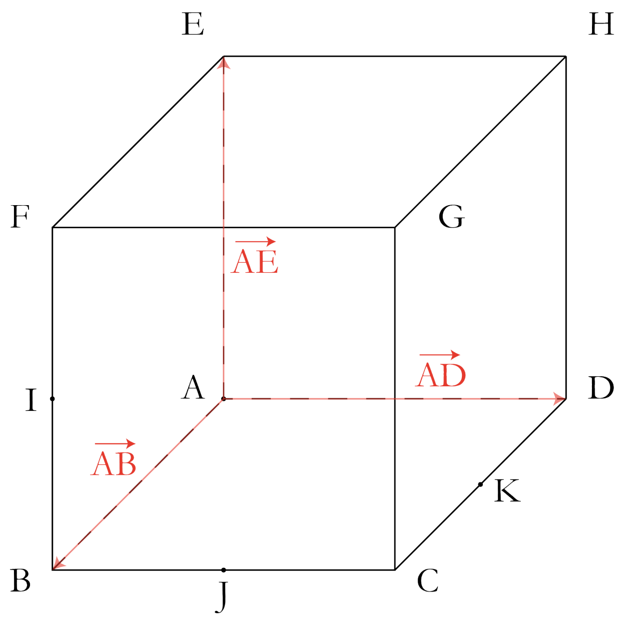
Problème 3 - Partie B

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 ci-dessous et on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [BF], [BC] et [CD].



Partie B

1. Tableau de données

Point	A	G	I	J	K
Coordonnées	(0 ; 0 ; 0)	(1 ; 1 ; 1)	(1 ; 0 ; 1/2)	(1 ; 1/2 ; 0)	(1/2 ; 1 ; 0)

2.a. Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan (IJK).

Pour démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan (IJK), il suffit de démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), par exemple aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$.

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$.

On a : $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De plus : $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ \frac{1}{2}-0 \\ 0-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Enfin : $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ 1-\frac{1}{2} \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Calculons $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{JK}$.

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1(0) + 1(1) + 1(-1)) = 0.$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1(1) + 1(-1) + 1(0)) = 0.$

<u>Conclusion</u>

$\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$, non colinéaires, du plan (IJK), c'est-à-dire que $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal au plan (IJK).

2.b. Déterminons une équation cartésienne du plan (IJK).

L'équation cartésienne d'un plan de l'espace s'écrit sous la forme ax + by + cz + d = 0 où a, b et c sont les coordonnées vectorielles d'un vecteur orthogonal au plan.

Comme $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan (IJK), une équation cartésienne du plan s'écrit sous la forme $x + y + z + d = 0$.

Déterminons la valeur du coefficient d.

I((1 ; 0 ; 1/2) ∈ (IJK)/ $x + y + z + d = 0$, donc : $1 + 0 + \frac{1}{2} + d = 0$, d'où : $\frac{3}{2} + d = 0$.

Donc : $d = -\frac{3}{2}$.

<u>Conclusion</u>

Une équation cartésienne du plan (IJK) est : $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$.

3.a. On donne $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$ avec $t \in [0; 1]$, c'est-à-dire que M ∈ [AG].

Démontrons que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

On a : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - t\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - t\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AI} - t\overrightarrow{AG}$

D'où : $\overrightarrow{MI}^2 = \overrightarrow{AI}^2 - 2\overrightarrow{AI}.t\overrightarrow{AG} + t^2\overrightarrow{AG}^2$ (obtenu en calculant $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI}$)

Or : $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, donc : $\overrightarrow{AI}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 + 0 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

De plus : $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc : $\overrightarrow{AG}^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$, d'où : $t^2\overrightarrow{AG}^2 = 3t^2$.

Enfin : $-2\overrightarrow{AI}.t\overrightarrow{AG} = -2\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -2t\left[1(1)+(0)(1)+\frac{1}{2}(1)\right] = -3t$

<u>Conclusion</u>

$MI^2 = \overrightarrow{MI}^2 = \frac{5}{4} - 3t + 3t^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$.

3.b. Démontrons que la distance MI est minimale lorsque le point M a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. On note ce point N.

La distance MI est minimale si et seulement si MI^2 est minimal.

Posons $MI^2 = f(t)$ avec $f(t) = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$ et étudions la fonction f.

Déterminons f '(t).

$f'(t) = 6t - 3 = 6\left(t - \frac{1}{2}\right)$

Tableau de variation de la fonction f

t	-∞ 1/2 +∞
Signe de (t - 1/2)	- 0 +
f(t)	↘ 1/2 ↗

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$

D'après le tableau ci-dessus, la fonction f admet un minimum pour $t = \frac{1}{2}$.

Donc, la distance MI est minimale lorsque $t = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas particulier, le point M est appelé N et l'on a : $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

D'où : $\begin{pmatrix}x_N\\y_N\\z_N\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

<u>Conclusion</u>

Le point du segment [AG] tel que la distance entre ce point et le point I est minimale est le point N$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

4.a. Démontrons que N $\in$ (IJK).

Une équation cartésienne du plan (IJK) étant $x + y + z - \frac{3}{2} = 0$, vérifions que les coordonnées du point N satisfont à cette équation.

On a : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$. Donc : $\mathrm{N}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \in$ (IJK).

4.b. Démontrons que (IN) $\perp$ (AG).

Cours : Deux droites de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si elles sont coplanaires et leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux (produit scalaire nul).

D'après la question 3, IN est la distance minimale entre la droite (AG) et le point I, donc N est le projeté orthogonal du point I sur la droite (AG).

Par conséquent, (IN) $\perp$ (AG).

Démontrons que (IN) $\perp$ (BF).

Les droites (IN) et (BF) se coupent en I car I $\in$ (BF). Ces deux droites sont donc coplanaires.

Démontrons que leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

On a : $\overrightarrow{IN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Et : $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'où : $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{IN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

(IN) et (BF) sont coplanaires et leurs vecteurs directeurs $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont orthogonaux

Par conséquent, (IN) $\perp$ (AG).