Droites de l'espace

Question 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la droite (D) caractérisée analytiquement par le système :

$$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ 3x - y + 5z + 4 = 0 \end{cases}$$

Déterminons un point et un vecteur directeur de la droite (D).

Tous les points M(x ; y ; z) de la droite (D), dans l'espace à trois dimensions, ont leurs trois coordonnées qui vérifient les deux équations stipulées dans le système.

Posons arbitrairement <u>z = 0</u>. Autrement dit, déterminons s'il existe un point de l'espace appartenant à la droite (D) qui a pour élévation z = 0, c'est-à-dire qui se trouve dans le plan (O ; x, y) horizontal de l'espace. Recherchons tout simplement les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et du plan horizontal (O ; x, y) si toutefois un tel point existe. La seule possibilité pour qu'un tel point n'existe pas serait que la droite (D) soit parallèle au plan (O ; x, y), c'est-à-dire soit horizontale.

Pour z = 0, le système devient :

$$(S) \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases}$$

Or $(S) \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \ (E_1) \\ 3x - y = -4 \ (E_2) \end{cases} \overset{(E_1)+(E_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 2 \ (E_1) \\ 4x = -2 \ (E_1) + (E_2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Conclusion, la droite comporte un point dont les coordonnées sont $\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}, 0\right)$.

Nous le noterons A.

Posons maintenant <u>x = 0</u>. Autrement dit, déterminons s'il existe un point de l'espace appartenant à la droite (D) qui se trouve dans le plan (O ; y, z) vertical de l'espace. Recherchons les coordonnées du point d'intersection de la droite (D) et du plan horizontal (O ; y, z) si toutefois il existe. La seule possibilité pour qu'il n'existe pas serait que la droite (D) soit parallèle au plan (O ; y, z), c'est-à-dire soit verticale.

Pour x = 0, le système devient :

$$(S)\begin{cases} y+z-2=0 \\ -y+5z+4=0 \end{cases}$$

Or $(S)\begin{cases} y+z-2=0 \\ -y+5z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=2\ (E_1) \\ -y+5z=-4\ (E_2) \end{cases} \overset{(E_1)+(E_2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y+z=2\ (E_1) \\ 6z=-2\ (E_1)+(E_2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{7}{3} \\ z=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Conclusion, la droite comporte un point dont les coordonnées sont $\left(0\,;\frac{7}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

Nous le noterons B.

Déterminons un vecteur directeur de la droite (D).

Il va de soi que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) puisque A et B sont deux points de la droite (D).

Déterminons $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 0-\left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{7}{3}-\dfrac{5}{2} \\ -\dfrac{1}{3}-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs colinéaires, tous deux vecteurs directeurs de la droite (D). Le vecteur $\vec{u}$ ayant des coordonnées entières plus simples que celles du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on le préférera dans les éventuels calculs.

Remarque

Il va de soi qu'il appartient à chacun de s'amuser avec les écritures posées en hypothèses. Il est important de choisir d'autres valeurs que z = 0 et x = 0 pour obtenir les coordonnées d'autres points de la droite (D), calculer d'autres vecteurs directeurs et se convaincre qu'ils sont naturellement tous colinéaires.

Elle est pas belle la vie ?

Kurt VONNEGUT