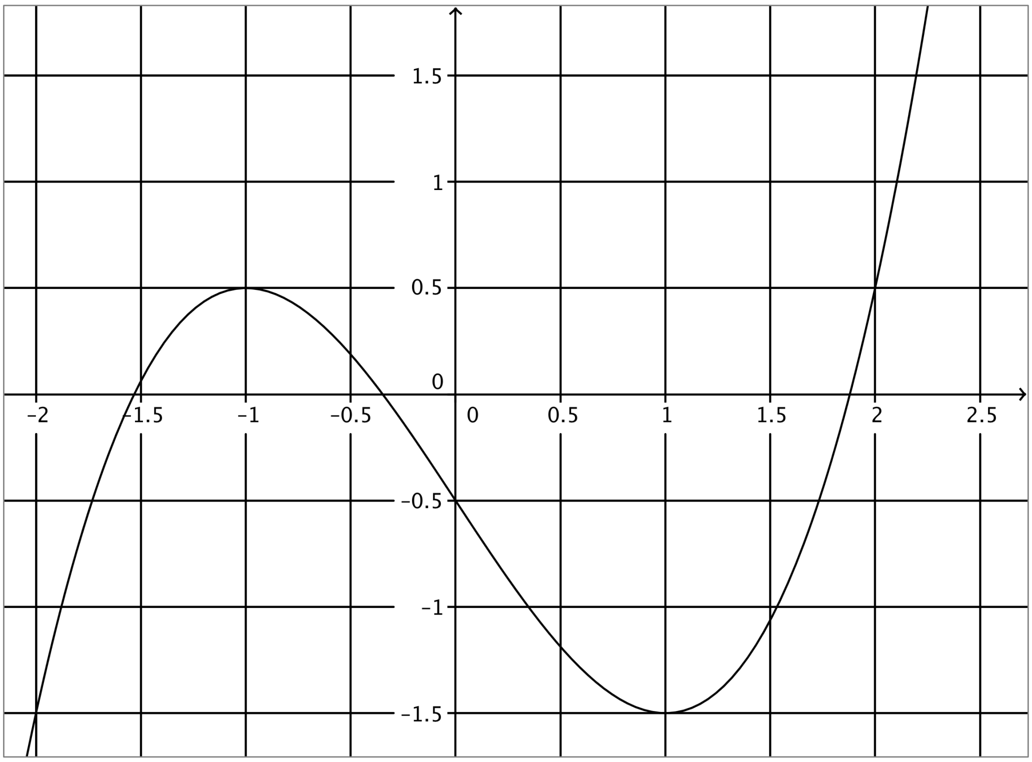
Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f une fonction définie et continue sur un intervalle [a ; b] et si k est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle [a ; b].

EXERCICE 1

On considère la fonction f représentée par la courbe ci-dessous.



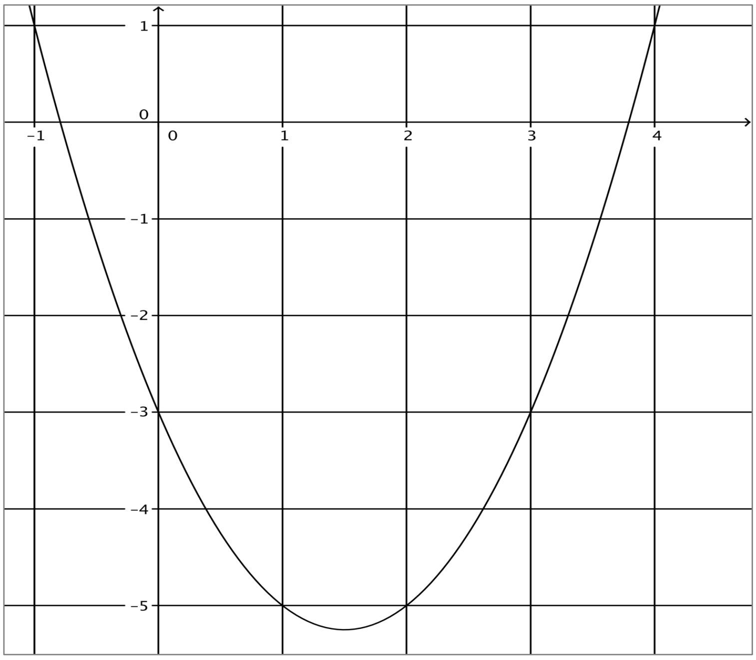
1. La fonction f est-elle définie et continue sur l'intervalle [-2 ; 2] ?
2. Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 2].
3. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = -0{,}5$ admet au moins une solution sur l'intervalle [-2 ; 2].

Corollaire

Si f est une fonction définie, continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle [a ; b] et si k un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle [a ; b].

Problème 2

Soit f la fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 3x - 3$, représentée ci-dessous.



1. La fonction f est-elle définie et continue sur l'intervalle [2 ; 4] ?
2. Donner le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 4].
3. Démontrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur l'intervalle [2 ; 4].
4. A l'aide de la calculatrice, indiquer une valeur approchée à 0,01 près du nombre α.

Problème 3

Soit f la fonction définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-10; 10]$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près en utilisant la calculatrice.
4. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.