problème 1

On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère deux droites d₁ et d₂ définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

On admet que les droites d_1 et d_2 ne sont pas coplanaires.

préambule

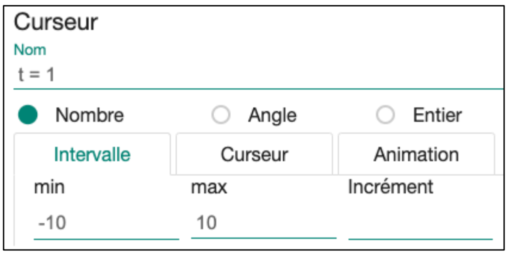
S'agissant d'un problème à résoudre à la maison, il est intéressant de visualiser la situation décrite à l'aide du logiciel GeoGebra en mode : Géométrie 3D

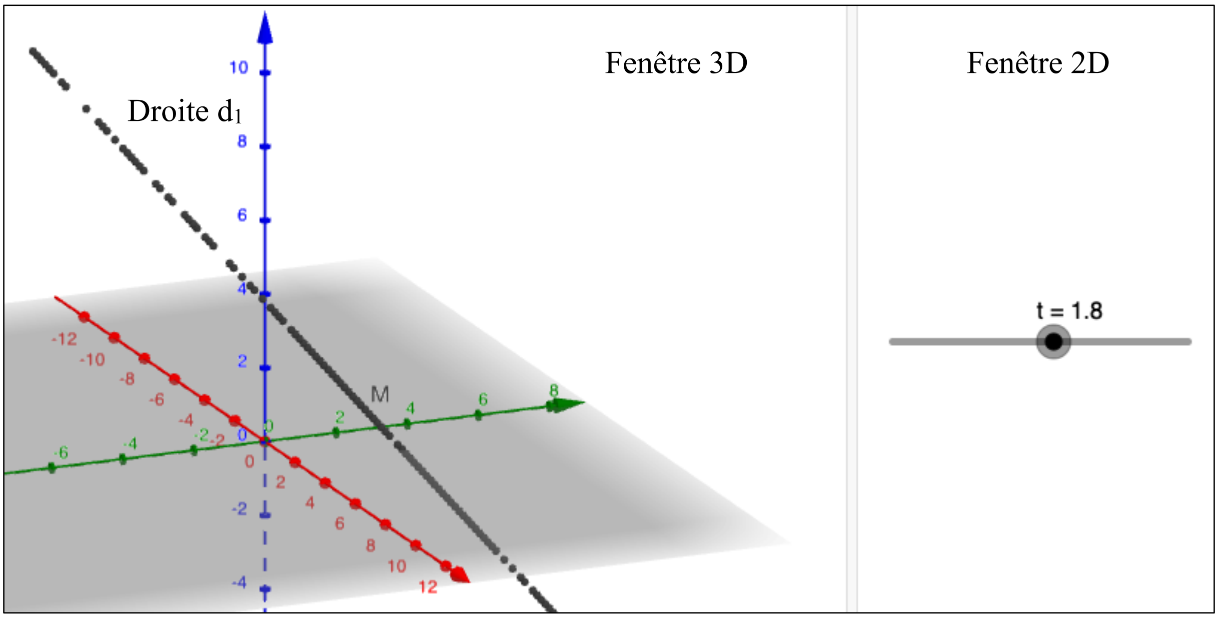
Pour visualiser la droite d_1 de l'espace, il suffirait de pouvoir créer un curseur qui permettrait de faire varier la valeur du paramètre t et de construire un point M(2 + t ; 3 - t ; t) de l'espace en tapant : M = (2 + t ; 3 - t ; t) dans la zone de saisie de GeoGebra. En activant ensuite le mode "trace" pour le point M et en faisant varier la valeur du paramètre t, nous visualiserions alors l'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$, c'est-à-dire la droite d_1.

Cependant, il semble qu'en mode 3D sous GeoGebra, il ne soit pas possible de créer un curseur comme en mode 2D.

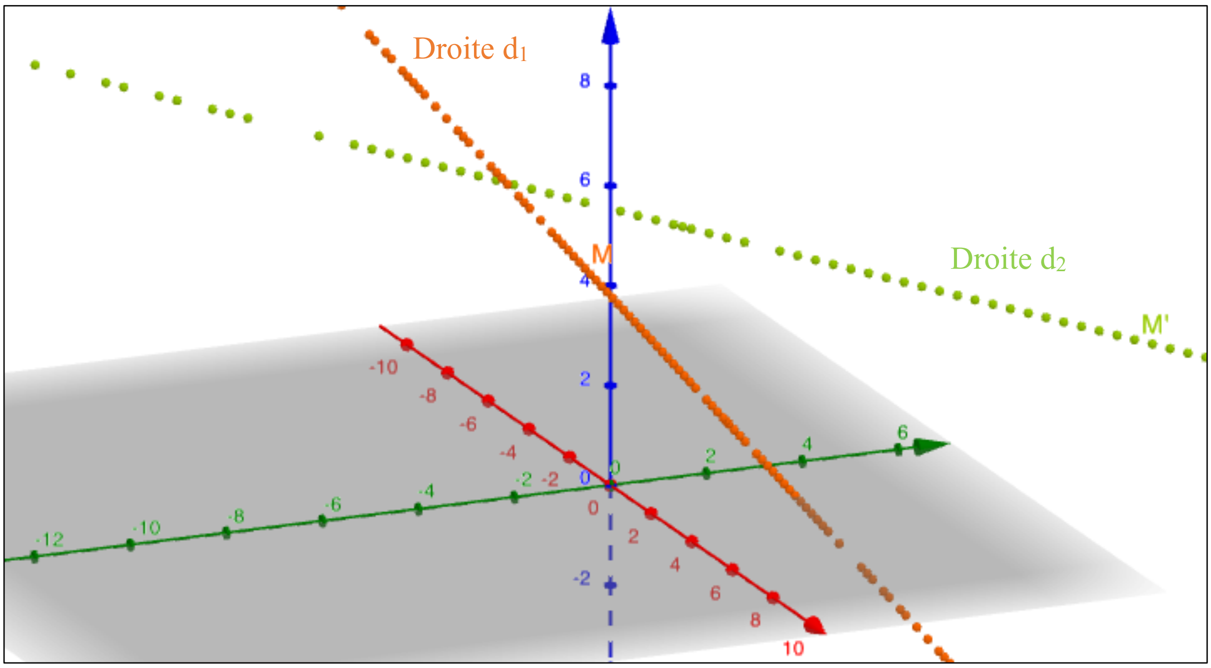
solution 1

On crée une figure 2D vierge sur laquelle on insère un curseur, puis une figure 3D dans laquelle on crée un point M de coordonnées (2 + t ; 3 - t ; t) où t est la valeur que prend le curseur t. En activant le mode "trace" du point M sur la figure 3D et en faisant bouger le curseur sur la figure 2D, on voit apparaître la droite d_1, comme ci-après :



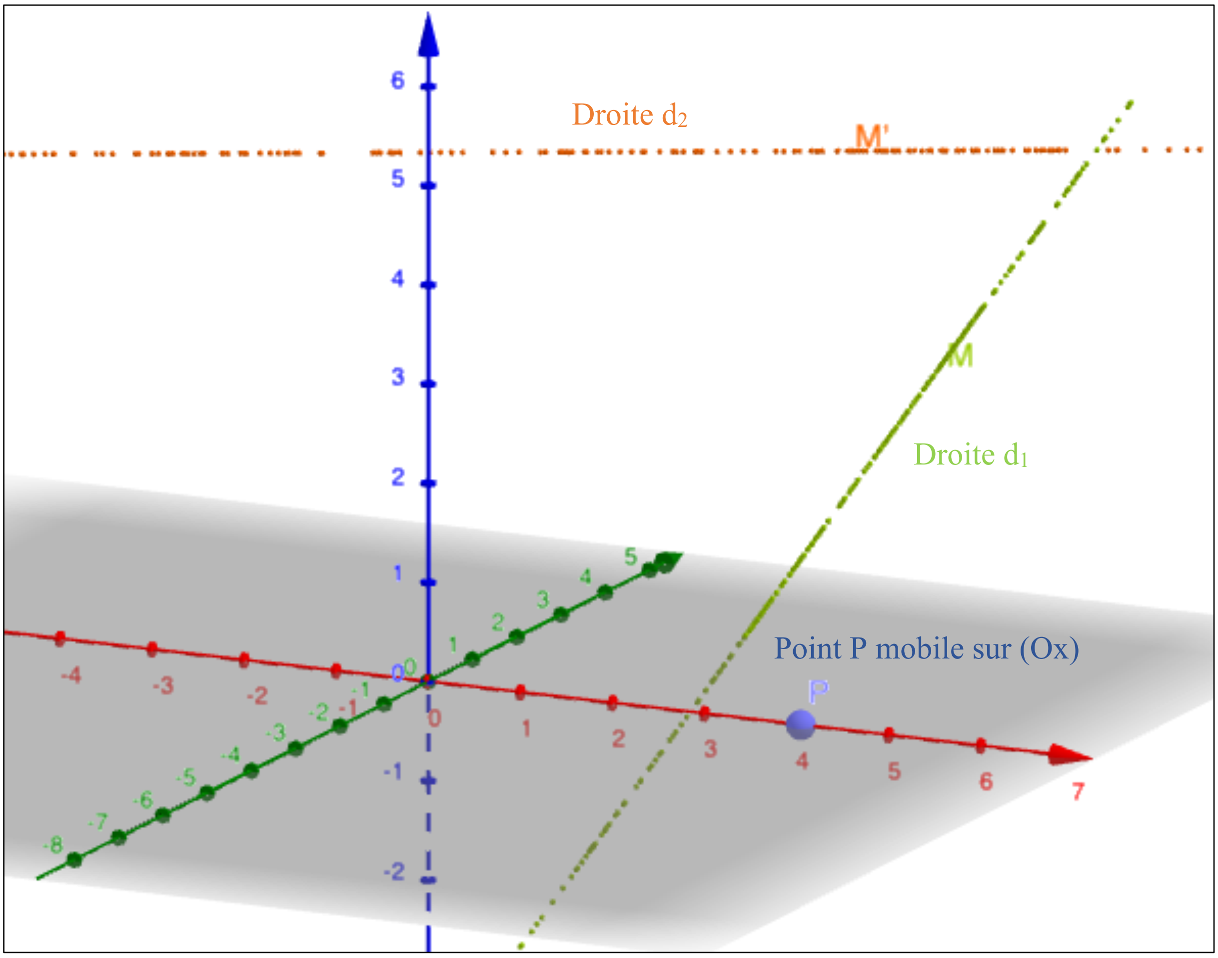


Pour obtenir le tracé de la droite d_2, on comprendra naturellement qu'il suffit de créer un deuxième point M' de coordonnées (-5 + 2t ; -1 + t ; 5) où t est le même paramètre que celui utilisé pour la droite d_1, ou bien de créer dans la figure 2D un second curseur t' et de créer dans la figure 3D un point M' de coordonnées (-5 + 2t' ; -1 + t' ; 5) où t' est le paramètre défini par le second curseur, le mode "trace" étant bien entendu activé pour le point M'. On peut ainsi visualiser simultanément les deux droites et voir que celles-ci ne sont pas coplanaires.



solution 2

On ouvre une fenêtre 3D dans laquelle on crée un point P mobile sur l'axe des abscisses. On tape dans la zone de saisie : t = x(P), puis on tape M = (2 + t ; 3 - t ; t) et M' = (-5 + 2t ; -1 + t ; 5). On active ensuite le mode "trace" des deux points M et M'. En faisant bouger le point P sur l'axe des abscisses, on fait varier t et on voit apparaître immédiatement la droite d_1 et la droite d_2, comme ci-dessous :



résolution du problème

1. Vérifions que le point A(2, 3, 0) appartient à la droite d_1.

Tous les points de la droite d_1 ont leurs coordonnées (x ; y ; z) qui vérifient $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$

On remarque évidemment que, pour t = 0, on a : $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$, ce qui signifie que le point de coordonnées (2 ; 3 ; 0) appartient à la droite d_1. <u>Conclusion</u> : A $\in$ d_1.

2. Déterminons un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.

Méthode 1

On détermine les coordonnées d'un deuxième point de la droite d_1 et le vecteur défini par ce point et le point A est un vecteur directeur de la droite d_1.
On détermine les coordonnées de deux points de la droite d_2 et le vecteur défini par ces deux points est un vecteur directeur de la droite d_2.

Méthode 2

On transforme les représentations paramétriques des droites pour faire apparaître des relations vectorielles traduisant la colinéarité de vecteurs porteurs d'informations.

Déterminons un vecteur directeur de la droite d_1.

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 3 = -t \\ z - 0 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \\ z-0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u_1}$$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la droite d_1 passant par A(2 ; 3 ; 0) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Autrement dit, $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d_1.

Déterminons un vecteur directeur de la droite d_2.

$$d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (-5) = 2t' \\ y - (-1) = t' \\ z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-5) \\ y-(-1) \\ z-5 \end{pmatrix} = t' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{CM} = t'\overrightarrow{u_2}$ $\Leftrightarrow$ M appartient à la droite d_2 passant par C(-5 ; -1 ; 5) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Autrement dit, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d_2.

Déterminons si les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

Pour que ces deux droites soient parallèles, il faudrait que leurs vecteurs directeurs soient colinéaires. Or $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

<u>Conclusion</u> : d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3. Vérifions que $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$.

$$\vec{v}.\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 1(1) - 2(-1) - 3(1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

$$\vec{v}.\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = 1(2) - 2(1) - 3(0) = 2 - 2 = 0$$

<u>Conclusion</u> : le vecteur $\vec{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4. Soit P le plan passant par A(2 ; 3 ; 0), dirigé par $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

   a. Montrons qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

   Les coordonnées du point A vérifient l'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$ car :

   $5(2) + 4(3) - 0 - 22 = 10 + 12 - 22 = 22 - 22 = 0$. Donc : <u>A ∈ P</u>.

   De plus, d'après l'équation cartésienne de plan proposée, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$ est nécessairement un vecteur orthogonal au plan P, c'est-à-dire qu'il doit être orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, directeurs du plan P.

   Vérifions que $\vec{n}.\overrightarrow{u_1} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{u_2} = 0$.

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 5 - 4 - 1 = 0$$

$$\vec{n}.\vec{v} = \begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-2\\-33\end{pmatrix} = 5 - 8 + 3 = 0$$

Conclusion : l'équation cartésienne 5x + 4y - z - 22 = 0 est bien l'équation cartésienne du plan P passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, tous deux non colinéaires et orthogonaux à $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$.

b. Montrons que la droite d_2 coupe le plan P au point B(3 ; 3 ; 5).

Autrement dit, montrons que B ∈ P et B ∈ d_2.

On a : 5(3) + 4(3) - 5 - 22 = 15 + 12 - 5 - 22 = 22 - 22 = 0, donc : B(3 ; 3 ; 5) ∈ P.

De plus, dans la représentation paramétrique de la droite d_2, en posant t' = 4, on a :

$$\begin{cases} x = -5 + 2(4) = -5 + 8 = -3 \\ y = -1 + (4) = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Le point B(-3 ; 3 ; 5) appartient donc à la droite d_2.

Conclusion : la droite d_2 coupe le plan P au point B(3 ; 3 ; 5), c'est-à-dire que B est le point d'intersection de la droite d_2 et du plan P.

5. Soit Δ la droite dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ et passant par B(3 ; 3 ; 5).

a. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ.

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈ Δ ⇔ $\overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ⇔ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{BM} = t''\vec{v}$ ⇔ $\begin{pmatrix}x-3\\y-3\\z-5\end{pmatrix} = t''\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ ⇔ $\begin{cases} x - 3 = t'' \\ y - 3 = -2t'' \\ z - 5 = -3t'' \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} x = 3 + t'' \\ y = 3 - 2t'', t'' \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 3t'' \end{cases}$ ← Équation paramétrique de la droite Δ

b. Déterminons si les droites d_1 et Δ sont sécantes.

Les droites d_1 et Δ sont sécantes s'il existe un point dont les coordonnées (x ; y ; z) vérifiant les deux systèmes :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 3 + t'' \\ y = 3 - 2t'' \\ z = 5 - 3t'' \end{cases}$$

Autrement dit, si l'on a : $\begin{cases} 2+t=3+t" \\ 3-t=3-2t" \\ t=5-3t" \end{cases}$, c.-à-d. $\begin{cases} t=1+t" \\ t=2t" \\ t=5-3t" \end{cases}$, donc :

$\begin{cases} t=1+t" \\ t=2t" \\ 2t"=5-3t" \end{cases}$, d'où : $\begin{cases} t=1+t" \\ t=2t" \\ 2t"+3t"=5 \end{cases}$, donc : $\begin{cases} t=1+t" \\ t=2t" \\ 5t"=5 \end{cases}$, ainsi : $\begin{cases} t=1+1=2 \\ 2=2 \\ t"=1 \end{cases}$

<u>Conclusion</u> :

Le point de la droite d_1 pour lequel t = 2 et de la droite Δ pour lequel t" = 1 est point d'intersection de ces deux droites. Ses coordonnées sont données par :

$\begin{cases} x=2+2=4 \\ y=3-2=1 \\ z=2 \end{cases}$ ou par $\begin{cases} x=3+1=4 \\ y=3-2(1)=1 \\ z=5-3(1)=2 \end{cases}$.

C'est-à-dire que les droites d_1 et Δ se coupent au point de coordonnées (4 ; 1 ; 2).

c. D'après les questions précédentes, la droite Δ est orthogonale aux droites d_1 et d_2 et coupe d_1 en A(2 ; 3 ; 0) et d_2 au point de coordonnées (4 ; 1 ; 2).

<u>Conclusion</u> : la droite Δ est à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et est orthogonale à celles-ci.