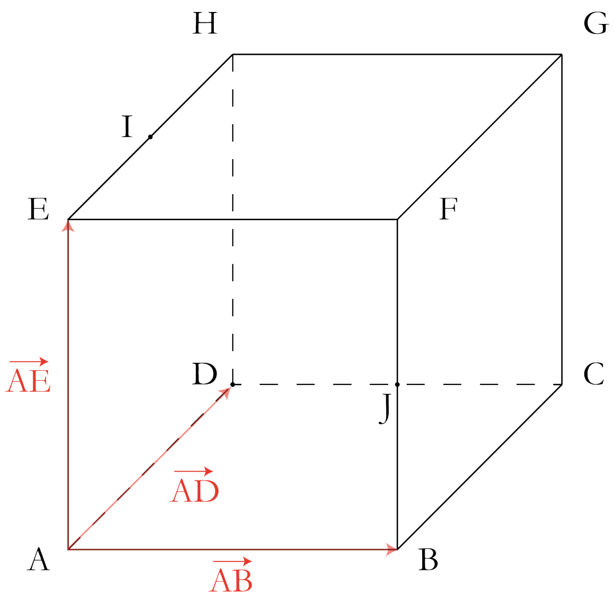
# Problème 4

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH ci-dessous. On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].




1. Tableau de données

| Point | I | J | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|
| Coordonnées | (0 ; 1/2 ; 1) | (1 ; 0 ; 1/2) | (1 ; 0 ; 1) | (1 ; 1 ; 1) | (0 ; 1 ; 1) |

2.a. Démontrons que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (BGI).

Pour démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (BGI), il suffit de démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), par exemple aux vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IG}$.

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IG}$.

On a : $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. De plus : $\overrightarrow{IG} = \begin{pmatrix}1-0\\1-\frac{1}{2}\\1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IG}$ ne sont pas colinéaires.

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{BG}$ et $\vec{n}.\overrightarrow{IG}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = -2+2 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{IG} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} = 1-1 = 0.$

Conclusion

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{IG}$, non colinéaires, du plan (BGI), c'est-à-dire que $\vec{n}$ est orthogonal au plan (BGI).

2.b. Déterminons une équation cartésienne du plan (BGI).

Une équation cartésienne d'un plan de l'espace s'écrit sous la forme ax + by + cz + d = 0 où a, b et c sont les coordonnées vectorielles d'un vecteur orthogonal au plan.

Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan (BGI), une équation cartésienne du plan s'écrit sous la forme $x - 2y + 2z + d = 0$.

Déterminons la valeur du coefficient d.

G(1 ; 1 ; 1) ∈ (BGI)$/x - 2y + 2z + d = 0$, donc : $1 - 2(1) + 2(1) + d = 0$, d'où :

$1 + d = 0$. Donc : $d = -1$.

Conclusion

Une équation cartésienne du plan (BGI) est : $\underline{x - 2y + 2z - 1 = 0}$.

2.c. Le point K est le milieu du segment [HI]. Déterminons si K appartient au plan (BGI).

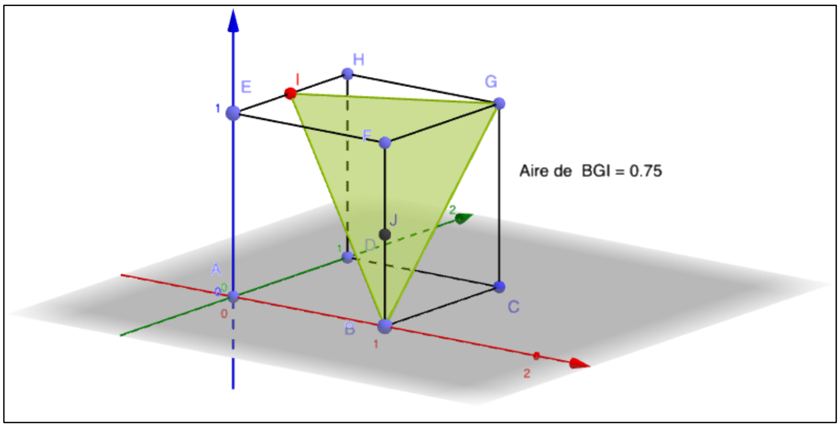
Les coordonnées du point K sont $\left(\frac{x_H+x_I}{2}; \frac{y_H+y_I}{2}; \frac{z_H+z_I}{2}\right)$, c.-à-d. $\left(\frac{0+0}{2}; \frac{1+\frac{1}{2}}{2}; \frac{1+1}{2}\right)$,

donc : $\left(0; \frac{3}{4}; 1\right)$.

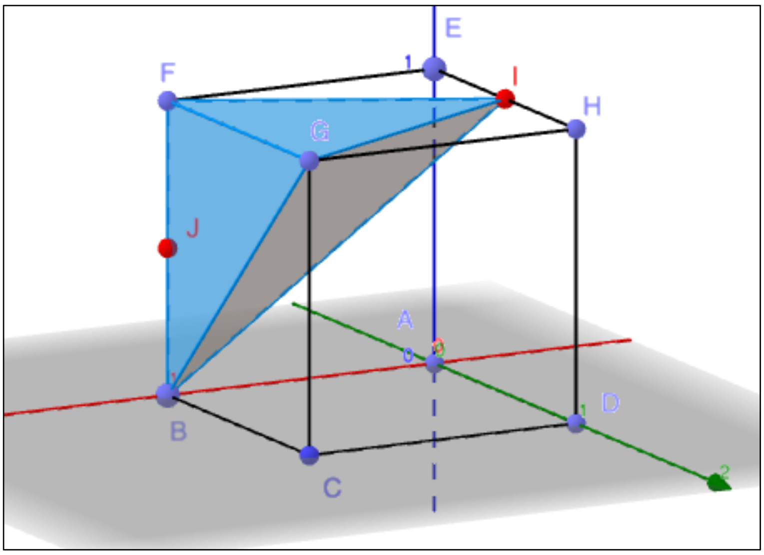
Déterminons si les coordonnées de K vérifient l'équation $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

On a : $0 - 2\left(\frac{3}{4}\right) + 2(1) - 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$, donc : $\underline{K \notin (BGI)}$.

Le but de la question 3 est de calculer l'aire du triangle BGI. Tout d'abord, remarquons qu'il est aisé de répondre à cette question via une modélisation à l'aide de GeoGebra, comme observable ci-dessous :



3.a. Démontrons que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{6}$.




Le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{3}A_{FGI} \times BF = \frac{1}{3}A_{FGI} \times 1 = \frac{1}{3}A_{FGI}$.

Or, l'aire du triangle FGI est égale à la moitié de l'aire du carré FGHE, donc $A_{FGI} = \frac{1}{2}$.

D'où, le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{3}A_{FGI} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$.

3.b. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F(1 ; 0 ; 1) et orthogonale au plan (BGI), c.-à-d. ayant pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈ Δ ⇔ $\overrightarrow{FM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

⇔ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{FM} = t\vec{n}$ ⇔ $\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z-1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

⇔ $\begin{cases}x = t+1\\ y = -2t\\ z = 2t+1\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ ← Représentation paramétrique de la droite Δ.

3.c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Déterminons les coordonnées du point F'.

F' étant le point d'intersection de la droite Δ et du plan (BGI), ses coordonnées vérifient les relations $\begin{cases}x = t+1\\ y = -2t\\ z = 2t+1\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Dans l'équation cartésienne, substituons à x, y et z les valeurs stipulées dans la représentation paramétrique. On obtient :

$$t + 1 - 2(-2t) + 2(2t+1) - 1 = 0$$

C'est-à-dire : $9t + 2 = 0$, d'où : $t = -\frac{2}{9}$.

Le point d'intersection F' de la droite Δ et du plan (BGI) est le point défini via la représentation paramétrique par $t = -\frac{2}{9}$.

Il a pour coordonnées : $\begin{cases} x = -\frac{2}{9} + 1 = \frac{7}{9} \\ y = -2\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9} \\ z = 2\left(-\frac{2}{9}\right) + 1 = \frac{5}{9} \end{cases}$.

Les coordonnées du point F' sont donc : $\left(\frac{7}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{5}{9}\right)$.

3.d. Calculons FF' avec F(1 ; 0 ; 1) et F'$\left(\frac{7}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{5}{9}\right)$.

$$FF' = \sqrt{(x_{F'} - x_F)^2 + (y_{F'} - y_F)^2 + (z_{F'} - z)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{9} - 1\right)^2}$$

$$FF' = \sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{9^2}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Déterminons l'aire du triangle BGI.

Le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{6}$.

Celui-ci est aussi égal à : $\frac{1}{3} A_{BGI} \times FF'$.

D'où : $\frac{1}{3} A_{BGI} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

Donc : $A_{BGI} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

La valeur calculée est naturellement celle obtenue via la modélisation réalisée avec GeoGebra.