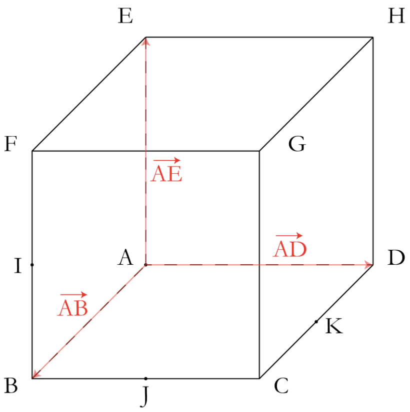
Problème 3 - Partie A

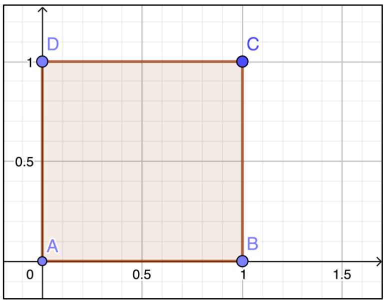
On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 ci-dessous et on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BF], [BC] et [CD].



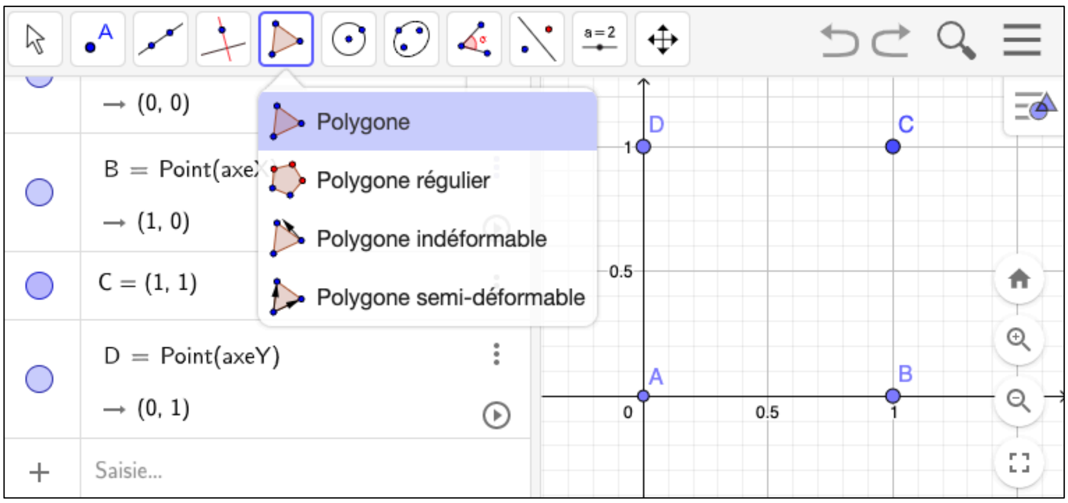
Le point L est le point d'intersection des droites (IJ) et (CG).

Partie A

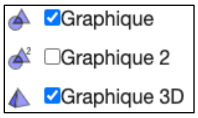
Il est utile de savoir utiliser le logiciel GeoGebra lorsque l'on veut représenter une figure de l'espace. Afin de représenter le cube ABCDEFGH, on représente tout d'abord dans le plan (figure 2D) un carré ABCD de côté 1, comme ci-dessous.

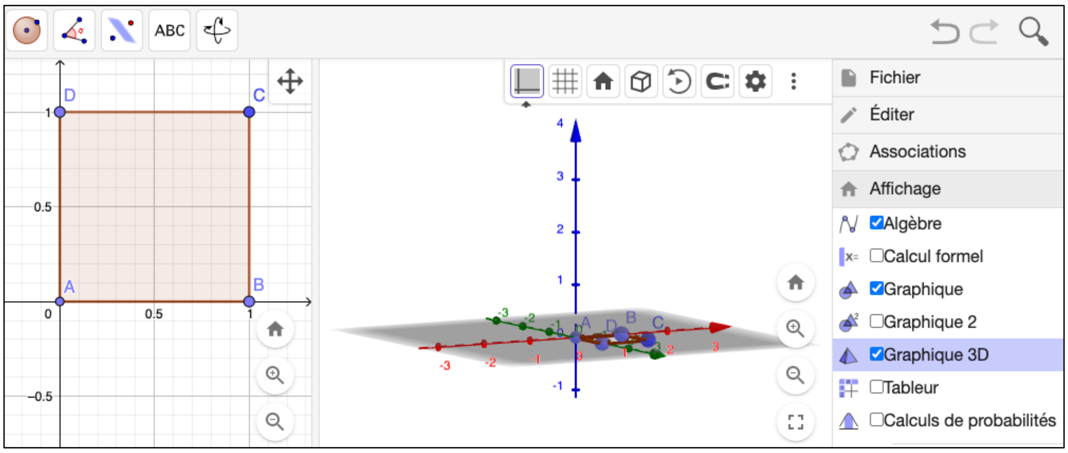


On crée manuellement les points A, B, C et D, puis on trace le carré ABCD en sélectionnant Polygone et en cliquant sur chacun des points A, B, C et D.



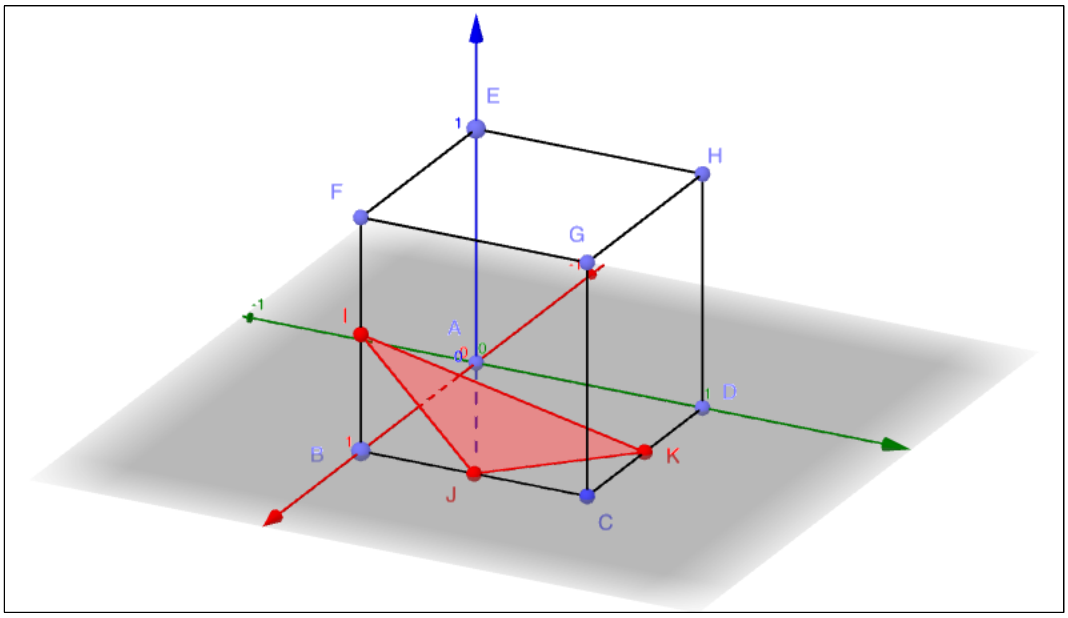
Ensuite, on active le mode Affichage "Graphique 3D", comme ci-dessous, pour obtenir une deuxième représentation 3D du carré.



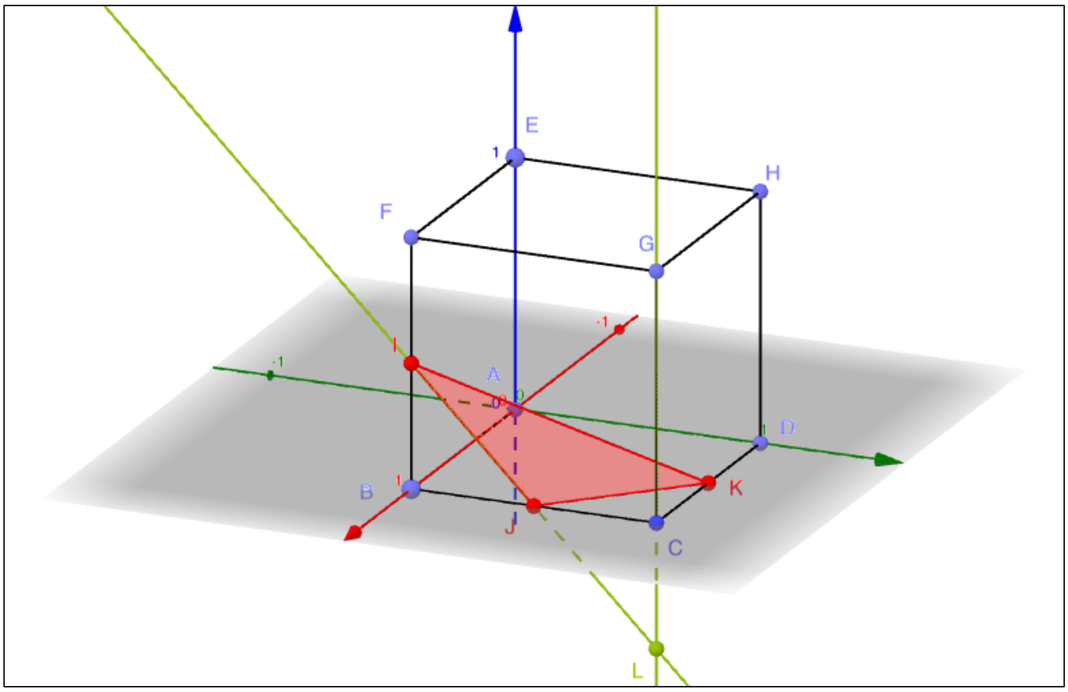


On place ensuite le point E(0 ; 0 ; 1) au-dessus du point A et, en sélectionnant Prisme, on construit instantanément le cube ABCDEFGH.

Puis, on construit les points I, J et K, ainsi que le polygone IJK, qui permet de visualiser une partie du plan (IJK).



Pour construire le point L, on construit les droites (IJ) et (CG), puis on construit le point d'intersection de ces deux droites, comme ci-dessous.

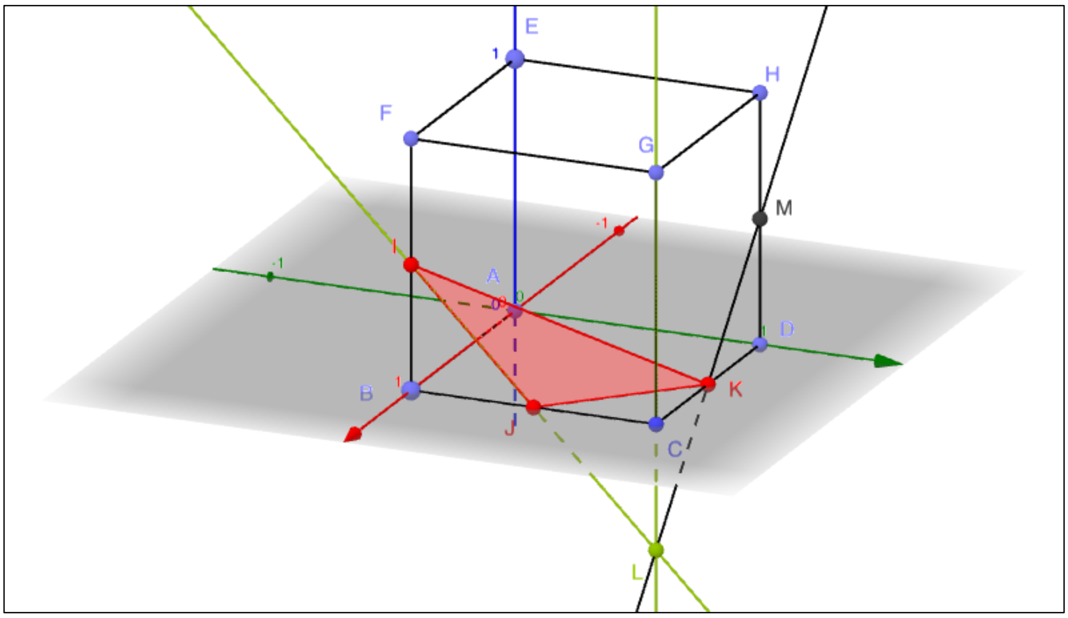


Le point L appartient au plan (IJK) puisqu'il est situé sur la droite (IJ). De plus, il appartient aussi au plan (CDH) car il est situé sur la droite (CG). Donc, L est un point de la droite suivant laquelle se coupent les plans (IJK) et (CDH).

Or K est un point du plan (IJK) et du plan (CDH), donc K est aussi un point de la droite d'intersection des plans (IJK) et (CDH).

<u>Conclusion</u>

La droite d'intersection des plans (IJK) et (CDH) est la droite (KL), ceci signifiant par ailleurs que tous les points de la droites (KL) sont situés dans le plan (IJK), en particulier le point M, point d'intersection des droites (KL) et (DH), comme ci-dessous.



Rappel de cours

Propriété 4

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

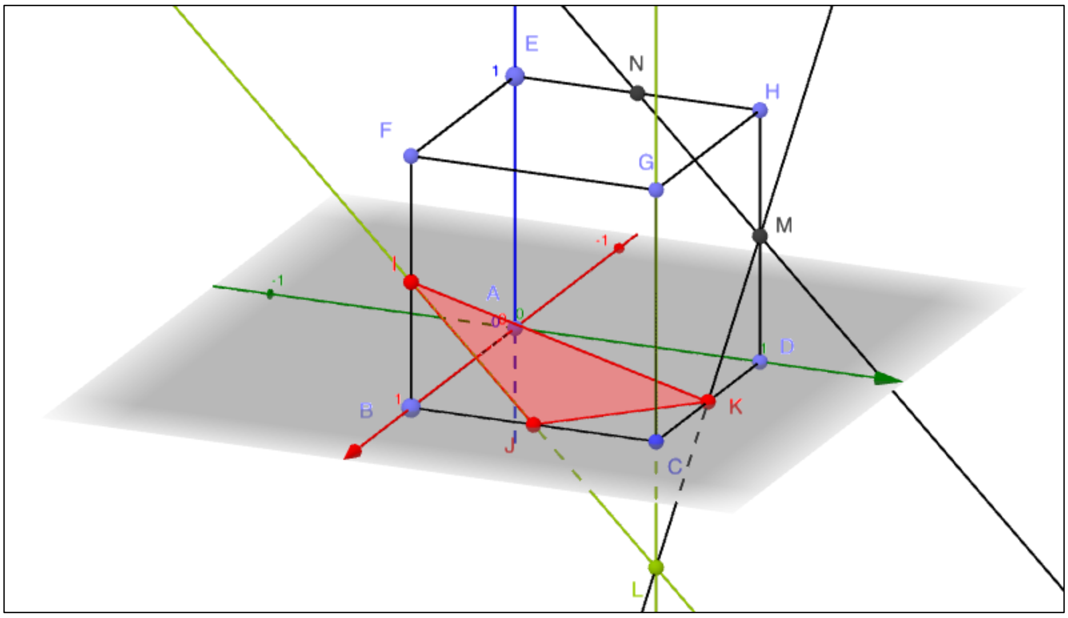
D'après la figure, les plans (BCG) et (ADH) sont parallèles.

De plus, le plan (IJK) coupe le plan (BCG) suivant la droite (IJ).

Donc, d'après la propriété mentionnée ci-avant, le plan (IJK) coupe le plan (ADH) suivant une droite parallèle à (IJ).

Or, nous savons que le point M appartient au plan (ADH) et au plan (IJK), c'est-à-dire à la droite d'intersection de ces deux plans.

Donc, en traçant la parallèle à la droite (IJ) passant par M, on trace la droite d'intersection des plans (IJK) et (ADH), comme ci-dessous.



Le point N ainsi obtenu est un point du plan (IJK).

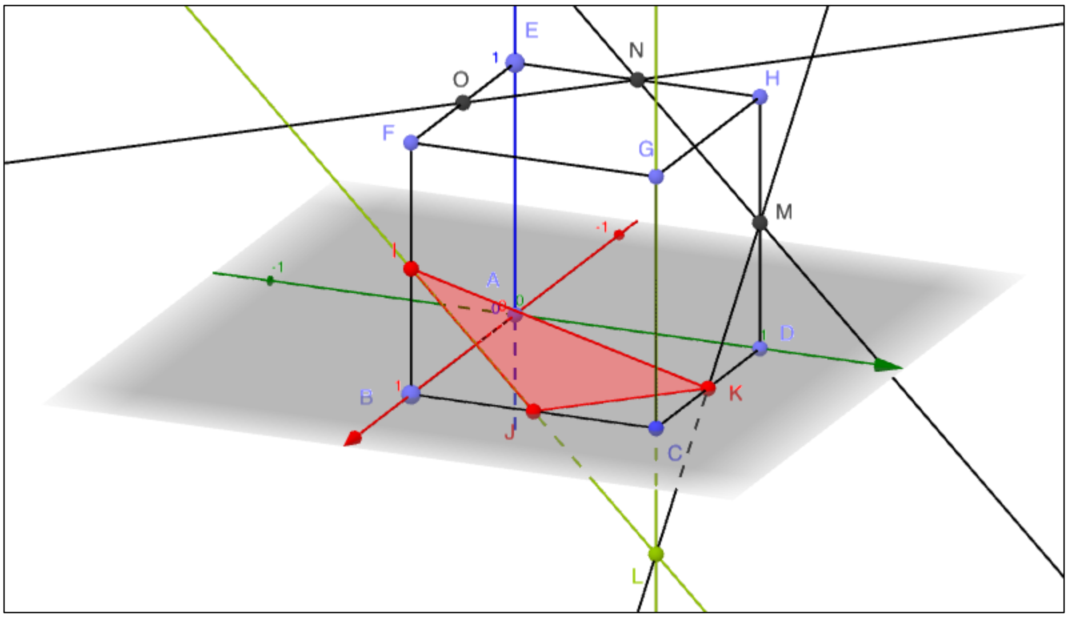
D'après la figure, les plans (BCD) et (FGH) sont parallèles.

De plus, le plan (IJK) coupe le plan (BCD) suivant la droite (JK).

Donc, d'après la propriété 4 mentionnée précédemment, le plan (IJK) coupe le plan (FGH) suivant une droite parallèle à (JK).

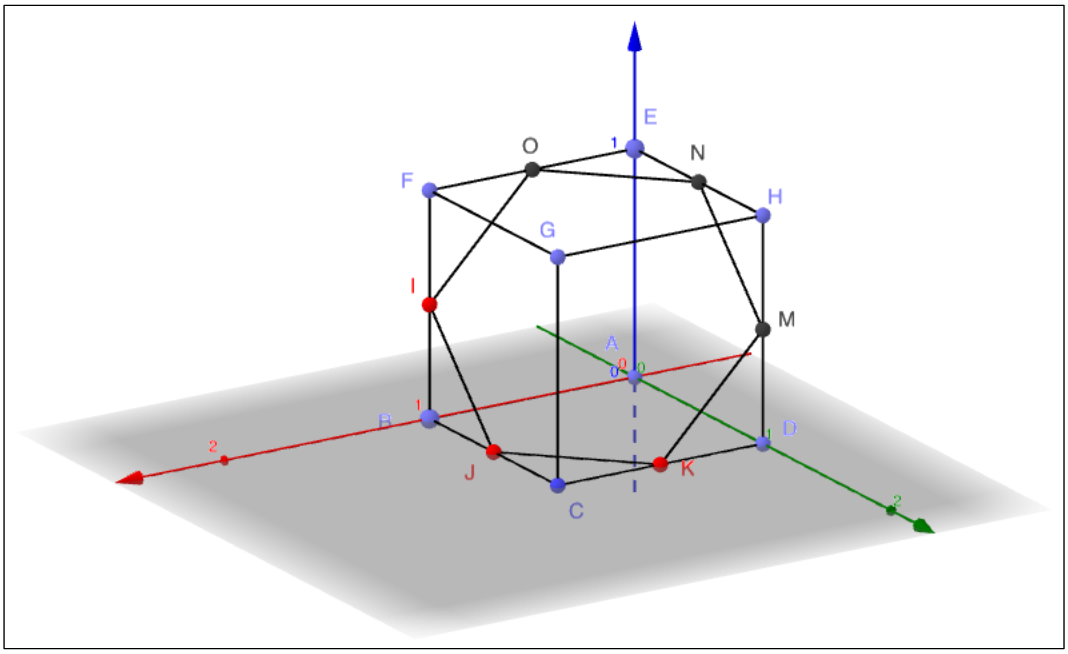
Or, nous savons que le point N appartient au plan (FGH) et au plan (IJK), c'est-à-dire à la droite d'intersection de ces deux plans.

Donc, en traçant la parallèle à la droite (JK) passant par N, on trace la droite d'intersection des plans (IJK) et (FGH), comme ci-dessous.



Le point O ainsi obtenu est un point du plan (IJK).

En reliant les points I, J, K, M, N, O et I, nous obtenons le tracé de la section suivant laquelle le plan (IJK) coupe le cube (ABCDEFGH).



Il n'est pas inutile de s'amuser à tracer la section d'un cube par un plan, ce type d'exercice exigeant méthode et réflexion.