2q_2)$
$E(X) \times E(Y) = a_1b_1p_1q_1 + a_1b_2p_1q_2 + a_2b_1p_2q_1 + a_2b_2p_2q_2$
On constate que $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.

Partie B

1. $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$
2. a) X^2 prend les valeurs 1 et 4
b) Y^2 prend les valeurs 1, 16, et 100.
c) $X + Y$ prend les valeurs 2, 3, 5, 6, 11, et 12.
d) $(X + Y)^2$ prend les valeurs 4, 9, 25, 36, 121, et 144.
e) XY prend les valeurs 1, 2, 4, 8, 10 et 20.
3. $V(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2$
4. $E((X + Y)^2) = E(X^2 + 2XY + Y^2)$
$E((X + Y)^2) = E(X^2) + E(2XY) + E(Y^2)$
$E((X + Y)^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$
$E((X + Y)^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$
$E((X + Y)^2) = E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2)$
5. $(E(X + Y))^2 = (E(X) + E(Y))^2$
$(E(X + Y))^2 = E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2$
6. $V(XY) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2$
$V(XY) = E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - (E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y)^2)$
$V(X + Y) = E(X^2) - E(X)^2 + E(Y^2) - E(Y)^2$
$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
7. On a bien démontré la formule :
$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

88 **1. a)** On obtient la loi de probabilité de X en additionnant les probabilités dans chaque colonne :

a	1	3	5
$P(X = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

De même, On obtient la loi de probabilité de Y en additionnant les probabilités dans chaque ligne :

b	0	2	4
$P(Y = b)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

b) $P(X = 1) \times P(Y = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

et $P(\{X=1\}\cap\{Y=0\})=\frac{1}{8}$.

Les deux probabilités sont égales.

c) $P(X=1)\times P(Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

et $P(\{X=1\}\cap\{Y=2\})=\frac{1}{12}$.

$P(X=1)\times P(Y=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

et $P(\{X=1\}\cap\{Y=4\})=\frac{1}{12}$.

$P(X=3)\times P(Y=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

et $P(\{X=3\}\cap\{Y=0\})=\frac{1}{4}$.

$P(X=3)\times P(Y=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

et $P(\{X=3\}\cap\{Y=2\})=\frac{1}{6}$.

$P(X=3)\times P(Y=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

et $P(\{X=3\}\cap\{Y=4\})=\frac{1}{12}$.

$P(X=5)\times P(Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

et $P(\{X=5\}\cap\{Y=0\})=\frac{1}{8}$.

$P(X=5)\times P(Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

et $P(\{X=5\}\cap\{Y=2\})=\frac{1}{12}$

$P(X=5)\times P(Y=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

et $P(\{X=5\}\cap\{Y=4\})=\frac{1}{24}$.

d) On obtient à chaque fois des probabilités égales, donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

2. a) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	5
$P(X=a)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Voici la loi de probabilité de Y :

b	10	20
$P(Y=b)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$P(X=0)\times P(Y=10)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{32}$

et $P(\{X=0\}\cap\{Y=10\})=\frac{1}{4}$ donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	10
$P(X=a)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Voici la loi de probabilité de Y :

b	0	4
$P(Y=b)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

On vérifie que $P(X=a)\times P(Y=b)$ et $P(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$ sont égaux pour tous les couples $(a\,;b)$ possibles.

Par conséquent, les variables X et Y sont indépendantes.

c) Voici la loi de probabilité de X :

a	5	10
$P(X=a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Voici la loi de probabilité de Y :

b	1	2	3
$P(Y=b)$	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{5}$

$P(X=5)\times P(Y=1)=\frac{1}{4}\times\frac{7}{20}=\frac{7}{80}$

et $P(\{X=5\}\cap\{Y=1\})=\frac{1}{20}$ donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

d) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	2
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

Voici la loi de probabilité de Y :

b	0	1	2
$P(Y=b)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$

$P(X=0)\times P(Y=0)=\frac{1}{6}\times\frac{7}{24}=\frac{7}{144}$

et $P(\{X=0\}\cap\{Y=0\})=\frac{1}{16}$ donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

e) Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1
$P(X=a)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$

Voici la loi de probabilité de Y :

b	0	1	2
$P(Y=b)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

On vérifie que $P(X=a)\times P(Y=b)$ et $P(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$ sont égaux pour tous les couples $(a\,;b)$ possibles. Par conséquent, les variables X et Y sont indépendantes.

89 **a)** Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2
$P(X=a)$	0,5	0,5

Voici la loi de probabilité de Y :

b	1	2	3
$P(Y=b)$	0,2	0,5	0,3

$P(X=1)\times P(Y=2)=0{,}5\times 0{,}5=0{,}25$

et $P(\{X=1\}\cap\{Y=2\})=0{,}2$ donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

b) Voici la loi de probabilité de X :

a	1	2
$P(X=a)$	0,5	0,5

Voici la loi de probabilité de Y :

b	1	2	3
$P(Y=b)$	0,2	0,5	0,3

On vérifie que $P(X=a)\times P(Y=b)$ et $P(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$ sont égaux pour tous les couples $(a\,;b)$ possibles.

Par conséquent, les variables X et Y sont indépendantes.

On observe que les lois de probabilités obtenues pour X et pour Y sont les mêmes dans les deux cas, mais que dans **a)** les variables ne sont pas indépendantes, alors que dans **b)** elles le sont.

90 X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Si $p=0{,}4$, alors $\sigma(X)\approx 0{,}49$.

Donc pour les échantillons de taille n, l'écart-type du pourcentage est $\sigma\approx\dfrac{0{,}49}{\sqrt{n}}$.

On veut que n vérifie :

$$\frac{0{,}49}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}005$$
$$\sqrt{n}\geqslant\frac{0{,}49}{0{,}005}$$
$$\sqrt{n}\geqslant 98$$
$$n\geqslant 9604$$

Si $p=0{,}6$, on obtient la même valeur.

Si $p=0{,}5$, alors $\sigma(X)=0{,}5$.

Donc pour les échantillons de taille n, l'écart-type du pourcentage est $\sigma=\dfrac{0{,}5}{\sqrt{n}}$.

On veut que n vérifie : $\dfrac{0{,}5}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}005$

$$\sqrt{n}\geqslant\frac{0{,}5}{0{,}005}$$
$$\sqrt{n}\geqslant 100$$
$$n\geqslant 10\,000$$

Pour toutes les autres valeurs de p entre 0,4 et 0,6, on trouver une valeur de $\sigma(X)$ inférieure à 0,5.

Ainsi, pour être certain d'avoir un écart-type inférieur à 0,05, il faut interroger au moins 10 000 personnes.

91 $E(10aX+bY)=E(10aX)+E(bY)$

$=10aE(X)+bE(Y)=10aE(X)+5b$

$=5(2aE(X)+b)$

$E(X)$, a et b sont des nombres entiers naturels, donc $E(10aX+bY)$ est un nombre entier multiple de 5.

$V(10aX+bY)=V(10aX)+V(bY)$

$=100aV(X)+bV(Y)$

On ne peut rien dire de ce nombre.

92 On note $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ les valeurs prises par X et $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_m$ les valeurs prises par Y.

Les valeurs prises par XY sont tous les produits de la forme a_ib_j donc les valeurs prises par $(XY)^2$ sont tous les nombres de la forme $(a_ib_j)^2$.

Les valeurs prises pas X^2 sont tous les nombres $a_1^{\,2}$, $a_2^{\,2}$, …, $a_n^{\,2}$ et les valeurs prises par Y^2 sont tous les nombres $b_1^{\,2}$, $b_2^{\,2}$, …, $b_m^{\,2}$.

Donc les valeurs prises par X^2Y^2 sont tous les produits de la forme $a_i^{\,2}b_j^{\,2}$. Or $(a_ib_j)^2=a_i^{\,2}b_j^{\,2}$.

Donc $(XY)^2$ et X^2Y^2 prennent bien les mêmes valeurs.

Pour toute valeur a prise par X et toute valeur b prise par Y, et en ne regroupant pas les produits ab égaux :

$P((XY)^2=(ab)^2)=P(XY=ab)$

$P((XY)^2=(ab)^2)=P(\{X=a\}\cap\{Y=b\})$

$P((XY)^2=(ab)^2)=P(X=a)\times P(Y=b)$ puisque X et Y sont indépendantes.

Mais on peut alors aussi affirmer que X^2 et Y^2 sont indépendantes, donc, en ne regroupant pas les nombres a^2 égaux, ni les nombres b^2 égaux :

$P(X^2Y^2=a^2b^2)=P(\{X^2=a^2\}\cap\{Y^2=b^2\})$

$P(X^2Y^2=a^2b^2)=P(X^2=a^2)\times P(Y^2=b^2)$

$P(X^2Y^2=a^2b^2)=P(X=a)\times P(Y=b)$

Ainsi, on a prouvé que $(XY)^2$ et X^2Y^2 ont la même loi.

$V(XY)=E((XY)^2)-(E(XY))^2$

$V(XY)=E(X^2Y^2)-(E(XY))^2$

$V(XY)=E(X^2)E(Y^2)-(E(X)E(Y))^2$

$V(XY)=E(X^2)E(Y^2)-(E(X))^2(E(Y))^2$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&V(X)V(Y)+V(X)(E(Y))^2+V(Y)(E(X))^2\\
&=(E(X^2)-(E(X))^2)(E(Y^2)-(E(Y))^2)+(E(X^2)\\
&\qquad-(E(X))^2)(E(Y))^2+(E(Y^2)-(E(Y))^2)(E(X))^2\\
&=E(X^2)E(Y^2)-E(X^2)(E(Y))^2-(E(X))^2E(Y^2)\\
&\qquad+(E(X))^2(E(Y))^2+E(X^2)(E(Y))^2\\
&\qquad-(E(X))^2(E(Y))^2+(E(X))^2E(Y^2)-(E(Y))^2(E(X))^2\\
&=E(X^2)E(Y^2)-(E(Y))^2(E(X))^2
\end{aligned}$$

On a donc bien

$V(XY)=V(X)V(Y)+V(X)(E(Y))^2+V(Y)(E(X))^2$.

17 Concentration. Loi des grands nombres

Questions-Tests

1 **a)** (2)
b) (3)

2 **a)** (2)
b) (1)
c) (2)

3 **a)** (2)
b) (2)

4 **a)** (2)
b) (2)
c) (3)

Découvrir

1 Vers l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1 L'espérance de X est $\mu = 100 \times \frac{1}{2} = 50$, la variance de X est $V = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$.

2 **a)**

δ	5	8	10	12
$P(\|X-\mu\| \geqslant \delta)$	0,37	0,13	0,06	0,02
$\frac{V}{\delta^2}$	1	0,39	0,25	0,17

b) On conjecture que pour tout nombre réel $\delta > 0$, $P(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$.

2 Calculer l'écart entre la moyenne d'un échantillon et l'espérance

1 **a)**La loi de probabilité de X est donnée par :

x	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

b) $E(X) = 0{,}25 \times 0 + 0{,}5 \times 1 + 0{,}25 \times 2 = 1$

2 **a)** On choisit un nombre aléatoire $a \in [0\,;1]$.
si $a \leqslant 0{,}25$, X renvoie 0 ;
si $a \geqslant 0{,}75$, X renvoie 2 ;
pour les autres valeurs de a, X renvoie 1.
Ainsi la fonction X réalise une simulation de la variable aléatoire X.
b) La fonction Moyenne renvoie la moyenne des n valeurs prises par X.
La fonction Ecart renvoie l'écart entre cette moyenne et l'espérance de X.

3 **a)** Lorsque la taille n de l'échantillon augmente, l'écart entre la moyenne de l'échantillon et l'espérance de X diminue.
b) et **c)** Il semble que l'on puisse rendre cet écart aussi proche de 0 que l'on veut à condition de prendre n assez grand.

Savoir-faire

2 **1. a)** La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 100 et 0,65.
b) $\mu = 100 \times 0{,}65 = 65$
et $\sigma = \sqrt{100 \times 0{,}65 \times 0{,}35} = \sqrt{22{,}75} \approx 4{,}77$
c) Pour tout nombre réel $\delta > 0$, $P(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\sigma^2}{\delta^2}$;
avec $\delta = 2\sigma$, on obtient : $P(|X-\mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$.

2. Voici le programme dans ce cas :

```
from random import *

def Distance():
    e=65
    x=0
    for k in range(100):
        a=random()
        if a<=0.65:
            x=x+1
    d=abs(x-e)
    return d

def Echantillon(n):
    s=4.77
    y=0
    for j in range(n):
        if Distance()>=2*s:
            y=y+1
    p=y/n
    return p
```

3. a) par exemple :

```
>>> Echantillon(1000)
0.046
```

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne un résultat qui n'est pas optimal.

3 **1. a)** La variable aléatoire X suit la loi bionomiale de paramètres 50 et 0,5.

b) $\mu = 50 \times 0{,}5 = 25$

$\sigma = \sqrt{50 \times 0{,}5 \times 0{,}5}$

$= \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}54$

c) pour tout nombre réel $\delta > 0$,

$P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$.

2. Voici le programme dans ce cas :

```
from random import *

def Distance():
    e=25
    x=0
    for k in range(50):
        a=random()
        if a<=0.5:
            x=x+1
    d=abs(x-e)
    return d

def Echantillon(n):
    s=3.54
    y=0
    for j in range(n):
        if Distance()>=2*s:
            y=y+1
    p=y/n
    return p
```

3. a) par exemple :

```
>>> Echantillon(1000)
0.032
```

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne un résultat qui n'est pas optimal.

5 **1.**

x	0	1
$P(X_k = x)$	0,4	0,6

$\mu = 0{,}4 \times 0 + 0{,}61 = 0{,}6$

$V = 0{,}4(0 - 0{,}6)^2 + 0{,}6(1 - 0{,}6)^2 = 0{,}24$

2. pour tout réel $\delta > 0$,

$$P(|M_n - 0{,}6| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}24}{n\delta^2}.$$

a) Avec $\delta = 0{,}05$, on obtient :

$P(|M_n - 0{,}6| \geqslant 0{,}05) \leqslant \dfrac{96}{n}$.

Il suffit de choisir n tel que $\dfrac{96}{n} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant 960$.

b) Avec $\delta = 0{,}01$, on obtient :

$$P(|M_n - 0{,}6| \geqslant 0{,}01) \leqslant \frac{2\,400}{n}.$$

Il suffit de choisir n tel que $\dfrac{2\,400}{n} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant 48\,000$.

La ville compte 20 000 habitants, une telle enquête ne peut donc pas être réalisée.

Une précision de 0,01 et un risque de 0,05 ne peuvent donc pas être envisagés.

6 Avec $\delta = 0{,}5$, on obtient :

$$P(|M_n - 16| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{96}{n}.$$

On choisit alors n tel que $\dfrac{96}{n} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant 960$.

8 Voici différentes expérimentations

	$p(1-p)$
`>>> P(100,0.1,1000)` `0.003`	0,09
`>>> P(100,0.8,1000)` `0.02`	0,16
`>>> P(10,0.5,1000)` `0.021`	0,25
`>>> P(100,0.5,1000)` `0.066`	0,25
`>>> P(100,0.6,1000)` `0.067`	0,24
`>>> P(100,0.6,10000)` `0.0524`	0,24

Dans tous les cas, on constate qe l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne présente pas un caractère optimal.

Acquérir des automatismes

9 **(2)** $P(|X - 50| \geqslant \delta)$

10 **(2)** $P(|X - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$

11 **a)** D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - \mu| \geqslant 20) \leqslant \frac{V}{400}.$$

Ici $\mu = 250$ et $V = 125$

donc $P(|X - 250| \geqslant 20) \leqslant 0{,}3125$

b) Avec l'événement contraire :

$P(|X - 250| < 20) = 1 - P(|X - 250| \geqslant 20)$,

donc $P(|X - 250| < 20) \geqslant 0{,}6875$.

c) La probabilité que la variable aléatoire X prenne une valeur dans l'intervalle $]230 ; 270[$ est supérieure ou égale à 0,6 875.

12 **a)** La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \dfrac{1}{5}$

b) L'espérance de X est $\mu = np = 20$, la variance de X est $V = np(1-p) = 16$

c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}, \text{ soit } P(|X - 20| \geqslant \delta) \leqslant \frac{16}{\delta^2}$$

d) Avec $\delta = 10$, $P(|X - 20| \geqslant 10) \leqslant 0{,}16$.

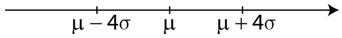
La probabilité que X prenne une valeur en dehors de l'intervalle $[11 ; 29]$ est inférieure ou égale à 0,16.

13 **1.** D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $\delta = k\sigma$, on obtient :

$$P(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}, \text{ soit } P(|X-\mu| \geqslant k\sigma) \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

2. a) On choisit k tel que $\frac{1}{k^2} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire : $k^2 \geqslant 10$, soit $k \geqslant 4$.

b) Pour $k = 4$, 

La probabilité que X prenne une valeur en dehors de l'intervalle $]\mu - 4\sigma\,;\mu + 4\sigma[$ est inférieure ou égale à 0,1.

14 **1. a)** La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}05$.

b) L'espérance de X est $\mu = np = 5$ et l'écart-type de X est : $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$

c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|X-\mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$.

2. On réalise une simulation de taille n de X, on obtient n valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X.

La fonction Echantillon renvoie la proportion de ces valeurs telles que $|x_s - \mu| \geqslant 2\sigma$.

3. a) b) par exemple :

```
>>> Echantillon(1000)
0.037
>>> Echantillon(1000)
0.043
>>> Echantillon(1000)
0.042
>>> Echantillon(1000)
0.028
```

On obtient des proportions inférieures à 5 %.

4. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne présente pas un caractère optimal.

15 La variable aléatoire M_n donne la moyenne des n numéros obtenus lors des n lancers.

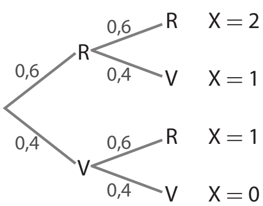
16 L'inégalité de concentration donne :

$P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{100V}{n}$ où V est la variance des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{100V}{n} \leqslant 10^{-3}$.

Ainsi pour $n \geqslant n_0$, $P(|M_n - \mu| \geqslant 0{,}1) \leqslant 10^{-3}$.

17 **1. a)** On construit l'arbre de probabilités :



x	0	1	2
$P(X=x)$	0,16	0,48	0,36

b) L'espérance de X est donnée par :

$\mu = 0{,}16 \times 0 + 0{,}48 \times 1 + 0{,}36 \times 2 = 1{,}2$

La variance de X est donnée par :

$V = 0{,}16(0-1{,}2)^2 + 0{,}48(1-1{,}2)^2 + 0{,}36(2-1{,}2)^2$

$V = 0{,}48$

2. a) M_n donne la moyenne du nombre de boules rouges tirées. L'espérance de M_n est égale à 1,2 et la variance de M_n est $\frac{0{,}48}{n}$.

b) D'après l'inégalité de concentration, pour tout nombre réel $\delta > 0$,

$$P(|M_n - 1{,}2| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}48}{n\delta^2}.$$

c) Lorsque $\delta = 0{,}1$ et $n = 100$, $P(|M_{100} - 1{,}2| \geqslant 0{,}1) \leqslant 0{,}48$

Lorsqu'on répète 100 fois l'expérience, la probabilité que M_{100} prenne une valeur en dehors de l'intervalle $]1{,}1\,;1{,}3[$ est inférieure ou égale à 0,48.

d) On prend $\delta = 0{,}01$. L'inégalité s'écrit :

$$P(|M_n - 1{,}2| \geqslant 0{,}01) \leqslant \frac{4\,800}{n}.$$

On choisit n tel que $\frac{4\,800}{n} \leqslant 0{,}48$, c'est-à-dire $n \geqslant 10\,000$.

Il faut répéter plus de 10 000 fois l'expérience pour que la probabilité que M_n prenne une valeur en dehors de $]1{,}19\,;1{,}21[$ soit inférieure ou égale à 0,48.

18 **1. a)** Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 9$, $P(X = k) = \frac{1}{10}$.

b) L'espérance de X est donnée par :

$$\mu = \frac{1}{10}(0 + 1 + 2 + \ldots + 9) = 4{,}5.$$

La variance de X est donnée par :

$V = \frac{1}{10}\left((0-4{,}5)^2 + (1-4{,}5)^2 + \ldots + (9-4{,}5)^2\right)$

$V = 8{,}25$

2. a) La variable aléatoire M_n donne la moyenne des n nombres obtenus.

b) D'après l'inégalité de concentration :

$P(|M_n - 4{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{8{,}25}{n \times 0{,}25}$,

soit $P(|M_n - 4{,}5| \geqslant 0{,}5) \leqslant \frac{33}{n}$.

c) $P(|M_n - 4{,}5| < 0{,}5) = 1 - P(|M_n - 4{,}5| \geqslant 0{,}5)$ donc $P(|M_n - 4{,}5| < 0{,}5) \geqslant 1 - \frac{33}{n}$.

3. a) On cherche une valeur de n telle que $1 - \frac{33}{n} \geqslant 0{,}99$, c'est-à-dire $\frac{33}{n} \leqslant 0{,}01$, soit $n \geqslant 3\,300$.

b) Lorsqu'on répète plus de 3 300 fois l'expérience, la probabilité que la moyenne M_n prenne une valeur dans l'intervalle $]4\,;5[$ est supérieure ou égale à 0,99.

c) pour $n \geqslant 3\,300$, M_n donne une valeur de 4,5 à une précision de 0,5 avec un risque 0,01.

19 **1. a)**

x	0	1
$P(X=x)$	0,6	0,4

b) L'espérance de X est donnée par :

$$\mu = 0{,}6 \times 0 + 0{,}4 \times 1 = 0{,}4.$$

La variance de X est donnée par :

$V = 0{,}6 \times (0-0{,}4)^2 + 0{,}4 \times (1-0{,}4)^2$

$V = 0{,}24$

2. a) D'après l'inégalité de concentration :

$$P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{0{,}24}{n \times 0{,}01}$$

soit $P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{24}{n}$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) \leqslant \frac{24}{n}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{24}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - 0{,}4| \geqslant 0{,}1) = 0$.

La probabilité que la variable moyenne M_n prenne une valeur en dehors de l'intervalle $]0{,}39 ; 0{,}41[$ est de plus en plus proche de 0 lorsque n devient grand.

c) On cherche n tel que $\frac{24}{n} \leqslant 10^{-5}$, c'est-à-dire $n \geqslant 24.10^5$

On prend $N = 24.10^5$.

d) Pour $n \geqslant 24.10^5$, M_n donne une valeur de 0,4 à une précision de 0,1 avec un risque de 10^{-5}.

Pour se tester

20 **1.** D **2.** D **3.** A

21 **1.** A, C **2.** C, D **3.** C

22 **1.** Vrai. En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{1}{9} \text{ et } \frac{1}{9} \leqslant 0{,}15.$$

2. Vrai. En effet, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2},$$

or $P(|X - \mu| < \delta) = 1 - P(|X - \mu| \geqslant \delta)$,

donc $P(|X - \mu| < \delta) \geqslant 1 - \frac{V}{\delta^2}$.

3. Faux. En effet, s'il existe un nombre réel $t > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$P(|M_n - \mu| \geqslant t) > 10^{-10}$, alors on ne peut pas avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant t) = 0$ et on obtient une contradiction avec la loi des grands nombres.

4. Vrai. En effet, $P(|S - 100p| \geqslant 10) \leqslant \frac{100 \times p \times (1-p)}{100}$

soit $P(|S - 100p| \geqslant 10) \leqslant p(1-p)$

Donc $P(|S - 100p| < 10) \geqslant 1 - p(1-p)$,

soit $P(|S - 100p| < 10) \geqslant p^2 - p + 1$.

S'entraîner

23 **(1)** $V = \sum\limits_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times (x_i - \mu)^2$

(2) On peut décomposer la somme précédente :

$$V = \sum_{x_k \in H} P(X = x_k) \times (x_k - \mu)^2 + \sum_{x_k \notin H} P(X = x_k) \times (x_k - \mu)^2,$$

donc $V \geqslant \sum\limits_{x_k \in H} P(X = x_k) \times (x_k - \mu)^2$.

(3) Or pour tout $x_k \in H$, $|x_k - \mu| \geqslant \delta$,

donc $(x_k - \mu)^2 \geqslant \delta^2$

et $P(X = x_k) \times (x_k - \mu)^2 \geqslant P(X = x_k) \times \delta^2$.

Finalement,

$$V \geqslant \sum_{x_k \in H} P(X = x_k) \times (x_k - \mu)^2 \geqslant \delta^2 \sum_{x_k \in H} P(X = x_k)$$

(4) Or $\sum\limits_{x_k \in H} P(X = x_k) = P(H)$, donc $V \geqslant \delta^2 P(H)$

(5) On en déduit que $P(H) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$, c'est-à-dire $P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$ et on obtient l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

24 On note $F = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{4040}}{4040}$ où chaque variable X_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

L'espérance de X_k est égale à p et sa variance à $p(1-p)$, donc l'espérance de F est égale à p et sa variance à $\frac{p(1-p)}{4040}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Pour tout nombre réel $\delta > 0$,

$$P(|F - p| \geqslant \delta) \leqslant \frac{p(1-p)}{4040\delta^2}$$

Et avec l'événement contraire :

$$P(|F - p| < \delta) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{4040\delta^2}$$

Voici le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = -x^2 + x$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0

Le maximum de la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est $\frac{1}{4}$ donc $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

On en déduit alors que :

$$P(|F - p| < \delta) \geqslant 1 - \frac{1}{16160\delta^2}$$

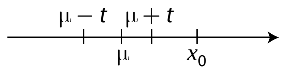
Pour $\delta = 0{,}05$, $1 - \dfrac{1}{16160\delta^2} \approx 0{,}975$, on obtient alors :

$$P(|F - p| < 0{,}05) \geqslant 0{,}95.$$

Une valeur de la variable aléatoire F est $\dfrac{2049}{4040}$, la probabilité que $p \approx \dfrac{2049}{4040}$ à 0,05 près est supérieure à 0,95.

25 **a)** D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout nombre réel $t > 0$, $P(|X - \mu| \geqslant t) = 0$.

b) On suppose qu'il existe une valeur x_0 de X distincte de μ, c'est-à-dire telle que $P(X = x_0) > 0$.



On considère un nombre $t > 0$ tel que x_0 soit en dehors de l'intervalle $]\mu - t\,;\mu + t[$, ainsi $P(|X - \mu| \geqslant t) \geqslant P(X = x_0) > 0$, ce qui contredit **a)**.

Donc X ne prend pas de valeur distincte de μ et $P(X = \mu) = 1$.

c) La variable aléatoire X prend pour seule valeur μ.

26 **Parcours 1**

$X_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ est la variable aléatoire dont la loi de probabilité est :

x	0	1
$P(X_k = x)$	5/6	1/6

L'espérance de X_k est égale à $\dfrac{1}{6}$ et sa variance est égale à $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}$.

$M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ et l'inégalité de concentration donne $P\left(|M_n - \dfrac{1}{6}| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \dfrac{\frac{5}{36}}{n \times 0{,}05^2}$,

soit $P\left(|M_n - \dfrac{1}{6}| \geqslant 0{,}05\right) \leqslant \dfrac{500}{9n}$.

On choisit n tel que $\dfrac{500}{9n} \leqslant 0{,}1$, c'est-à-dire $n \geqslant 556$.

Parcours 2

$X_k (1 \leqslant k \leqslant n)$ est la variable aléatoire dont la loi de probabilité est :

x	0	1
$P(X_k = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

L'espérance de X_k est égale à $\dfrac{1}{2}$ et sa variance est égale à $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

a) $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ a pour espérance 0,5 et pour variance $\dfrac{0{,}25}{n}$.

b) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|M_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{0{,}25}{n \times 0{,}1^2}$,

soit $P(|M_n - 0{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{25}{n}$.

c) On choisit n tel que $\dfrac{25}{n} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant 500$.

27 **1. a)** X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}1$.

b) L'espérance de X est $0{,}1 \times n$ et sa variance est $n \times 0{,}1 \times 0{,}9 = 0{,}09 \times n$.

2. a) X donne le nombre de fois où le chiffre 5 apparaît donc $F = \dfrac{X}{n}$ donne sa fréquence d'apparition.

b) L'espérance de F est $\dfrac{1}{n} \times 0{,}1 \times n = 0{,}1$.

c) La variance de F est $\dfrac{1}{n^2} \times 0{,}09 \times n = \dfrac{0{,}09}{n}$.

d) Lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes, la variance de F prend des valeurs de plus en plus proches de 0.

3. a) Pour tout nombre réel $\delta > 0$,

$$P(|F - 0{,}1| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}09}{n\delta^2}.$$

b) Pour $\delta = 0{,}05$, on obtient :

$P(|F - 0{,}1| \geqslant 0{,}05) \leqslant \dfrac{36}{n}$ et avec l'événement contraire :

$P(|F - 0{,}1| < 0{,}05) \geqslant 1 - \dfrac{36}{n}$,

soit $P(0{,}05 < F < 0{,}15) \geqslant 1 - \dfrac{36}{n}$.

c) On cherche n tel que $1 - \dfrac{36}{n} \geqslant 0{,}9$, c'est-à-dire $n \geqslant 360$.

28 **1. a)**

x	10	2	−1
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

b) L'espérance de X est égale à :

$$\frac{1}{8} \times 10 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{2} \times (-1) = 1{,}5$$

La variance de X est égale à :

$$\frac{1}{8}(10 - 1{,}5)^2 + \frac{3}{8}(2 - 1{,}5)^2 + \frac{1}{2}(-1 - 1{,}5)^2 = 12{,}25$$

2. D'après l'inégalité de concentration :

$P(|M_n - 1{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{12{,}25}{n \times 0{,}1^2}$,

soit $P(|M_n - 1{,}5| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{1225}{n}$.

Et, en considérant l'événement contraire :

$$P(|M_n - 1{,}5| < 0{,}1) \geqslant 1 - \frac{1225}{n}.$$

3. a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - \frac{1225}{n} \leqslant \mathrm{P}(|\mathrm{M}_n - 1{,}5| < 0{,}1) \leqslant 1$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1225}{n}\right) = 1$, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}(|\mathrm{M}_n - 1{,}5| < 0{,}1) = 1$.

b) On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$1 - \frac{1225}{n} \geqslant 0{,}9, \text{ soit } n \geqslant 12\,250.$$

29 X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}125$.

X a pour espérance $\mu = 10 \times 0{,}125 = 1{,}25$ et pour variance $v = 10 \times 0{,}125 \times 0{,}875 = 1{,}09\,375$.

Son écart-type est $\sigma = \sqrt{\mathrm{V}} \approx 1{,}05$

1. et **2.**

```
from random import *
from math import *

def X():
    x=0
    for k in range(10):
        a=random()
        if a<=0.125:
            x=x+1
    return x

def Echantillon(n):
    s=sqrt(1.09375)
    y=0
    for j in range(n):
        if abs(X()-1.25)>=2*s:
            y=y+1
    p=y/n
    return p
```

3. a)

```
>>> Echantillon(100)
0.02
>>> Echantillon(1000)
0.023
>>> Echantillon(10000)
0.0287
>>> Echantillon(100000)
0.02758
```

b) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne : $\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$.

La comparaison souligne le caractère non optimal de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

30 • Pour tout réel $t > 0$, $\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mu| \geqslant t) \leqslant \dfrac{\mathrm{V}}{t^2}$ où V est la variance de X.

Il existe un réel $t > 0$ tel que $\dfrac{\mathrm{V}}{t^2} \leqslant 0{,}01$, c'est-à-dire $t^2 \geqslant \dfrac{\mathrm{V}}{0{,}01}$, soit $t > \dfrac{\sqrt{\mathrm{V}}}{0{,}1}$.

La proposition P est vraie.

• On prend un réel $t > \sqrt{\dfrac{\mathrm{V}}{0{,}5}}$, alors $t^2 > \dfrac{\mathrm{V}}{0{,}5}$,

donc $0{,}5 > \dfrac{\mathrm{V}}{t^2}$ et $1 - \dfrac{\mathrm{V}}{t^2} > 0{,}5$.

Alors $\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mu| < t) \geqslant 1 - \dfrac{\mathrm{V}}{t^2} > 0{,}5$.

La proposition Q est fausse.

31 **1. a)** La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

x	0	1	4
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

b) $\mu = \dfrac{1}{5} \times 0 + \dfrac{2}{5} \times 1 + \dfrac{2}{5} \times 4 = 2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}(0-2)^2 + \frac{2}{5}(1-2)^2 + \frac{2}{5}(4-2)^2 = 2{,}8$$

$\sigma = \sqrt{2{,}8} \approx 1{,}67$.

c) La fonction X réalise une simulation de la variable aléatoire X.

2. La fonction Moyenne renvoie la moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

3. Pour des valeurs n et N des paramètres, la fonction Ecart_type calcule

$$v = \frac{(m_1 - 2)^2 + (m_2 - 2)^2 + \ldots + (m_{\mathrm{N}} - 2)^2}{\mathrm{N}}$$

et renvoie pour résultat $s = \sqrt{v}$.

4. a) et **b)**

```
>>> Ecart_type(100,1000)
0.16329727493133503
>>> Ecart_type(100,1000)
0.16455383096570412
```

c) La variance de la variable aléatoire

$\mathrm{M}_n = \dfrac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots + \mathrm{X}_n}{n}$ est égale à $\dfrac{1}{n^2} \times n\sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$, donc son écart-type est égal à $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Pour $n = 100$, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0{,}167$.

d) Les valeurs obtenues par simulation à la question **b)** sont proches de $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (pour $n = 100$).

e) $n = 100$, $\mathrm{N} = 10\,000$

```
>>> Ecart_type(100,10000)
0.16777902133461184
```

$n = 1\,000$, $\mathrm{N} = 1\,000$

```
>>> Ecart_type(1000,1000)
0.05352084640586319
```

Dans ce cas, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 0{,}053$.

32 **1. a)** La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}5$.

b) $\mu = 3 \times 0{,}5 = 1{,}5$ et $\sigma^2 = 3 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}75$ donc $\sigma = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$.

c) La fonction X réalise une simulation de la variable aléatoire X.

2. La fonction Ecart renvoie l'écart $d = |m - 1{,}5|$ où m est la moyenne de l'échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

3. La variable s a pour valeur l'écart-type σ de la variable aléatoire X.

La variable ℓ compte le nombre d'échantillons tels que $|m_j - \mu| \leqslant \dfrac{k\sigma}{\sqrt{n}}$

La variable p est la fréquence des échantillons tels que $|m_j - \mu| \leqslant \dfrac{k\sigma}{\sqrt{n}}$

Remarque : La variable aléatoire $\mathrm{M}_n = \dfrac{\mathrm{X}_1 + \ldots + \mathrm{X}_n}{n}$ a pour espérance μ et pour écart-type $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

4. b) $\boldsymbol{k = 1}$

```
>>> Proportion(100,1000,1)
0.639
>>> Proportion(100,1000,1)
0.681
```

La proportion des échantillons tels que $|m_j - \mu| \leqslant \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est environ 65 %.

c) $k = 2$

```
>>> Proportion(100,1000,2)
0.966
>>> Proportion(100,1000,2)
0.965
```

La proportion des échantillons tels que $|m_j - \mu| \leqslant \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ est environ 95 %.

$k = 3$

```
>>> Proportion(100,1000,3)
0.995
>>> Proportion(100,1000,3)
0.994
```

La proportion des échantillons tels que $|m_j - \mu| \leqslant \dfrac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ est environ 99 %.

d) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$P\left(|M_n - \mu| \geqslant \dfrac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{1}{k^2}$, donc :

$P\left(|M_n - \mu| \geqslant \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 1$

$P\left(|M_n - \mu| \geqslant \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 0{,}25$

$P\left(|M_n - \mu| \geqslant \dfrac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{1}{9} \quad \left(\dfrac{1}{9} \approx 0{,}11\right)$

Ces résultats montrent le caractère non optimal de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

33 **1. a)** À chaque saut, la puce se déplace aléatoirement, soit d'un saut vers la droite, soit d'un saut vers la gauche.

La variable aléatoire D_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}5$.

b) L'espérance de D_n est égale à $n \times 0{,}5$ et sa variance est égale à $n \times 0{,}5 \times 0{,}5 = n \times 0{,}25$

c) Après n sauts :

$X_n = 1 \times D_n + (-1)(n - D_n)$

$X_n = 2D_n - n.$

d) On en déduit que l'espérance de X_n est $\mu = 2 \times n \times 0{,}5 - n = 0$ et sa variance est :

$\sigma^2 = 4 \times n \times 0{,}25 = n, \ \ \sigma = \sqrt{n}.$

2. a) La variable x a pour valeur l'abscisse de la puce.

À chaque saut, un nombre aléatoire a est choisi dans l'intervalle $[0 ; 1[$.

Si $a < 0{,}5$, on admet qu'il s'agit d'un saut vers la gauche, alors $x \leftarrow x - 1$.

Si $a \geqslant 0{,}5$, il s'agit d'un saut vers la droite, alors $x \leftarrow x + 1$.

La fonction X renvoie x pour résultat.

b) La fonction Moyenne renvoie la moyenne des N abscisses obtenues lors des N simulations de X_n.

c) On simule Q échantillons de taille N de X_n, on obtient Q moyennes : $m_1, m_2, \ldots, m_Q$.

La fonction Proportion renvoie la proportion des moyennes m_k telles que $|m_k| \geqslant \delta$ où δ est un nombre réel, $\delta > 0$, donné en paramètre.

La variable I représente le nombre de moyennes m_k telles que $|m_k| \geqslant \delta$.

3. a) b)

```
>>> Proportion(100,100,1000,2)
0.049
>>> Proportion(100,100,1000,2)
0.048
>>> Proportion(100,100,1000,2)
0.054
```

Pour $n = 100$ sauts et une simulation de taille $N = 100$ de X_n, on obtient une moyenne m telle que $|m| \geqslant 2$ avec une fréquence d'environ 5 %.

c) $M_N = \dfrac{X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,N}}{N}$

Les variables aléatoires X_n,k sont identiques de même loi d'espérance 0 et d'écart-type $\sigma = \sqrt{n}$.

D'après l'inégalité de concentration, pour tout nombre réel $\delta > 0$,

$$P(|M_N| \geqslant \delta) \leqslant \frac{n}{N\delta^2}.$$

d) Pour $n = 100$, $N = 100$ et $\delta = 2$, on obtient :

$$P(|M_{100}| \geqslant \delta) \leqslant 0{,}25.$$

Comparé aux fréquences obtenues par simulation, ce résultat est loin d'être optimal.

34 Pour tout réel $\delta > 0$,

$$P(|X - \mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{\sigma^2}{\delta^2},$$

On pose $\delta = \lambda\sigma$ avec λ réel, $\lambda \geqslant 1$

$$P(|X - \mu| \geqslant \lambda\sigma) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}.$$

Donc $P(|X - \mu| < \lambda\sigma) \geqslant 1 - \dfrac{1}{\lambda^2}$, c'est-à-dire :

$$P(\mu - \lambda\sigma < X < \mu + \lambda\sigma) \geqslant \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}.$$

35 X donne 1 lorsqu'on obtient Pile et 0 lorsqu'on obtient Face

x	0	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

L'espérance de X est $\mu = \dfrac{1}{4} \times 0 + \dfrac{3}{4} \times 1 = 0{,}75.$

La variance de X est :

$$V = \frac{1}{4}(0 - 0{,}75)^2 + \frac{3}{4}(1 - 0{,}75)^2 = 0{,}1875$$

On lance n fois la pièce, la fréquence d'apparition de Pile est donnée par :

$M = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$ où chaque variable aléatoire X_k est identique à X.

L'inégalité de concentration donne :

Pour tout réel $\delta \geqslant 0$,

$$P(|M_n - 0{,}75| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}1875}{n\delta^2}.$$

Avec $\delta = 0{,}05$, on obtient :

$$P(|M_n - 0{,}75| \geqslant 0{,}05) \leqslant \frac{75}{n}.$$

On en déduit que :

$$P(|M_n - 0{,}75| < 0{,}05) \geqslant 1 - \frac{75}{n}$$

$$P(0{,}7 < M_n < 0{,}8) \geqslant 1 - \frac{75}{n}.$$

On cherche alors n tel que :

$1-\dfrac{75}{n} \geqslant 0{,}95$, soit $\dfrac{75}{n} \leqslant 0{,}05$, c'est-à-dire $n \geqslant 1\,500$.

Pour $n \geqslant 1\,500$, $P(0{,}7 < M_n < 0{,}8) \geqslant 0{,}95$.

36 **a)** La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}2$.

L'espérance de X est $100 \times 0{,}2 = 20$ et la variance de X est $100 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 16$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$P(|X-20| \geqslant 5) \leqslant \dfrac{16}{25}$,

c'est-à-dire :

$P(|X-20| \geqslant 5) \leqslant 0{,}64$.

```
from random import *
from math import *

def X():
    x=0
    for i in range(100):
        a=random()
        if a<0.2:
            x=x+1
    return x

def Ecart(n):
    l=0
    for i in range(n):
        if abs(X()-20)>=5:
            l=l+1
    p=l/n
    return p
```

b)

```
>>> Ecart(100000)
0.25856
```

c) La fonction Ecart renvoie des proportions proches de 0,26.

37 **a)**

```
from random import *

def K():
    x=0
    y=0
    k=0
    while -4<x<4 and -4<y<4:
        a=randint(1,4)
        if a==1:
            x=x-1
        if a==2:
            x=x+1
        if a==3:
            y=y-1
        if a==4:
            y=y+1
        k=k+1
    return k

def Moyenne(n):
    t=0
    for i in range(n):
        t=t+K()
    m=t/n
    return m
```

b) Par exemple :

```
>>> Moyenne(10000)
18.5388
```

On peut proposer la valeur 18,5 pour estimation de l'espérance de la variable aléatoire K.

38 **a)** La variable aléatoire S_n suit la loi binomiale de paramètres n et

$p = \dfrac{\pi \times 10^2}{20^2} = \pi \times 0{,}25$,

on a $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

b) On obtient par exemple

```
>>> Prop(100,10000)
0.0427
>>> Prop(100,10000)
0.0525
>>> Prop(100,10000)
0.0499
>>> Prop(100,10000)
0.0515
```

```
from math import *
from random import *

def S(n):
    p=0.25*pi
    s=0
    for i in range(n):
        a=random()
        if a<p:
            s=s+1
    return s

def Prop(n,N):
    p=0.25*pi
    m=n*p
    s=sqrt(n*p*(1-p))
    k=0
    for i in range(N):
        if abs(S(n)-m)>=2*s:
            k=k+1
    y=k/N
    return y
```

La proportion des valeurs $s_1, s_2, \ldots, s_N$ telles que $|s_k - \mu| \geqslant 2\sigma$ est environ égale à 0,05.

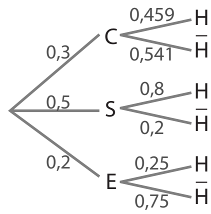
c) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient $P(|S_n - \mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$.

Le majorant 0,25 présente donc ici peut d'intérêt.

Objectif BAC

39 **Partie A**

a)



b) $P(C \cap H) = P_C(H) \times P(C)$

$= 0{,}459 \times 0{,}3$

$P(C \cap H) = 0{,}1377$

c) D'après la formule des probabilités totales :

$P(H) = P(H \cap C) + P(H \cap S) + P(H \cap E)$

$P(H) = 0{,}1377 + 0{,}8 \times 0{,}5 + 0{,}25 \times 0{,}2$

$P(H) = 0{,}5877$

d) $P_H(S) = \dfrac{P(S \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0{,}8 \times 0{,}5}{0{,}5877}$

$P_H(S) \approx 0{,}681$

Partie B

1. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}5\,877$.

2. L'espérance de X est $\mu = n \times p = 58{,}77$, la variance de X est :

$V = np(1-p) = 100 \times 0{,}5\,877 \times 0{,}4\,123$

$V \approx 24{,}23$

3. a) D'après l'inégalité Bienaymé-Tchebychev :

$P(|X-\mu| \geqslant 10) \leqslant \dfrac{V}{100}$

$\dfrac{V}{100} \leqslant 0{,}25$ donc $P(|X-\mu| \geqslant 10) \leqslant 0{,}25$.

b) Avec l'événement contraire :

$P(|X-\mu| < 10) = 1 - P(|X-\mu| \geqslant 10)$

donc $P(|X-\mu| < 10) \geqslant 0{,}75$.

Or $(|X-\mu| < 10) = (49 \leqslant X \leqslant 68)$,

donc $P(49 \leqslant X \leqslant 68) \geqslant 0{,}75$.

Partie C

1. a) La fonction X réalise une simulation de la variable aléatoire X.

b) Lors de la simulation d'un échantillon de taille N de X, on obtient N valeur $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de X.

La fonction Proportion renvoie la proportion de ces valeurs telles que $49 \leqslant x_k \leqslant 68$.

2. L'inégalité de la question **3. b)** donne un résultat qui n'est pas optimal.

40 **1. a)** X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}4$.

b) L'espérance de X est $\mu = np = 0{,}4 \times n$, l'écart-type de X est $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{0{,}24 \times n}$

c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|X-\mu| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$ et avec l'événement contraire $P(|X-\mu| < 2\sigma) \geqslant 0{,}75$.

2. Pour $n = 500$ et $N = 1\,000$, la proportion des valeurs x_k telles que $|x_k - \mu| < 2\sigma$ est proche de 0,95.

3. L'inégalité obtenue à la question **1. c)** n'a pas un caractère optimal.

41 **a)** $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont $n (n \geqslant 2)$ variables aléatoires indépendantes, identiques, suivant une même loi de probabilité d'espérance μ.

On note $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ la variable aléatoire moyenne.

Alors, pour tout réel $t > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant t) = 0$.

C'est-à-dire que la probabilité que l'écart $|M_n - \mu|$ soit supérieur ou égal à t tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

42 D'après l'inégalité de concentration :

$P(|M_n - 3| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{2{,}1}{n \times 0{,}1^2}$,

soit $P(|M_n - 3| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{210}{n}$.

Avec l'événement contraire :

$P(|M_n - 3| < 0{,}1) = 1 - P(|M_n - 3| \geqslant 0{,}1)$,

donc $P(|M_n - 3| < 0{,}1) \geqslant 1 - \dfrac{210}{n}$.

On cherche n tel que $1 - \dfrac{210}{n} \geqslant 0{,}9$ soit $\dfrac{210}{n} \leqslant 0{,}1$, $n \geqslant 2\,100$.

43 **a)** $P(|X - 80| \geqslant 5) \leqslant \dfrac{16}{25}$

$P(|X - 80| \geqslant 5) \leqslant 0{,}64$ donc $P(|X - 80| < 5) \geqslant 0{,}36$.
Donc l'inégalité est vraie.

b) $P(|X - 80| \geqslant 10) \leqslant \dfrac{16}{100}$

$P(|X - 80| \geqslant 10) \leqslant 0{,}16$ donc $P(|X - 80| < 10) \geqslant 0{,}84$
$P(70 < X < 90) \geqslant 0{,}84$.
Donc l'inégalité est fausse.

c) $P(|X - 80| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$
$P(|X - 80| \geqslant 8) \leqslant 0{,}25$
Or, $P(X \geqslant 88) \leqslant P(|X - 80| \geqslant 8) \leqslant 0{,}25$ donc l'inégalité est vraie.

d) De même : $P(X \leqslant 72) \leqslant P(|X - 80| \geqslant 8) \leqslant 0{,}25$ donc l'inégalité est vraie.

Pour aller plus loin

44 **Partie A : exemple 1**

1. a) La fonction X réalise une simulation de la variable aléatoire X.

b) La fonction Moyenne renvoie pour résultat la moyenne des n valeurs de X de l'échantillon.

2. a) La moyenne de l'échantillon est donnée par $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$, d'après la loi des grands nombres, pour tout réel $t > 0$,

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| \geqslant t) = 0$.

b) La probabilité que $\overline{x}$ soit en dehors de l'intervalle $]\mu - t\,;\mu + t[$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. a) On obtient, par exemple :

```
>>> Moyenne(100)
5.83
>>> Moyenne(1000)
6.239
>>> Moyenne(10000)
6.0255
>>> Moyenne(100000)
6.00514
```

b) On propose $\mu = 6$ pour valeur de l'espéance de X.

Partie B : exemple 2

1.

```
from random import *

def Y():
    n=0
    s=0
    while s<6:
        a=randint(1,6)
        if a==6:
            s=s+1
        n=n+1
    return n

def Moyenne(n):
    som=0
    for i in range(n):
        som=som+Y()
    m=som/n
    return m
```

2. On obtient, par exemple :

```
>>> Moyenne(1000)
35.601
>>> Moyenne(1000)
36.498
>>> Moyenne(1000)
35.997
```

On propose 36 pour valeur de l'espérance de Y.

45 **1. a)** Pour la naissance de g garçons et de f filles, $\dfrac{g}{f} = 1{,}05$.

Alors $p = \dfrac{g}{g+f} = \dfrac{1{,}05f}{2{,}05f} = \dfrac{1{,}05}{2{,}05} \approx 0{,}512$.

b) On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de garçons nés pendant l'étude.

X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}512$.

L'espérance de X_n est égale à np et sa variance est égale à $np(1-p)$.

On a $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, l'espérance de F_n est égale à p, sa variance est égale à $\dfrac{p(1-p)}{n}$ et son écart-type est $\sigma = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$.

2. a) La fonction F réalise une simulation de la variable aléatoire F_n.

b) On note $f_1, f_2, \ldots, f_N$ les n fréquences obtenues dans l'échantillon de taille N de F_n.

La fonction Proportion renvoie la proportion des fréquences f_k telles que $|f_k - p| \geqslant 2\sigma$.

3. a) On obtient par exemple :

```
>>> Proportion(10**6,100)
0.06
>>> Proportion(10**6,100)
0.06
>>> Proportion(10**6,100)
0.03
>>> Proportion(10**6,100)
0.02
```

b) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on obtient :

$P(|F_n - p| \geqslant 2\sigma) \leqslant 0{,}25$

c) Le majorant n'a pas un caractère optimal, les proportions obtenues le montrent.

46 **a)** $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)x_i$, on décompose cette somme :

$$E(X) = \sum_{x_i \geqslant \alpha} P(X = x_i)x_i + \sum_{x_i < \alpha} P(X = x_i)x_i$$

b) Or, $\sum_{x_i < \alpha} P(X = x_i)x_i \geqslant 0$ car les valeurs prises par X sont positives, donc $E(X) \geqslant \sum_{x_i \geqslant \alpha} P(X = x_i)x_i$

c) Si $x_i \geqslant \alpha$ alors $P(X = x_i)x_i \geqslant P(X = x_i)\alpha$.

On en déduit que :

$$\sum_{x_i \geqslant \alpha} P(X = x_i)x_i \geqslant \alpha \sum_{x_i \geqslant \alpha} P(X = x_i).$$

$\sum_{x_i \geqslant \alpha} P(X = x_i) = P(X \geqslant \alpha)$, on obtient alors :

$E(X) \geqslant \alpha P(X \geqslant \alpha)$, soit $P(X \geqslant \alpha) \leqslant \dfrac{E(X)}{\alpha}$.

47 **1. a)** $X - \mu = Y - \lambda$

donc $P(X - \mu \geqslant a) = P(Y - \lambda \geqslant a) = P(Y \geqslant a + \lambda)$.

Or $(Y \geqslant a + \lambda) \subset (Y^2 \geqslant (a + \lambda)^2)$

donc $P(X - \mu \geqslant a) \leqslant P(Y^2 \geqslant (a + \lambda)^2)$

b) $E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2$

$E(Y^2) = V(X - \mu + \lambda) + (E(X - \mu + \lambda))^2$

$E(Y^2) = V(X) + (E(X) - \mu + \lambda)^2$

$E(Y^2) = \sigma^2 + \lambda^2$.

c) Avec l'inégalité de Markov, pour tout nombre réel $\lambda > 0$, $\quad P(Y^2 \geqslant (a + \lambda)^2) \leqslant \dfrac{E(Y^2)}{(a + \lambda)^2}$

Avec 1. **a)** et 1. **b)**, on en déduit que :

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2 + \lambda^2}{(a + \lambda)^2}$$

2. a) φ est dérivable sur $[0\,; +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{2x(a + x)^2 - (\sigma^2 + x^2) \times 2(a + x)}{(a + x)^4}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2(a + x)[x(a + x) - (\sigma^2 + x^2)]}{(a + x)^4}$$

$$\varphi'(x) = \frac{2(a + x)(ax - \sigma^2)}{(a + x)^4}$$

x	0		σ^2/a		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

b) On en déduit que φ admet un minimum en $x = \dfrac{\sigma^2}{a}$ égal à : $\quad \varphi\left(\dfrac{\sigma^2}{a}\right) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$

c) D'après **1. c)**, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \varphi(\lambda).$$

En particulier pour $\lambda = \dfrac{\sigma^2}{a}$, on obtient :

$$P(X - \mu \geqslant a) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

3. a) $P(|X - \mu| \geqslant a) = P(X - \mu \geqslant a) + P(X - \mu \leqslant -a)$

$P(|X - \mu| \geqslant a) = P(X - \mu \geqslant a) + P(\mu - X \geqslant a)$.

On démontre comme précédemment que

$P(\mu - X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$, on en déduit que :

$$P(|X - \mu| \geqslant a) \leqslant \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

b) On calcule la différence :

$$d = \frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} = \frac{\sigma^4 + a^2\sigma^2 - 2a^2\sigma^2}{a^2(\sigma^2 + a^2)}$$

$$d = \frac{\sigma^2(\sigma^2 - a^2)}{a^2(\sigma^2 + a^2)}$$

c) L'inégalité de la question **3. a)** est meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev lorsque $d \geqslant 0$ (car le majorant est plus petit), c'est-à-dire lorsque $a \leqslant \sigma$.

48 **1. a)** La variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p.

b) L'espérance de X_n et np, la variance de X_n est $np(1 - p)$.

2. a) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta \geqslant 0$,

$P(|X_n - np| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{np(1 - p)}{\delta^2}$,

soit $P\left(\left|\dfrac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \dfrac{\delta}{n}\right) \leqslant \dfrac{np(1 - p)}{\delta^2}$.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on pose $\delta = n\varepsilon$ et on obtient alors :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

b) Pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f'(x) = 1 - 2x$.

x	0		1/2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗		1/4		↘

Donc pour tout réel $x \in [0\,;1]$, $f(x) \leqslant \frac{1}{4}$, soit $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

Or $p \in [0\,;1]$ donc $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$.

c) Avec **2. a)** et **2. b)**, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

3. Pour $\varepsilon = 10^{-2}$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant \frac{1}{4n10^{-4}},$$

ou $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n10^{-4}}$.

On cherche alors n tel que :

$1 - \frac{1}{4n10^{-4}} \geqslant 0{,}95$, $\frac{1}{4n10^{-4}} \leqslant 0{,}05$,

soit $4n10^{-4} \geqslant 20$, $n \geqslant 5.10^4$.

Obtenir un tel résultat n'est pas envisageable.

49 X_n est la variable aléatoire qui donne le nombre de rois ou de dames obtenus lors des n tirages.

X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{4}$.

On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ la fréquence d'apparition d'un roi ou d'une dame.

F_n a pour espérance $\mu = 0{,}25$ et pour variance $\frac{1}{n^2} \times np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0{,}1875}{n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel $\delta > 0$, $P(|F_n - 0{,}25| \geqslant \delta) \leqslant \frac{0{,}1875}{n\delta^2}$.

On peut aussi écrire $P(|F_n - 0{,}25| < \delta) \geqslant 1 - \frac{0{,}1875}{n\delta^2}$.

Avec $\delta = 0{,}05$, $P(|F_n - 0{,}25| < 0{,}05) \geqslant 1 - \frac{75}{n}$.

On cherche alors n tel que $1 - \frac{75}{n} \geqslant 0{,}8$, c'est-à-dire $\frac{75}{n} \leqslant 0{,}2$, $n \geqslant 375$.

Pour $n \geqslant 375$, $P(0{,}2 < F_n < 0{,}3) \geqslant 0{,}8$.

La fréquence d'apparition d'un roi ou d'une dame est comprise entre 0,2 et 0,3 avec une probabilité supérieure à 0,8.

Corrigés des sujets de BAC BLANC

Sujet n° 1

1 **1.** • $BC^2 = (0-(-1))^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2 = 5$
• $CD^2 = (6-0)^2 + (6-1)^2 + (-1-2)^2 = 70$
• $BD^2 = (6-(-1))^2 + (6-1)^2 + (-1-0)^2 = 75$
Ainsi $BD^2 = BC^2 + CD^2$ donc le triangle BCD est rectangle en C d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Son aire est est égale à $\dfrac{BC \times CD}{2}$

soit $\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2} = \dfrac{5}{2}\sqrt{14}$.

2. a) $\overrightarrow{BC}(1\,;0\,;2)$
donc $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n} = 1\times(-2) + 0\times 3 + 2\times 1 = 0$.
$\overrightarrow{CD}(6\,;5\,;-3)$
donc $\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n} = 6\times(-2) + 5\times 3 + (-3)\times 1 = 0$.
BCD est un triangle rectangle non aplati donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
Ainsi le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), il en est un vecteur normal.
b) L'équation du plan (BCD) est donc de la forme :

$$-2x + 3y + z + d = 0.$$

Or B appartient au plan (BCD),
donc $-2(-1) + 3\times 1 + 0 + d = 0$ soit $d = -5$.
On en déduit qu'une équation cartésienne du plan (BCD) est : $-2x + 3y + z - 5 = 0$.
3. Une représentation paramétrique de la droite d de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point A est :

$$\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -5+3t \qquad t\in\mathbb{R} \\ z = 2+t \end{cases}$$

4. H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD), il s'agit donc du point d'intersection de la droite d et du plan (BCD).

Or $\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -5+3t \\ z = 2+t \\ -2x+3y+z-5=0 \end{cases}$

équivaut à

$\begin{cases} x = 5-2t \\ y = -5+3t \\ z = 2+t \\ -2(5-2t)+3(-5+3t)+(2+t)-5=0 \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = 5-2\times 2 = 1 \\ y = -5+3\times 2 = 1 \\ z = 2+2 = 4 \\ t = 2 \end{cases}$

Ainsi, les coordonnées de H sont $(1\,;1\,;4)$.

5. a) $\overrightarrow{AB}(-6\,;6\,;-2)$
donc $AB = \sqrt{(-6)^2+6^2+(-2)^2} = \sqrt{76}$
$\overrightarrow{AC}(-5\,;6\,;0)$
donc $AC = \sqrt{(-5)^2+6^2+0^2} = \sqrt{61}$.
b) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.
Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-6)\times(-5) + 6\times 6 + (-2)\times 0 = 66$.
Donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{66}{\sqrt{76}\times\sqrt{61}} = \dfrac{66}{\sqrt{4\,636}}$.
À l'aide de la calculatrice, on trouve $\widehat{BAC} \approx 14{,}2°$.

2 **Partie A**

a) (2). En effet la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est égale à -2.
b) (3). En effet, la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\,;3]$. Ainsi, la fonction f' est croissante sur l'intervalle [1; 3].

Partie B

a) La fonction u est dérivable et pour tout $x>0$,
$u'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$.
Donc pour tout $x>0$, $u'(x) = \dfrac{1+x}{x} > 0$.

Ainsi, la fonction u est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} u(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

Ainsi le tableau de variations de u est le suivant.

x	0	$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b) La fonction u est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc d'après la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$.

c) À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$2,20 < \alpha < 2,21.$$

d) On en déduit le tableau de signes de la fonction u.

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

Partie C

1. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$.

Par opérations sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty.$$

2. a) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

Ainsi pour tout réel $x > 0$,

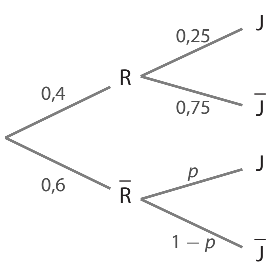
$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1).$$

On en déduit que pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \text{ soit } f'(x) = \frac{1}{x^2}u(x).$$

b) Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. On en déduit que f est décroissante sur $]0\,;\alpha]$ et croissante $[\alpha\,;+\infty[$.

3 **1. a)**



b) On sait que 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus » donc $P(J) = 0{,}2$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\overline{R} \cap J)$$

soit $0{,}2 = 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6p$.

On en déduit que $p = \frac{1}{6}$.

2. a) On prend au hasard une bouteille dans un lot de 500 ; il n'y a que deux issues possibles : elle est « pur jus » avec une probabilité égale à 0,2 ou elle ne l'est pas avec la probabilité 0,8.

On répète de façon indépendante 500 fois cette épreuve. Ainsi la variable aléatoire X qui donne le nombre de bouteilles « pur jus » suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0{,}2$.

b) $P(X \geqslant 75) = 1 - P(X \leqslant 74) \approx 0,998$.

4 **1. a)** g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pout tout réel x,

$g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Pour tout réel x,

$(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1$

soit $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

On en déduit que pour tout réel x,

$g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

b) Pour tout réel x, $2e^x + 1 > 0$, ainsi $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

Or $e^x - 1 \geqslant 0$ équivaut à $e^x \geqslant 1$ soit $x \geqslant 0$.

On en déduit que g est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est donc $g(0) = 0$.

c) Pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$.

Or d'après la question précédente, pour tout réel x, $g(x) \geqslant 0$.

Ainsi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

2. a) Pour tout entier naturel n,

$e^{u_n}(e^{u_n} - 1) = e^{2u_n} - e^{u_n} = g(u_n)$

soit $u_{n+1} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$.

b) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété :

« $u_n \leqslant 0$ ».

• **Initialisation :** Pour $n = 0$, $u_0 = a \leqslant 0$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité :** on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie c'est-à-dire que $u_k \leqslant 0$ (hypothèse de récurrence).

$u_{k+1} = e^{u_k}(e^{u_k} - 1)$ est du signe de $e^{u_k} - 1$.

Or $u_k \leqslant 0$ donc $e^{u_k} \leqslant 1$ et $e^{u_k} - 1 \leqslant 0$.

On en déduit que $u_{k+1} \leqslant 0$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

c) (u_n) est donc une suite croissante majorée par 0.

Elle est donc convergente.

d) Lorsque $a = 0$, la suite est croissante et majorée par 0, donc tous les termes de la suite valent 0.

La limite de la suite (u_n) est donc égale à 0.

3. a) La suite (u_n) est croissante et $u_0 = a$, ainsi pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a > 0$.

Donc, comme g est croissante sur $[0\,;+\infty[$, on a $g(u_n) \geqslant g(a)$.

Or pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

c) Pour tout entier naturel n, $P(n)$ est la propriété: « $u_n \geqslant a + n \times g(a)$ ».

• **Initialisation :**

Pour $n = 0$, $u_0 = a$ et $a + 0 \times g(a) = a$.

D'où $u_0 \geqslant a + 0 \times g(a)$.

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité :** on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété $P(k)$ est vraie c'est-à-dire que

$u_k \geqslant a + k \times g(a)$ (hypothèse de récurrence).

Or $u_{k+1} - u_k \geqslant g(a)$ donc $u_{k+1} \geqslant g(a) + u_k$.

Ainsi $u_{k+1} \geqslant g(a) + a + k \times g(a)$.

Soit $u_{k+1} \geqslant a + (k+1) \times g(a)$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion :** pour tout entier naturel n, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

d) Le minimum de g est atteint en $x = 0$ et vaut 0.

Comme $a > 0$, on a donc $g(a) > 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} a + n \times g(a) = +\infty$.

On en déduit que la limite de la suite (u_n) est égale à $+\infty$.

4. a) Voici l'algorithme complété :

```python
from math import *

def Seuil(M):
    u=0.02
    n=0
    while u<M:
        u=exp(2*u)-exp(u)
        n=n+1
    return n
```

b) La valeur affichée est 36.

Sujet n° 2

1 **1. a)** À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $P(n)$ est la propriété : « $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$ ».

• **Initialisation :**

Pour $n = 1$, $u_1 = 3{,}4$ et $\dfrac{15}{4} \times 0{,}5^1 = 1{,}875$

donc $u_1 \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^1$.

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

• **Hérédité :** on suppose que, pour un entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $P(k)$ est vraie c'est-à-dire que $u_k \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^k$ (hypothèse de récurrence).

$u_{k+1} = \dfrac{1}{5} u_k + 3 \times 0{,}5^k$.

Donc $u_{k+1} \geqslant \dfrac{1}{5} \times \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^k + 3 \times 0{,}5^k$.

Ainsi $u_{k+1} \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^k$.

Or $0{,}5^k \geqslant 0{,}5^{k+1}$.

On en déduit que $u_{k+1} \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}$.

La propriété $P(k+1)$ est donc vraie.

• **Conclusion :** pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n.$$

Ainsi pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0{,}5^n.$$

On en déduit grâce à la question précédente que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n \leqslant -\frac{4}{5} \times \frac{15}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$$

soit $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c) On en déduit que la suite (u_n) est décroissante à partir de $n \geqslant 1$. De plus, d'après la question **2. a)**, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante minorée, elle est donc convergente.

3. a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1}.$$

Donc pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5^{n+1}.$$

D'où pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 5 \times 0{,}5^n.$

Ainsi pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n - 2 \times 0{,}5^n.$

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$v_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n - 10 \times 0{,}5^n)$ soit $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n.$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = -8$.

b) La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$$

soit $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

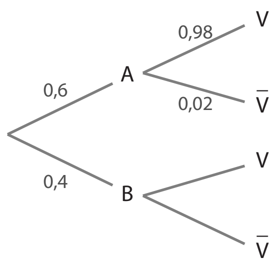
$-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

De même : $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$.

On en déduit par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2 Partie A

a) D'après l'énoncé, on a $P(V) = 0{,}96$, $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(V) = 0{,}98$. D'où l'arbre suivant :



$P(A \cap V) = 0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}588.$

b) D'après la formule des probabilités totales,

$P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V).$

On en déduit que :

$P(B \cap V) = 0{,}96 - P(A \cap V) = 0{,}372$

$P_B(V) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{0{,}372}{0{,}4} = 0{,}93.$

Ainsi la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B est égale à 0,93.

c) On cherche $P_{\overline{V}}(B)$.

$P_{\overline{V}}(B) = \frac{P(B \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \frac{0{,}028}{1 - 0{,}96} = 0{,}7.$

Donc le technicien a raison.

Partie B

1. a) La probabilité qu'une bille tirée au hasard dans la production journalière soit noire est égale à $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$ car la teinte est choisie de manière équiprobable.

On répète 40 fois de manière identique et indépendante une expérience n'ayant que deux issues : la bille est noire avec la probabilité $p = 0{,}2$ ou non.

La variable aléatoire X comptant le nombre de billes noires dans le sac suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0{,}2$.

Ainsi $P(X = 10) \approx 0{,}107$.

b) On cherche si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %. Les conditions sont vérifiées puisque :

$$n = 40 \geqslant 30,\ np = 8 \geqslant 5 \text{ et } n(1-p) = 32 \geqslant 5.$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est $\mathrm{I} = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$

soit $\mathrm{I} = \left[0{,}2 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}16}}{\sqrt{40}} ; 0{,}2 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}16}}{\sqrt{40}}\right]$

D'où $\mathrm{I} \approx [0,076 ; 0,324]$.

La fréquence observée de billes noires est égale à $f = \frac{12}{40} = 0{,}3$.

f appartient à l'intervalle I donc on ne rejette pas l'hypothèse selon laquelle la proportion de billes noires est égale à 20 % au seuil de 5 %.

Ce résultat ne doit pas remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes.

2. Pour un sac contenant n billes, la probabilité qu'au moins une soit noire est égale à $P(X \geqslant 1)$.

Or $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$.

On cherche donc le plus petit entier n tel que $1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99$.

Or $1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99$ équivaut à $-0{,}8^n \geqslant 0{,}01$ soit $0{,}8^n \leqslant 0{,}01$.

Ceci est équivalent à $\ln(0{,}8^n) \leqslant \ln(0{,}01)$.

C'est-à-dire $n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}01)$.

On en déduit que $n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ car $\ln(0{,}8) < 0$.

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}6$.

L'entreprise doit donc mettre au minimum 21 billes dans chaque sac pour atteindre cet objectif.

3 **1. a)** On a $\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;0\right)$, $\mathrm{J}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ et $\mathrm{K}\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;0\right)$.

Donc $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}(1\,;0\,;\,-1)$.

D'autre part $\overrightarrow{\mathrm{FD}}(-1\,;1\,;-1)$.

On en déduit que :

$\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-1 = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{JK}} = -1+1 = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{JK}}$ du plan (IJK).

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ est normal à ce plan.

b) L'équation du plan (IJK) est donc de la forme :

$$-x+y-z+d=0.$$

Or I appartient au plan (IJK),

donc $-\dfrac{1}{2}+d=0$ soit $d=\dfrac{1}{2}$.

On en déduit qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $-x+y-z+\dfrac{1}{2}=0$ soit $x-y+z=\dfrac{1}{2}$.

2. Une représentation paramétrique de la droite (FD) (de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ et passant par le point F)

est : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

3. a) M est le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK), il s'agit donc du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK).

Or $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1-t \\ x-y+z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = 1-t \\ 1-t-t+1-t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

soit $\begin{cases} x = 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ainsi, les coordonnées de M sont : $\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

b) La distance du point F au plan (IJK) est la distance FM.

Or $\overrightarrow{\mathrm{FM}}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$,

donc $\mathrm{FM} = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. • $\mathrm{IJ}^2 = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1^2 = \dfrac{6}{4}$

• $\mathrm{IK}^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2 = \dfrac{2}{4}$

• $\mathrm{JK}^2 = 1^2+0^2+1^2 = 2$.

Ainsi $\mathrm{IJ}^2+\mathrm{IK}^2=\mathrm{JK}^2$ donc le triangle IJK est rectangle en I d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Son aire est égale à $\mathscr{A}(\mathrm{IJK}) = \dfrac{\mathrm{IJ}\times\mathrm{IK}}{2}$

soit $\mathscr{A}(\mathrm{IJK}) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{12}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

5. Le volume du tétraèdre FIJK est égal à

$\mathscr{V}(\mathrm{FIJK}) = \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\mathrm{IJK})\times\mathrm{MF}$.

Donc $\mathscr{V}(\mathrm{FIJK}) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{8}$.

6. $\mathrm{L}\left(1\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $1-1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que les coordonnées du point L vérifie l'équation du plan (IJK). Ainsi le point L appartient au plan (IJK) et les quatre points I, J, K et L sont coplanaires.

De plus, $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\left(-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{KL}}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{KL}}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites coplanaires (IJ) et (KL) sont sécantes.

4 **Partie A**

1. a) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b) Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}+\dfrac{1}{2}x\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

Donc pour tout réel $x \geqslant 0$,

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)$

Ainsi pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-\dfrac{1}{2}x$.

Or $1-\dfrac{1}{2}x \geqslant 0$ équivaut à $-\dfrac{1}{2}x \geqslant -1$ soit $x \leqslant 2$.

On en déduit le tableau de variations de *f*.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

2. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\left(1-\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\times\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Donc pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\left(1-\frac{1}{2}x+1\right)$$

soit $f''(x) = -\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\left(2-\dfrac{1}{2}x\right)$.

b) Ainsi pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x)$ est du signe de $-\left(2-\dfrac{1}{2}x\right) = -2+\dfrac{1}{2}x$.

Or $-2+\dfrac{1}{2}x \geqslant 0$ équivaut à $\dfrac{1}{2}x \geqslant 2$ soit $x \geqslant 4$.

Donc la fonction *f* est concave sur l'intervalle $[0\,;4]$ et convexe sur l'intervalle $[4\,;+\infty[$.

Partie B

1. a) Pour tout réel $t \geqslant 0$, $u'(t) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)$.

Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$,

$$u'(t)+\frac{1}{2}u(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(1-\frac{1}{2}t\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Donc la fonction *u* est solution sur $[0\,;+\infty[$ de (E).

b) *v* est solution de (E) si, et seulement si,

$v'+\dfrac{1}{2}v = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$. Or $u'+\dfrac{1}{2}u = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$.

Ainsi, *v* est solution de (E) si, et seulement si, $(v'-u')+\dfrac{1}{2}(v-u) = 0$

c'est-à-dire $(v-u)'+\dfrac{1}{2}(v-u) = 0$.

Autrement dit, *v* est solution de (E) si, et seulement si, $h = v-u$ est solution de l'équation différentielle

$$y'+\frac{1}{2}y = 0.$$

c) Les solutions de l'équation différentielle $y'+\dfrac{1}{2}y = 0$ soit $y' = -\dfrac{1}{2}y$ sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto ke^{-\frac{1}{2}t}$ où *k* est un nombre réel.

v est solution de (E) si, et seulement si, pour tout réel $t \geqslant 0$, $v(t)-u(t) = ke^{-\frac{1}{2}t}$ où *k* est un nombre réel, c'est-à-dire $v(t) = ke^{-\frac{1}{2}t}+\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$.

Les solutions sur $[0\,;+\infty[$ de (E) sont donc les fonctions $t \mapsto ke^{-\frac{1}{2}t}+\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où *k* est un nombre réel.

2. On note *v* cette solution de (E).

Donc pour tout réel $t \geqslant 0$, il existe un réel *k* tel que $v(t) = ke^{-\frac{1}{2}t}+\dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$.

Or $v(0) = 0$ donc $ke^{-\frac{1}{2}\times 0}+\dfrac{1}{2}\times 0\times e^{-\frac{1}{2}\times 0} = 0$

soit $k = 0$.

Ainsi pour tout réel $t \geqslant 0$, $v(t) = \dfrac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$.

Il s'agit bien de la fonction *f* définie dans la **partie A**.

3. D'après la **partie A**, le principe actif est maximum à l'instant $t = 2$, c'est-à-dire 2 heures après l'absorption.

4. a) La fonction *f* est continue et strictement décroissante sur $[3\,;+\infty[$. De plus, 0,1 est compris entre 0 et $f(3) \approx 0{,}33$. Donc d'après la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0{,}1$ admet une unique solution α sur $[3\,;+\infty[$. Ainsi, il existe un nombre réel *t* supérieur à α tel que $f(t) \leqslant 0{,}1$. On en déduit que la condition $f(n) > 0{,}1$ ne sera plus vérifiée à partir d'un certain rang $n \geqslant 3$. L'algorithme affichera donc une valeur.

b) La valeur n_0 affichée est 8.

c) Ainsi la quantité de principe actif sera inférieure à 0,1 mg à partir de 16 h.

5. La fonction *f* est décroissante et convexe sur $[4\,;+\infty[$. Ainsi, la diminution de principe actif ralentit à partir de $t = 4$, c'est-à-dire à partir de midi.

Sujet n° 3

1 **1. a)** $\overrightarrow{AB}(-3\,;-4\,;1)$; $\overrightarrow{AC}(-5\,;2\,;-7)$

Si les points A, B et C sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et il existe un réel k tel que

$$\begin{cases}-3=-5k\\-4=2k\\1=-7k\end{cases} \text{ soit } \begin{cases}k=\dfrac{3}{5}\\k=-2\\k=\dfrac{-1}{7}\end{cases}$$

donc ce système est impossible.

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-3+4-1=0$, donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-5-2+7=0$, donc le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Ainsi le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Une équation du plan (ABC) est donc de la forme :

$1\times x+(-1)\times y+(-1)\times z+d=0$,

soit $x-y-z+d=0$.

Or C appartient à ce plan, donc $-4+3+d=0$

soit $d=1$.

Ainsi une équation cartésienne du plan (ABC) est $x-y-z+1=0$.

2. a) La droite d passe par le point O et admet le vecteur $\vec{n}(1;-1;-1)$ comme vecteur directeur.

Une représentation paramétrique de la droite d est donc :

$$\begin{cases}x=t\times 1+0\\y=t\times(-1)+0,\\z=t\times(-1)+0\end{cases} \text{ soit } \begin{cases}x=t\\y=-t.\\z=-t\end{cases}$$

b) Le point $O'(x\,;y\,;z)$ appartient au plan (ABC) et à la droite d, donc ses coordonnées vérifient

$$\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\\x-y-z=-1\end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\\3t=-1\end{cases} \text{ soit } \begin{cases}x=t\\y=-t\\z=-t\\t=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$$

et $O'\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

c) La distance du point O au plan (ABC) est égale à OO′

et $OO'=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

3. a) H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC) donc $\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HO})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Donc $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}+0$.

Ainsi $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=t\,\|\overrightarrow{BC}\|^2$.

On obtient $t=\dfrac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$.

b) $\overrightarrow{BO}(2\,;6\,;-5)$ et $\overrightarrow{BC}(-2\,;6\,;-8)$.

Donc $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=-4+36+40=72$

et $\|\overrightarrow{BC}\|^2=4+36+64=104$.

Ainsi $t=\dfrac{72}{104}=\dfrac{9}{13}$.

$\overrightarrow{BH}=\dfrac{9}{13}\overrightarrow{BC}$ donc les coordonnées du point H vérifient

$$\begin{cases}x+2=\dfrac{9}{13}\times(-2)\\y+6=\dfrac{9}{13}\times 6\\z-5=\dfrac{9}{13}\times(-8)\end{cases} \text{ soit } \begin{cases}x=-\dfrac{44}{13}\\y=-\dfrac{24}{13}.\\z=-\dfrac{7}{13}\end{cases}$$

Donc $H\left(-\dfrac{44}{13};-\dfrac{24}{13};-\dfrac{7}{13}\right)$.

La distance du point O à la droite (BC) est égale à OH

et $OH=\sqrt{\left(-\dfrac{44}{13}\right)^2+\left(-\dfrac{24}{13}\right)^2+\left(-\dfrac{7}{13}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{197}{13}}$.

2 **1.** Il y a $\dbinom{50}{5}=\dfrac{50!}{5!\times(50-5)!}=2\,118\,760$ groupes différents de 5 coureurs.

2. Un coureur étant choisi, il y a $\dbinom{49}{4}$ groupes de 5 coureurs constitués de ce coureur et de 4 autres coureurs différents sur les 49 restants.

La probabilité pour qu'un coureur choisi au hasard subisse le contrôle prévu pour cette étape est donc égale à :

$$\frac{\dbinom{49}{4}}{\dbinom{50}{5}}=\frac{49!}{4!\times 45!}\times\frac{5!\times 45!}{50!}=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}=0{,}1.$$

3. a) On choisit au hasard un coureur lors d'une étape. La probabilité qu'il subisse un contrôle est alors égale à 0,1.

On répète cette épreuve de Bernoulli 10 fois dans des conditions d'indépendance.

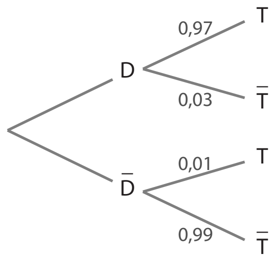
La variable aléatoire X qui donne le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des

10 étapes de la course suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}1$.

b) $P(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}9^{10} \approx 0{,}651\,3$.

La probabilité que le coureur ait été contrôlé au moins une fois est environ égale à 0,651 3.

4. a) On schématise la situation par l'arbre suivant :



D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(T \cap D) + P(\overline{T} \cap D).$$

Soit $0{,}05 = P(D) \times 0{,}97 + (1 - P(D)) \times 0{,}01$.

Ainsi $0{,}96 \times P(D) = 0{,}04$ et $P(D) = \dfrac{0{,}04}{0{,}96} = \dfrac{1}{24}$.

b) $P_T(\overline{D}) = \dfrac{P(T \cap \overline{D})}{P(T)} = \dfrac{0{,}01\left(1 - \dfrac{1}{24}\right)}{0{,}05} = \dfrac{23}{120}$.

3 **1. a)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln(x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{1 \times \ln(x) - \dfrac{1}{x} \times x}{(\ln(x))^2} = \dfrac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$.

Pour tout réel $x > 1$, $(\ln(x))^2 > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $\ln(x) - 1$.

$\ln(x) - 1 > 0$ équivaut à $\ln(x) > 1$ soit $x > e$.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

c) f est croissante sur $]e\,;+\infty[$ donc si $x \geqslant e$, $f(x) \geqslant f(e)$ et $f(x) \geqslant e$.

2. a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant e$.

• **Initialisation :** $u_0 = 5 > e$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel k, $u_k \geqslant e$, alors d'après la question **1. c)**, $f(u_k) \geqslant e$ et $u_{k+1} \geqslant e$.

La propriété est donc vraie à l'ordre $k + 1$.

• **Conclusion :** pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant e$.

b) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

Donc pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\ln(u_n)} - u_n = \frac{u_n - u_n \ln(u_n)}{\ln(u_n)}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - \ln(u_n))}{\ln(u_n)}.$$

Or pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant e > 0$ et $\ln(u_n) > \ln(e)$ soit $\ln(u_n) > 1 > 0$ et donc $1 - \ln(u_n) < 0$.

Ainsi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par e, donc elle converge vers une limite ℓ.

ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ soit $\dfrac{\ell}{\ln(\ell)} = \ell$ c'est-à-dire $1 = \dfrac{1}{\ln(\ell)}$.

Ainsi $\ln(\ell) = 1$ et $\ell = e$.

La suite (u_n) converge donc vers e.

3.

$u > 2{,}72$		Vrai	Vrai	Vrai	Faux
u	5	3,107	2,741	2,718	
n	0	1	2	3	

La variable n contient la valeur 3 à la fin de l'exécution de l'algorithme.

4 **Partie A**

1. $\lim\limits_{t \to +\infty} -\dfrac{t}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$.

La droite d'équation $y = 20$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et pour tout réel , $f'(t) = -100e^{-\frac{t}{2}} < 0$.

t	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	220	↘	20

3. La fonction f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $f''(t) = 50e^{-\frac{t}{2}} > 0$.

La fonction f est donc convexe sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B

1. a) Pour tout réel $t \geqslant 0$, $u'(t) = 0$,

donc $u'(t) + \dfrac{1}{2}u(t) = 0 + \dfrac{1}{2} \times 20 = 10$.

u est bien une solution de l'équation **(E)**.

b) v est solution de **(E)** si, et seulement si, $v' + \dfrac{1}{2}v = 10$.

Or $u' + \frac{1}{2}u = 10$, ainsi v est solution de **(E)** si, et seulement si, $v' - u' + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u = 0$, c'est-à-dire $(v-u)' + \frac{1}{2}(v-u) = 0$. Autrement dit, v est solution de **(E)** si, et seulement si, $v - u$ est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$.

c) Les solutions de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$ soit $y' = -\frac{1}{2}y$ sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto k\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

Ainsi les solutions de l'équation **(E)** sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto k\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

2. f est une solution de l'équation **(E)** donc il existe un nombre réel k tel que pour tout réel $t \geqslant 0$,

$f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$.

Or $f(0) = 220$ donc $k + 20 = 220$ et $k = 200$.

On en déduit que pour tout réel $t \geqslant 0$,

$f(t) = 200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20$.

3. $f(t) = 50$ équivaut à $200\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} + 20 = 50$

soit $\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = \frac{3}{20}$, c'est-à-dire $-\frac{t}{2} = \ln\left(\frac{3}{20}\right)$.

Ainsi $t = -2\ln\left(\frac{3}{20}\right) \approx 3{,}79$.

L'objet atteint une température de 50 °C au bout de 3 h 47 min.

4. La fonction f est décroissante et convexe sur $[0\,;+\infty[$. Camille a donc raison.

Partie C

1. a) $d_0 \approx 78{,}7$, $d_1 \approx 47{,}7$, $d_2 \approx 28{,}9$.

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$, donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 20$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.

2. $d_n \leqslant 5$ équivaut à $200\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} - 200\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}} \leqslant 5$ soit $200\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant 5$ ou encore $40\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{n}{2}}$.

Ainsi $\ln\left[40\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant \frac{n}{2}$ et $2\ln\left[40\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \leqslant n$.

Or $2\ln\left[40\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \approx 5{,}5$ ainsi la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5 °C est donc $n = 6$.

Sujet n° 4

1 **a)** Pour aller de O en A, il faut se déplacer une fois vers le nord et 4 fois vers l'est. Les chemins permettant de se rendre en A sont : NEEEE, ENEEE, EENEE, EEENE et EEEEN.

b) Pour aller de O en M, il faut se déplacer q fois vers le nord et p fois vers l'est. Un chemin allant de O à M comporte pE et qN ; sa longueur est donc égale à $p + q$.

c) Le nombre de chemins différents permettant d'arriver au point M(p ; q) est égal au nombre de façons de positionner les p lettres E dans le chemin de $p + q$ lettres. Il y a donc $\binom{p+q}{p}$ chemins différents permettant d'arriver au point M.

d) Le nombre de chemins arrivant au point (7 ; 5) est égal à :

$$\binom{7+5}{7} = \frac{12!}{7! \times 5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792.$$

e) Il y a 5 chemins amenant à A. Le nombre de chemins allant de A à C est le même que le nombre de chemins allant de O au point de coordonnées $(7-4\,;5-1) = (3\,;4)$. Il y a donc $5 \times 35 = 175$ chemins allant en C en passant par A.

2. a) On choisit au hasard un chemin de longueur 5 suivi par le promeneur.

À chaque intersection, la probabilité que le promeneur aille vers le nord est alors égale à $\frac{2}{3}$.

On répète cette épreuve de Bernoulli 5 fois dans des conditions d'indépendance.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de fois où le promeneur va vers le nord suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{2}{3}$.

b) $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = \binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4$

Donc $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = 5 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^4} = \frac{10}{3^5} = \frac{10}{243}$.

2 **1.** L'affirmation est fausse. En effet,

$$\begin{aligned} 2(1+t) - (5-4t) + 3(2-2t) - 1 &= 2 + 2t - 5 + 4t + 6 - 6t - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

et $2 \neq 0$.

2. L'affirmation est vraie. En effet, un vecteur directeur de d_1 est $\overrightarrow{u_1}(1;-4;-2)$; un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{u_2}(-1;4;2)$.

$\overrightarrow{u_2}=-\overrightarrow{u_1}$, ces deux vecteurs sont colinéaires donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

De plus $\begin{cases}1=-t\\3=7+4t\\5=7+2t\end{cases}$ équivaut à $t=-1$ donc S appartient à la droite d_2.

3. L'affirmation est vraie. En effet, le vecteur $\vec{n}(2;-1;3)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

On note H le projeté orthogonal du point S sur le plan $\mathscr{P}$.

Une équation paramétrique de la droite (SH) est donc :

$\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=5+3t\end{cases}$ où t est un nombre réel.

Le point H appartient à la droite (SH) et au plan $\mathscr{P}$, ses coordonnées vérifient $\begin{cases}x=1+2t\\y=3-t\\z=5+3t\\2x-y+3z-1=0\end{cases}$.

Ainsi $2(1+2t)-(3-t)+3(5+3t)-1=0$,

soit $2+4t-3+t+15+9t-1=0$ et $t=-\dfrac{13}{14}$.

On obtient $\begin{cases}x=1+2\times\left(-\dfrac{13}{14}\right)\\y=3-\left(-\dfrac{13}{14}\right)\\z=5+3\left(-\dfrac{13}{14}\right)\end{cases}$.

Les coordonnées du point H sont donc $\left(-\dfrac{6}{7};\dfrac{55}{14};\dfrac{31}{14}\right)$.

4. L'affirmation est fausse. En effet, la distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est égale à SH. Et

$$\text{SH}=\sqrt{\left(-\frac{6}{7}-1\right)^2+\left(\frac{55}{14}-3\right)^2+\left(-\frac{31}{14}-5\right)^2}=\frac{13}{\sqrt{14}}.$$

Or $\dfrac{13}{\sqrt{14}}\approx 3{,}4$, donc SH >3.

La distance du point S au plan $\mathscr{P}$ est supérieure au rayon de la sphère, donc le plan $\mathscr{P}$ ne coupe pas la sphère de centre S et de rayon 3.

3 Partie A

La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant 0$, $f'(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$.

Or $f'(x)\geqslant 0$ équivaut à $1-\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$ soit $\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1$ ou encore $-x\leqslant \ln(1)$ c'est-à-dire $x\geqslant 0$.

La fonction f est donc croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B

1. a)

```
from math import*

def U(n):
    u=0
    for i in range (2,n+1):
        u=u+exp(-u)
    return u
```

b) On obtient l'affichage

```
>>> U(4)
1.6225258212150249
```

La commande U(4) renvoie donc le nombre 1,62.

2. a) La fonction g est deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant 0$,

$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et $g''(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}$.

Pour tout réel $x\geqslant 0$, $(1+x)^2>0$ et $g''(x)<0$.

La fonction g est donc concave sur $[0\,;+\infty[$.

b) Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0 est $y=g'(0)(x-0)+g(0)$ soit $y=x$.

c) La fonction g est concave sur $[0\,;+\infty[$, sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ est donc située au-dessous de ses tangentes sur $[0\,;+\infty[$.

En particulier, pour tout réel $x\geqslant 0$, $g(x)\leqslant x$ et $\ln(1+x)\leqslant x$.

3. a) Pour tout réel $x\geqslant 0$, $\ln(1+x)\leqslant x$, donc pour tout entier $n\geqslant 1$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\leqslant\dfrac{1}{n}$ soit $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\leqslant\dfrac{1}{n}$.

Donc pour tout entier $n\geqslant 1$, $\ln(n+1)-\ln(n)\leqslant\dfrac{1}{n}$ et $\ln(n+1)\leqslant\ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

b) Pour tout entier $n\geqslant 1$,

$f(\ln(n))=\ln(n)+\mathrm{e}^{-\ln(n)}=\ln(n)+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}=\ln(n)+\dfrac{1}{n}$.

c) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\ln(n)\leqslant u_n$.

• **Initialisation :** $\ln(1)=0$ et $u_1=0$.

La propriété est vraie pour $n=1$.

• **Hérédité :** on suppose que pour un entier $k\geqslant 1$, $\ln(k)\leqslant u_k$.

$f(\ln(k))\leqslant f(u_k)$ car la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Donc $\ln(k)+\dfrac{1}{k}\leqslant f(u_k)$ et $\ln(k)+\dfrac{1}{k}\leqslant u_{k+1}$.

Or pour tout entier $n\geqslant 1$, $\ln(n+1)\leqslant\ln(n)+\dfrac{1}{n}$, ainsi $\ln(k+1)\leqslant u_{k+1}$.

La propriété est donc vraie à l'ordre $k+1$.

• **Conclusion :** pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $\ln(n)\leqslant u_n$.

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$,

donc par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Ainsi la suite (u_n) diverge.

4 Partie A

1. Les solutions de l'équation **(E_0)** sur $[0\,;+\infty[$ sont les fonctions $t \mapsto k\mathrm{e}^{-2t}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

2. La fonction h est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$,

Ainsi $h'(t) + 2h(t) = (2-4t)\mathrm{e}^{-2t} + 4t\mathrm{e}^{-2t} = 2\mathrm{e}^{-2t}$ donc la fonction h est une solution de **(E)**.

3. g est solution de **(E)** si, et seulement si, $g' + 2g = 2\mathrm{e}^{-2t}$.

Or $h' + 2h = 2\mathrm{e}^{-2t}$, ainsi g est solution de **(E)** si, et seulement si, $g' - h' + 2g - 2h = 0$, c'est-à-dire $(g-h)' + 2(g-h) = 0$. Autrement dit, g est solution de **(E)** si, et seulement si, $g - h$ est solution de **(E_0)**.

4. Les solutions de l'équation **(E)** sur $[0\,;+\infty[$ sont donc les fonctions $t \mapsto k\mathrm{e}^{-2t} + 2t\mathrm{e}^{-2t}$ définies sur $[0\,;+\infty[$ où k est un nombre réel.

5. f est une solution de l'équation **(E)** donc il existe un nombre réel k tel que pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = (k+2t)\mathrm{e}^{-2t}$.

Or $f(0) = 1$ donc $k\mathrm{e}^{0} = 1$ et $k = 1$. On obtient pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) = (1+2t)\mathrm{e}^{-2t}$.

Partie B

1. a) $f(t) = (1+2t)\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{2t}{\mathrm{e}^{2t}}$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} -2t = -\infty$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{2t}{\mathrm{e}^{2t}} = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$,

$f'(t) = 2 \times \mathrm{e}^{-2t} + (1+2t) \times (-2)\mathrm{e}^{-2t} = -4t\mathrm{e}^{-2t}$.

Pour tout réel $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-2t} > 0$, $f'(t)$ est donc du signe de $-4t$.

On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	0	$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	0

2. a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$. $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

0,25 est compris entre 0 et 1, donc d'après la conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 0{,}25$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty[$.

b) À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$1{,}34 \leqslant \alpha \leqslant 1{,}35$.

Partie C

1. $g(1) = 1 - f(1) = 1 - 3\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}59$.

Le taux de défaillance du réfractomètre est d'environ 59 % au bout d'une heure.

2. $g(t) < 0{,}75$ équivaut à $1 - f(t) < 0{,}75$

soit $f(t) > 0{,}25$.

D'après la question **2.** de la **Partie B**, on en déduit que la durée d'utilisation du réfractomètre est d'environ 1,34 h.

Édition : Julien Lionnet, Romain Houette, Lîlâ Louvet
Composition : DESK (www.desk53.com.fr)
Schémas : DESK

MIXTE
Papier issu de sources responsables
FSC® C022030
www.fsc.org

Nathan est un éditeur qui s'engage pour la préservation de son environnement et qui utilise du papier composé de fibres naturelles, renouvelables, fabriquées à partir de bois provenant de forêts gérées de manière responsable et contrôlée.