

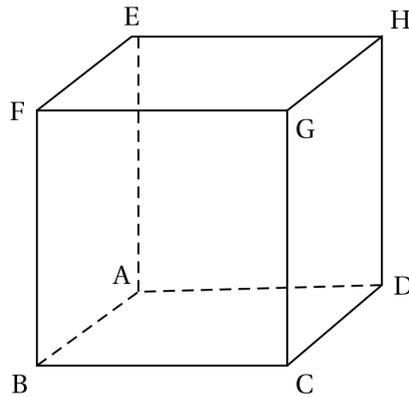
correction d'exercice

Exercice 1

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormal $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$.

On considère les points $I\left(1; \frac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \frac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

1. Pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $M \in (IJ) \Leftrightarrow \vec{IM}$ et \vec{IJ} sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \text{Il existe un réel } t \text{ tel que } \vec{IM} = t\vec{IJ} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - \frac{1}{3} \\ z - 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -t \\ y - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

Le système ci-dessus est une représentation paramétrique de la droite (IJ). Ces trois relations donnent, pour une valeur du réel t , chacune des trois coordonnées d'un point de la droite (IJ).

2. Démontrons que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{4} = t' \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ y - 0 = t' \\ z - 1 = -t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{4} = t' \times \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ y - 0 = t' \times 1 \\ z - 1 = t' \times (-1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{3}{4} \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} a - \frac{3}{4} \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{3}{4} \\ y - 0 \\ z - 1 \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} a - \frac{3}{4} \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} = t' \overrightarrow{KL} \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KM}$ et \overrightarrow{KL} sont colinéaires \Leftrightarrow Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, $M \in (KL)$.

Conclusion

La représentation paramétrique proposée est bien une représentation paramétrique de la droite (KL).

3. Démonstration de l'implication réciproque \Leftarrow .

Démontrons que si $a = \frac{1}{4}$, alors les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.

Si $a = \frac{1}{4}$, alors les droites (IJ) et (KL) ont pour représentations paramétriques

respectives les deux représentations suivantes :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$$

Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement s'il existe un point de coordonnées (x ; y ; z) vérifiant les deux représentations paramétriques.

En identifiant deux à deux les coordonnées x , y et z des deux représentations, nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = t' \\ t = 1 - t' \end{cases}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = t' \\ t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ 1 + t = 3t' \\ 1 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}t' \\ 1 + t = 3t' \\ 1 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t' = 3 - 2t' \\ 1 + t = 3t' \\ 1 - t = t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6t' = 3 \\ 1 + t = 3t' \\ 1 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ 1 + t = \frac{3}{2} \\ 1 - t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc, les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en un point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Démonstration de l'implication directe \Rightarrow .

Pour démontrer que si les droites (IJ) et (KL) sont sécantes, alors $a = \frac{1}{4}$, il suffit d'identifier deux à deux les coordonnées x , y et z des deux représentations afin de déterminer s'il existe un point d'intersection, ce qui conduit au résultat $a = \frac{1}{4}$.