correction d'exercice

Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(-1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t-1 \\ y &=& -3t+2 \\ z &=& t \end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{D}'\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t' \\ y &=& t'+2 \\ z &=& 3t'-2 \end{array}\right. \text{ où } t' \in \mathbb{R}$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$ ».
Proposition 2 : « Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales ».
Proposition 3 : « Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires ».

Proposition 1.

Déterminons si le point A(-1 ; -1 ; 1) appartient à la droite (D) de représentation paramétrique.

Si A ∈ (D), alors les coordonnées (-1 ; -1 ; 1) vérifient les trois relations figurant dans la représentation paramétrique ci-dessous :

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases}$$

Autrement dit, on doit pouvoir écrire $\begin{cases} -1 = 2t - 1 \\ -1 = -3t + 2 \\ 1 = t \end{cases}$ sans qu'aucune contradiction ou absurdité n'infirme ces égalités.

Or $\begin{cases} -1 = 2t - 1 \\ -1 = -3t + 2 \\ 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 0 \\ -3t = -3 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$, ce qui est absurde car, dans un tel cas, 0 = 1 !

<u>Conclusion</u>

La proposition 1 est fausse.

Proposition 2.

Déterminons si les droites (D) et (D') sont orthogonales.

Pour que deux droites soient orthogonales, il faut et il suffit que leurs vecteurs directeurs soient orthogonaux.

Déterminons un vecteur directeur de la droite (D) et un vecteur directeur de la droite (D').

Déterminons un vecteur directeur de la droite (D)

Les coordonnées de tout point de la droite (D) vérifient les relations :

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases}$$

Or : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (-1) = 2t \\ y - 2 = -3t \\ z - 0 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 2 \\ z - 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = t\vec{u}$ où B est le point de coordonnées (-1 ; 2 ; 0).

Conclusion

La droite (D) passe par B(-1 ; 2 ; 0) et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons un vecteur directeur de la droite (D')

Les coordonnées de tout point de la droite (D') vérifient les relations :

$$\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 2 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 3t' \\ y - 2 = t' \\ z - (-2) = 3t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \\ z - (-2) \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = t'\vec{v}$ où le point C est le point de coordonnées (0 ; 2 ; -2).

Conclusion

La droite (D') passe par C(0 ; 2 ; -2) et a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Déterminons maintenant si les droites (D) et (D') sont orthogonales.

Pour que les deux droites (D) et (D') soient orthogonales, il faut et il suffit que le produit scalaire de leurs deux vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit nul.

Calculons $\vec{u}.\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2(3) + (-3)(1) + 1(3) = 6 \ \neq 0.$$

Le produit scalaire des vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'est pas nul, donc les droites (D) et (D') ne sont pas orthogonales.

<u>Conclusion</u>

La proposition 2 est fausse.

Proposition 3.

Déterminons si les droites (D) et (D') sont coplanaires.

Pour que deux droites soient coplanaires, il faut et il suffit qu'elles soient confondues, parallèles ou sécantes.

Les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (D) et (D') ne peuvent <u>ni être confondues ni être parallèles</u>.

Déterminons si les droites (D) et (D') sont sécantes, c'est-à-dire s'il existe un point d'intersection qui vérifie les deux relations paramétriques.

Si les coordonnées d'un point du plan vérifient $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 2 \end{cases}$

Alors, on doit avoir : $\begin{cases} 2t - 1 = 3t' \\ -3t + 2 = t' + 2 \\ t = 3t' - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3t' = 1 \\ 3t + t' = 0 \\ t - 3t' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ 3t + t' = 0 \\ t - 3t' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} t = 3 \\ 9 + t' = 0 \\ t - 3t' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -9 \\ 3 - 3(9) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -9 \\ -24 = -2 \end{cases}$

La troisième relation "24 = 2" étant absurde, les deux droites ne peuvent pas être sécantes. Elles n'ont pas de point d'intersection.

<u>Conclusion</u>

La proposition 3 est fausse.

En résumé, tout est faux !