Droites de l'espace

Question 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la droite (D') représentée d'une manière paramétrique par :

$$\begin{cases} x = -t + 3 \\ y = 3t - 4 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

Déterminons les coordonnées cartésiennes de deux points de la droite (D'), puis les coordonnées vectorielles d'un vecteur directeur de la droite (D').

Tous les points M(x ; y ; z) de la droite (D'), dans l'espace à trois dimensions, ont leurs trois coordonnées qui vérifient les trois relations paramétriques ci-dessus. Autrement dit, chacune des coordonnées x, y et z d'un point de la droite dépend d'un unique paramètre t, lequel est un nombre réel, selon les relations stipulées. Le fait que la détermination des trois coordonnées d'un point M de la droite (D') ne dépende que d'un seul paramètre fait de la droite (D') un objet de dimension 1. Courbes et droites de l'espace sont toutes des objets de dimension 1. Les plans ou les nappes sont de dimension 2, un point étant de dimension 0 et un espace de dimension 3, comme détaillé en cours de mathématiques.

Le choix de certaines valeurs s'impose naturellement pour t.
Ici, les valeurs 0, 3, -3 s'imposent de facto si l'on souhaite obtenir des calculs simples.

Pour t = 0, on obtient : $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4. \\ z = 3 \end{cases}$ Par conséquent, le point de coordonnées (3 ; -4 ; 3) appartient à la droite (D'). On le notera A, par exemple.

Pour t = 3, on obtient : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5. \\ z = 6 \end{cases}$ Par conséquent, le point de coordonnées (0 ; 5 ; 6) appartient à la droite (D'). On le notera B, par exemple.

Pour t = -3, on obtient : $\begin{cases} x = 6 \\ y = -13 \\ z = 0 \end{cases}$. Par conséquent, le point de coordonnées (6 ; -13 ; 0) appartient à la droite (D'). On le notera C, par exemple.

Déterminons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 5-(-4) \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ -4-(-13) \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ -13-5 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ -6 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Des calculs ci-dessus, nous observons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont tous colinéaires, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant un vecteur particulièrement intéressant car il possède des coordonnées entières simples, chose pratique dans les éventuels calculs.

Elle est pas belle la vie ?

Kurt VONNEGUT